ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
Львів, 18–20 квітня 2018 року
I—II курси, 1-ий день

1. Нехай квадратна матриця A з дійсними елементами задовольняє рівняння
$$A^3 - A - I = 0.$$
Довести, що $\det A > 0$.

Розв'язок. Нехай $p(t) = t^3 - t - 1$. Оскільки $p(1) < 0$, $p(2) > 0$ і, крім цього, $p'\big(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = 0$, $p\big(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\big) < 0$, то $p(t)$ має єдиний дійсний корінь $t_1 \in (1;2)$ і два комплексно спряжені корені t_2, $t_3 = \overline{t_2}$. Оскільки кожне власне значення λ матриці A є коренем характеристичного рівняння $p(t) = 0$, то t_2, $t_3 = \overline{t_2}$ є власними значеннями. Але матриця є дійсною, то її характеристичний многочлен є дійсним і, тому, комплексні власні значення є комплексно спряженими й однакової кратності m. Отже, $\det A = t_1^k (t_2 t_3)^m = t_1^k |t_2|^{2m} > 0$, де k кратність t_1.

2. Нехай функція $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовна і така, що виконуються умови
$$\int_1^x t f(t)\, dt = O(x^{3/2}), \quad f'(x) = O(x^{-1/2}) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$
Довести, що функція f обмежена.

Розв'язок. Позначимо через Δ_x проміжок $[x, x + \sqrt{x}]$ $(x \geq 1)$. З умов задачі випливає, що існує стала $c > 0$ така, що
$$\left| \int_{\Delta_x} t f(t)\, dt \right| \leq c x^{3/2}, \quad |f'(x)| \leq c x^{-1/2}, \quad x \geq 1.$$
Нехай $\alpha(x) := \min\limits_{t \in \Delta_x} |f(t)|$. Якщо $\alpha(x) \neq 0$ при деякому $x \geq 1$, то функція f має сталий знак на проміжку Δ_x, а, отже,
$$c x^{3/2} \geq \left| \int_x^{x+\sqrt{x}} t f(t)\, dt \right| = \int_x^{x+\sqrt{x}} t |f(t)|\, dt \geq x\sqrt{x}\alpha(x),$$
тобто $\alpha(x) \leq c$. Нехай $\xi \in \Delta_x$ таке, що $|f(\xi)| = \alpha(x)$. Оскільки
$$f(u) = f(\xi) + \int_\xi^u f'(t)\, dt, \qquad u \in \Delta_x,$$
то
$$|f(u)| \leq \alpha(x) + \int_{\Delta_x} c\, t^{-1/2}\, dt \leq c + c = 2c, \quad \forall u \in \Delta_x.$$
Якщо ж $\alpha(x) = 0$ і $\xi \in \Delta_x$ таке, що $f(\xi) = 0$, то $f(u) = \int_\xi^u f'(t)\, dt$, $u \in \Delta_x$. Звідси, знову маємо $|f(u)| \leq \int_{\Delta_x} c\, t^{-1/2} dt \leq c$ $(\forall u \in \Delta_x)$.

З довільності x випливає, що $(\forall t)\colon\ |f(t)| \leq 2c$. Справді, нехай $t \geq 1$ довільне. Якщо x таке, що $t \in \Delta_x$, то у двох попередніх нерівностях виберемо $u = t$.

3. Нехай $A \subset [0, +\infty)$ — деяка множина така, що
$$(\forall n)(\forall \{a_j \colon 1 \leq j \leq n\} \subset A) : \sum_{j=1}^n a_j \leq 2018.$$
Довести, що множина A не більш, ніж зліченна, а у випадку, коли множина A нескінченна, то точка 0 – єдина її точка скупчення.

Розв'язок. Зауважимо спочатку, що множина A обмежена ($\sup\{a\colon a \in A\} \leq 2018$) і для кожного інтервалу $[a, 2019)$, $a \in (0,1)$, перетин $A \cap [a, 2019)$ є не більш, ніж скінченною множиною точок. Справді, якщо множина A має нескінченну кількість точок $\{a_j\colon j \in \mathbb{N}\} \subset A \cap [a, 2019)$, то $2018 \geq \sum_{j=1}^{n} a_j \geq a \cdot n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. При $n > \frac{2018}{a}$ отримуємо суперечність. Отже, якщо множина A має нескінченну кількість точок, то для кожного $a > 0$ всередині проміжка $[0, a)$ є всі точки A за винятком можливо скінченної їхньої кількості. Залишилося зауважити, що $A \setminus \{0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, 2009)$, тобто, є зліченним об'єднанням множин зі скінченною кількістю елементів.

4. Чи існує неперервне на деякому інтервалі взаємно однозначне відображення, обернене до якого є розривним?

Відповідь. Так існує. **Розв'язок.** Нехай $f\colon [0, 1) \to \mathbb{R}^2$, що діє за правилом $f(x) = \big(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x\big)$. Тоді, $f\big([0, 1)\big) = D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2\colon u^2 + v^2 = 1\}$. Нехай $g = f^{-1}$ – обернене відображення, визначене на D. Нескладно перевіряється, що воно розривне у точці $(u, v) = (1, 0)$. Справді,

$$\lim_{(u,v)\to(1,0), v>0} g(u, v) = 0, \qquad \lim_{(u,v)\to(1,0), v<0} g(u, v) = 1.$$

5. Нехай $r \in \mathbb{R}$. Якщо для кожного $c > 0$ існують цілі числа m, n такі, що $\frac{m}{n} \neq r$ і виконується нерівність $\left|r - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n}$, то r – ірраціональне число. Довести.

Розв'язок. i) Доведемо спочатку, що якщо r – раціональне число, то існує $c > 0$ таке, що для довільного раціонального дробу $\frac{m}{n} \neq r$ виконується нерівність $|r - \frac{m}{n}| \geq \frac{c}{n}$. *Справді,* нехай $r = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, а $c = \frac{1}{q}$. Тоді, $np - mq \neq 0$, звідки $|np - mq| \geq 1$. Звідси,

$$\left|r - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| = \frac{|np - mq|}{qn} \geq \frac{1}{qn} = \frac{c}{n}.$$

Отже, якщо припустити, що r – раціональне число, то за щойно доведеним отримаємо суперечність з умовою.

6. Нехай $\frac{1}{2} < a_j < 1$ $(1 \leq j \leq n)$, $a_j \geq a_{j+1}$ $(1 \leq j \leq n-1)$, $\frac{n}{2} \leq k \leq n$,

$$f(x) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{k} x_j \prod_{j=k+1}^{n} (1 - x_j) + \prod_{j=1}^{k} (1 - x_j) \prod_{j=k+1}^{n} x_j.$$

Довести, що для довільної перестановки $\sigma\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ виконується нерівність

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\big(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}\big).$$

Розв'язок. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -перестановка елементів $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тоді, для $y_j = \frac{1}{x_j} - 1$

$$f(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} = f(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \prod_{j=k+1}^{n} y_j + \prod_{j=1}^{k} y_j := v + u.$$

При цьому $0 < y_j < 1, 0 < u < 1, 0 < v < 1$. Але, $u \cdot v = \prod\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j} - 1\right) \equiv \mathrm{const} := A \in (0, 1)$.

Позначимо $\psi(u) = u + \frac{A}{u}$. Тоді, оскільки $u_* = \sqrt{A}$ – єдина точка мінімуму цієї функції для додатних значень змінної, що визначається з рівняння $u^2 = A$, то $\max\{u+v\} = \max\{u+\frac{A}{u}\} = \max\{\psi(u_0), \psi(u_1)\}$,

$$u_0 = \min u = \min \prod_{j=1}^{k} y_j = \min \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{x_j} - 1\big) = \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big),$$

$$u_1 := \max u = \max \prod_{j=1}^{k} y_j = \max \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{x_j} - 1\big) = \prod_{j=n-k+1}^{n} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) \leq \prod_{j=k+1}^{n} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) := u_2$$

Тому,

$$u_0 + \frac{A}{u_0} = \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) + \prod_{j=k+1}^{n} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big), \ u_2 + \frac{A}{u_2} = \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) + \prod_{j=k+1}^{n} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big).$$

Але, $\psi(u_1) \leq \psi(u_2)$. Звідси вже нескладно отримати, що $f(x) \leq f(a)$. Справді,

$$f(x) \leq \prod_{j=1}^{n} a_j \prod_{j=k+1}^{n} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) + \prod_{j=1}^{n} a_j \prod_{j=1}^{k} \big(\frac{1}{a_j} - 1\big) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} a_j \prod_{j=k+1}^{n} \big(1 - a_j\big) + \prod_{j=k+1}^{n} a_j \prod_{j=1}^{k} \big(1 - a_j\big) = f(a).$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
Львів, 18–20 квітня 2018 року
III—Y курси, 1-ий день

1. У кожному рядку невиродженої матриці A розміру $n \times n$ є лише один відмінний від нуля елемент, який дорівнює 1 або -1. Доведіть, що існує таке натуральне число m, що $A^m = A^T$, A^T – матриця транспонована до заданої.

Розв'язок. З невиродженості матриці випливає, що відмінні від нуля елементи розташовані в попарно різних рядках і стовпцях. Нескладно переконуємося, що матриця є ортогональною, тобто, $A^T = A^{-1}$. Крім цього добуток двох довільних матриць такого вигляду є знову матрицею такого ж типу. Розглянемо послідовність степенів даної матриці

$$A^0 = I,\ A,\ A^2, \dots ,A^n, \dots$$

Очевидно, що серед елементів цієї матричної послідовності є не більше, ніж $2^n \cdot n!$ різних матриць. Отже, у випадку, коли існують $k, l,\ k \geq l + 2$ такі, що $A^k = A^l$, то $A^{k-l-1} = A^{-1}$. Залишається вибрати $m = k - l - 1 \geq 1$. Якщо $k = l + 1$, то $A^{l+1} = A^l$, звідки, $A = I \Longrightarrow A = A^{-1}$. Тому, $m = 1$.

2. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, функція $F\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовна і така, що $(\forall x, y)\colon xF'_x \geq yF'_y$, а криволінійний інтеграл $\int_{AB} F(x, y)(ydx + xdy)$ по кожній спрямній кривій, яка з'єднує довільні точки A, B залежить лише від цих точок, тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Довести, що існує неперервно диференційовна функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $F(x, y) = f(xy)$.

Розв'язок. Нехай G – довільна однозв'язна область така, що $\Gamma = \partial G$ – замкнена спрямна крива. Тоді за формулою Гріна

$$0 = \int_\Gamma F(x, y)(ydx + xdy) = \iint_G \Big((xF)'_x - (yF)'_y\Big)dxdy =$$
$$= \iint_G (xF'_x - yF'_y)dxdy.$$

Позначимо $\widetilde{F}(u, v) = F(e^u, e^v)$. Тоді, $\widetilde{F}'_u - \widetilde{F}'_v = xF'_x - yF'_y \geq 0$ при $\Big[x = e^u, y = e^v\Big]$ і з рівності нулю подвійного інтеграла і неперервності підінтегральної функції випливає, що $\widetilde{F}'_u - \widetilde{F}'_v = xF'_x - yF'_y = 0$ в області G. З довільності вибору області вивпливає, що $\widetilde{F}'_u - \widetilde{F}'_v = 0$ для всіх $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Добре відомо, що тоді існує неперервно диференційовна функція $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $\widetilde{F}(u, v) = g(u+v)$. Залишається вибрати $f(t) = g(\ln t)$. Тоді, $f(e^t) = g(t)$, $F(e^u, e^v) = \widetilde{F}(u, v) = f(e^u e^v)$ і $F(x, y) = f(xy)$.

3. У просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$ лінійний оператор S діє за формулою $(Sf)(x) := \displaystyle\int_0^x e^{t-x} f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}_+$. Доведіть його неперервність і обчисліть норму.

Розв'язок. Застосовуючи нерівність Буняковського-Шварца отримуємо, що для довільних $x > 0$
$|(Sf)(x)|^2 \leq \Big(\int\limits_0^x e^{t-x}\, dt\Big)\Big(\int\limits_0^x e^{t-x}|f(t)|^2\, dt\Big) \leq \int\limits_0^x e^{t-x}|f(t)|^2\, dt$, а, отже,
$\|Sf\|^2_{L_2} \leq \int\limits_0^\infty \int\limits_0^x e^{t-x}|f(t)|^2\, dt\, dx = \int\limits_0^\infty |f(t)|^2\, dt = \|f\|^2_{L_2}$, тобто, S є обмежений і $\|S\| \leq 1$.

Розглянемо послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ функцій, що задані формулою
$$f_n(x) := \begin{cases} n^{-1/2}, & \text{якщо } x \in (0, n); \\ 0, & \text{якщо } x \geq n. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\|f_n\|_{L_2} = 1$ і $(Sf_n)(x) = f_n(x) + n^{-1/2}g_n(x),\ x > 0,$
де $g_n(x) := -e^{-x} + \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ \ x \in (0,n); \\ e^{n-x}, & \text{якщо}\ \ x \geq n. \end{cases}$
Оскільки $\|g_n\|_{L_2} \leq 2,\ n \in \mathbb{N}$, то $\|Sf_n\|_{L_2} \geq \|f_n\| - 2n^{-1/2},\ n \in \mathbb{N}$. А це означає, що $\|S\| \geq 1$, а, отже, $\|S\| = 1$.

4. Нехай l_∞ –лінійний простір всіх обмежених послідовностей дійсних чисел $x = (x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Навести приклад такої норми $\|\cdot\|$ на l_∞, що $(l_\infty, \|\cdot\|)$ – сепарабельний простір.

Розв'язок. Такою, наприклад є норма $\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| 2^{-n}$. Перевірка аксіом норми є елементарною. Множина

$$A = \{x = (r_1, \ldots, r_n, 0\ldots)\colon r_j \in \mathbb{Q}, 1 \leq j \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

є зліченною і скрізь щільною в $(l_\infty, \|\cdot\|)$. Зліченність A отримуємо зі зліченності $\mathbb{Q}_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty}\mathbb{Q}^n$ і $A \subset \mathbb{Q}_\infty$. Далі, нехай $x \in l_\infty$, а $\varepsilon > 0$ – довільне. За умовою $m = \sup\{|x_n|\colon n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Тоді, $(\forall N \in \mathbb{N})(\forall k \in \{1, 2, \ldots, N\})\colon |x_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Вибираючи N таким, що $m2^{-N+1} < \varepsilon$ для $y = (r_1, \ldots, r_N, 0\ldots)$ отримуємо

$$\|x - y\| = \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}|x_k - r_k| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k}|x_k| < \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}\frac{\varepsilon}{2N} +$$
$$+ m\sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} + m2^{-N} < \varepsilon.$$

5. Скажемо, що множина $A \subset \mathbb{N}$ має нульову щільність, якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sharp(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n} = 0$. Послідовність дійсних чисел назвемо збіжною за щільністю до x $\Big(\text{d-lim}\, x_n = x\Big)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ множина $A_\varepsilon := \{n\colon |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ має нульову щільність. Довести, що для довільної обмеженої послідовності невід'ємних чисел (a_n)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \Longleftrightarrow \text{d-lim}\, a_n = 0.$$

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Нехай $A_\varepsilon := \{n\colon a_n \geq \varepsilon\}$. Тоді,

$$\frac{\sharp(A_\varepsilon \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k\in(A_\varepsilon\cap\{1,2,\ldots,n\}} 1 \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k\in(A_\varepsilon\cap\{1,2,\ldots,n\}} \frac{a_k}{\varepsilon} \leq \frac{1}{n\varepsilon}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

$(\Longleftarrow)$ За умовою для кожного $\varepsilon > 0$ множина $A_\varepsilon := \{n\colon a_n \geq \varepsilon\}$ має нульову щільність. Тому, $a_k < \varepsilon$ для всіх $k \notin A_\varepsilon$. Звідси,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k\in A_\varepsilon\cap\{1,2,\ldots,n\}} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus A_\varepsilon} a_k \leq$$
$$\leq \frac{\sharp(A_\varepsilon \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n} \cdot \sup\{a_k\colon k \geq 1\} + \varepsilon.$$

6. Довести, що регулярний топологічний простір X є компактним тоді і лише тоді, коли довільне бієктивне неперервне відображення $f : X \to Y$ на гаусдорфів простір Y є гомеоморфізмом.

Розв'язок. Якщо X – компактний, тоді довільна замкнена підмножина $F \subset X$ теж компактна, її образ $f(F)$ – компактний і тому замкнений у гаусдорфовому просторі Y. Тобто відображення f – замкнене і тому є гомеоморфізмом.

Якщо простір X некомпактний, то існує відкрите покриття $\mathcal{U}$ простору X, з якого не можна виділити скінченного підпокриття.

Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in X$ і розглянемо сім'ю τ, що складається з відкритих підмножин $U \subset X$, мають таку властивість: якщо $x_0 \in U$, то $X = U \cup \bigcup \mathcal{F}$ для деякої скінченної підсім'ї $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ (залежної від U). Легко бачити, що сім'я τ є гаусдорфовою топологією на X і тотожне відображення $f : X \to Y := (X, \tau)$ неперервне і бієктивне. Щоб побачити, що це відображення не є гомеоморфізмом, достатньо зауважити, що довільна множина $U \in \mathcal{U}$, яка містить точку x_0, не належить топології τ, оскільки $\{U\} \cup \mathcal{F} \neq X$ для довільної скінченної підсім'ї $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
Львів, 18–20 квітня 2018 року
I—II курси, 2-ий день

1. Нехай G – скінченна група, порядок якої не ділиться на 3 і така, що $(\forall a, b \in G)\colon (ab)^3 = a^3b^3$. Довести, що група G абелева, тобто, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$.

Розв'язок. Потрібно довести, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$. Нехай $|G| = n$. Оскільки $(3, n) = 1$, то знайдуться такі $x, y \in \mathbb{Z}$, $x > 0$, що $3x + ny = 1$. Звідси, $ab = (ab)^{3x+ny} = (ab)^{3x}(ab)^{ny}$. З того, що $|G| = n$ і $ab \in G$ маємо $(ab)^n = e \in G$, e – нейтральний елемент. Далі, послідовно маємо

$$ab = (ab)^{3x} = (a^3b^3)^x = a^3(b^3a^3)^{x-1}b^3 = a^3(ba)^{3x-3}b^3 =$$
$$= a^3(ba)^{3x}(ba)^{-3}b^3 = a^3(ba)^{3x+ny}(ba)^{-3}b^3 = a^3(ba)(ba)^{-3}b^3.$$

Зауважимо тепер, що $ba(ba)^{-3} = a^{-3}b^{-3}ba$. Справді,

$$ba(ba)^{-3} = ba(ba)^{-1}(ba)^{-1}(ba)^{-1} = (ba)^{-1}(ba)^{-1} =$$
$$= (ba)^{-1}(ba)^{-1}(ba)^{-1}ba = (ba)^{-3}ba,$$

а $(ba)^{-3} = ((ba)^3)^{-1} = (b^3a^3)^{-1} = a^{-3}b^{-3}$, звідки

$$ab = a^3a^{-3}b^{-3}bab^3 = b^{-2}ab^3 = b^{-2}a^{-2}a^3b^3 = b^{-2}a^{-2}(ab)^3 \Longrightarrow$$
$$a^2b^2 = a^2b^2ab(ab)^{-1} = a^2b^2b^{-2}a^{-2}(ab)^3(ab)^{-1} = (ab)^2 \Longrightarrow$$
$$ab = a^{-1}aabbb^{-1} = a^{-1}a^2b^2b^{-1} = a^{-1}(ab)^2b^{-1} = a^{-1}ababb^{-1} = ba.$$

.

2. Нехай $b_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le n)$, $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \ne 0$, (a_k) — попарно різні додатні числа. Якщо функція $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin a_k x$ є періодичною, то $\{\frac{a_k}{a_j} : 1 \le k, j \le n\} \subset \mathbb{Q}$, тобто, $(\forall k, j)\colon \frac{a_k}{a_j}$ — раціональні числа. Довести.

Розв'язок. Нехай $T > 0$ – період заданої функції. Тоді, очевидно, що T є періодом кожної її похідної, зокрема, є періодом функції $f^{(2s)}$ для кожного натурального s. Зауважимо, що

$$f^{(2s)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^s A_k a_k^{2s} \sin a_k x.$$

Розглянемо систему лінійних рінянь розміру $n \times n$ відносно невідомих $u_k = \sin a_k x$. Визначник системи відмінний від нуля, тому, застосовуючи правило Крамера отримаємо, що невідомі є лінійними комбінаціями похідних $f^{(2s)}(x)$:

$$\sin a_k x = \sum_{s=1}^{n} C_s f^{(2s)}(x).$$

Звідси, T є періодом функції $y = \sin a_k x$, звідки, для кожного k знайдеться натуральне число n_k таке, що $T = \dfrac{2\pi n_k}{a_k}$. Далі зрозуміло.

3. Нехай натуральні числа $k \ne n$. Довести, нерівності:

$$\text{a)}\ \Big|\ln \frac{k}{n}\Big| \ge \frac{1}{\max\{k, n\}},$$

$$\text{b)}\ \Big|\ln \frac{k}{n}\Big| \ge \frac{1}{\max\{k, n\}} - \frac{1}{1 + \min\{k, n\}} + \ln\Big(1 + \frac{1}{\min\{k, n\}}\Big).$$

Розв'язок. b) Не зменшуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $k \geq n+1$. Розглянемо при $x \geq 1$ функцію $f(x) = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{1}{x+n}$. Зауважимо, що $f'(x) = \frac{1}{n+x} + \frac{1}{(x+n)^2} > 0$. Тому, функція зростає, і, отже, для всіх $x = k-n \geq 1$ виконується нерівність $f(x) = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{1}{x+n} \geq f(1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$. Звідси, при $k \geq n+1$ отримуємо $\ln\frac{k}{n} = \ln(1+\frac{k-n}{n}) \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
a) Просте доведення цієї нерівності $x = (n+1)^{-1} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = -\ln(1-x) - x = -(\ln(1-x)+x) \geq -(-x+x) = 0$, бо $\ln(1-x) \leq -x$ Тоді все випливає з b).

4. Нехай $C_0^{(2)}[a,b]$ – клас двічі диференційовних на відрізку $[a;b]$ функцій $y = f(x)$, $f(a) = f(b) = 0$ і $\sup\{|f''(x)|\colon a \leq x \leq b\} \leq c$. Знайти значення
$$M := \sup\left\{\max\{|f(x)|\colon x \in [a;b]\}\colon f \in C_0^{(2)}[a,b]\right\}.$$

Відповідь. $M = \dfrac{c(b-a)^2}{8}$. **Розв'язок.** Нехай найбільше значення функція $f(x)$ досягає у точці $x_0 \in (a;b)$. Тоді $f'(x_0) = 0$ і формула Тейлора до другого порядку набуває вигляду
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$
де $\xi \in [x_0;x]$ (або $\xi \in [x;x_0]$), $x \in [a;b]$.

Нехай тепер $a < x_0 < \frac{a+b}{2}$. Візьмемо $x = a$ і з останньої формули дістанемо $0 = f(x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(a-x_0)^2$, тобто $f(x_0) = -\frac{f''(\xi_0)}{2}(a-x_0)^2$, де $\xi_0 \in [a;x_0]$. Оцінивши по модулю, отримуємо $|f(x_0)| = \frac{|f''(\xi_0)|}{2}(a-x_0)^2 \leq \frac{c(b-a)^2}{8}$.

Нехай $\frac{a+b}{2} \leq x_0 < 1$. Підставимо $x = b$ у записану вище формулу Тейлора. Тоді $0 = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(b-x_0)^2$. Звідси, $f(x_0) = -\frac{f''(\xi_1)}{2}(b-x_0)^2$, де $\xi \in [x_0,b]$. Тому $|f(x_0)| = \frac{|f''(\xi_1)|}{2}|b-x_0|^2 \leq \frac{c(b-a)^2}{8}$. Таким чином, в обох випадках $f(x_0) \leq \frac{c(b-a)^2}{8}$. А тому $\max_{x\in[a;b]} f(x) \leq \frac{c(b-a)^2}{8}$. Не складно перевірити, що така функція $f(x) = \frac{c}{2}(x-a)(b-x)$ задовольняє умови задачі і набуває найбільшого значення $\frac{c(b-a)^2}{8}$ у точці $x = \frac{a+b}{2}$.

5. Чи існують такі функції $y = f(u)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $y = f(g(x))$ – неперервне на всій числовій прямій і для деяких a, b, c
$$\lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \lim_{u\to b} f(u) = c, \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) \neq c.$$

Відповідь. Так існують. **Розв'язок.** Нехай $f(u) = \begin{cases} c, & u \neq b, \\ c+1, & u = b \end{cases}$, $g(x) \equiv b$. Тоді, $f(g(x)) \equiv c+1 \Longrightarrow \lim\limits_{u\to b} f(u) = c$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c+1 \neq c$.

6. Задамо перетворення T простору $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ за формулою $T(t) = (\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_2+t_3}{2}, ..., \frac{t_n+t_1}{2})$ для кожного $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Нехай вектор $x \in \mathbb{R}^n$ має попарно різні цілочисельні координати. Доведіть, що у послідовності $x, Tx, T^2x, \ldots$ є вектор з нецілочисельною координатою.

Розв'язок. Спершу знайдемо власні значення T. Рівність $Ty = \lambda y$ еквівалентна до $\frac{y_i+y_{i+1}}{2} = \lambda y_i$ для всіх i, де під y_{n+1} ми розуміємо y_1. Після спрощення, ми маємо $y_{i+1} = (2\lambda-1)y_i$. Ітеруючи n разів, отримуємо $(2\lambda-1)^n y_i = y_i$. Оскільки деяке y_i є ненульовим, ми маємо $(2\lambda-1)^n = 1$ або $\lambda = \frac{1+\omega}{2}$, де ω є довільним n-тим коренем з одиниці. Навпаки, для кожного такого λ є власний вектор y з $y_1 = 1$ і $y_i = (2\lambda-1)^{i-1} = w^{i-1}$ для кожного $i > 1$.

Таким чином, власні значення мають вигляд $\lambda_k = \dfrac{1 + e^{\frac{2\pi i(k-1)}{n}}}{2}$ для $1 \leq k \leq n$ та мають відповідні власні вектори v_k. Довільний початковий вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ можна записати у вигляді $c_1v_1 + ... + c_nv_n$ для деяких c_i. Оскільки x_i є попарно відмінними і $v_1 = (1, ..., 1)$, ми маємо, що $c_i \neq 0$ для принаймні одного $i > 0$. Якшо n є парним, $v_{\frac{n}{2}+1} = (1, -1, 1, -1, ..., 1, -1)$, а оскільки x_i є попарно відмінними, то $c_i \neq 0$ для деякого $i > 1$, $i \neq \frac{n}{2} + 1$.

Тепер зауважимо, що

$$T^k x = c_1v_1 + \lambda_2^k c_2v_2 + ... + \lambda_n^k c_nv_n$$

Оскільки $|\lambda_i| < 1$ для всіх $i > 1$, коли k прямує до нескінченності то $T^k x$ прямує до c_1v_1. Вище ми показали, що завжди є таке $i > 1$, що $c_i \neq 0$. Оскільки $\lambda_i^k \neq 0$ і v_i є лінійно незалежними для $i > 1$ не може статися так, що $T^k x = c_1v_1$ для деякого k.

Візьмемо таке $\varepsilon > 0$, що якщо $0 < \|w - c_1v_1\| < \varepsilon$ то w має нецілочисельну координату. Оскільки $T^k x$ прямує до c_1v_1, коли k прямує до нескінченності і кожний вектор $T^k x$ не дорівнює c_1v_1, то для достатньо великих k вектор $T^k x$ має нецілочисельну координату.

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
Львів, 18–20 квітня 2018 року
III—Y курси, 2-ий день

1. Нехай G – скінченна група, порядок якої не ділиться на 3 і така, що $(\forall a, b \in G)\colon (ab)^3 = a^3b^3$. Довести, що група G абелева, тобто, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$.

Розв'язок. Потрібно довести, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$. Нехай $|G| = n$. Оскільки $(3, n) = 1$, то знайдуться такі $x, y \in \mathbb{Z}$, $x > 0$, що $3x + ny = 1$. Звідси, $ab = (ab)^{3x+ny} = (ab)^{3x}(ab)^{ny}$. З того, що $|G| = n$ і $ab \in G$ маємо $(ab)^n = e \in G$, e – нейтральний елемент. Далі, послідовно маємо

$$ab = (ab)^{3x} = (a^3b^3)^x = a^3(b^3a^3)^{x-1}b^3 = a^3(ba)^{3x-3}b^3 =$$
$$= a^3(ba)^{3x}(ba)^{-3}b^3 = a^3(ba)^{3x+ny}(ba)^{-3}b^3 = a^3(ba)(ba)^{-3}b^3.$$

Зауважимо тепер, що $ba(ba)^{-3} = a^{-3}b^{-3}ba$. Справді,

$$ba(ba)^{-3} = ba(ba)^{-1}(ba)^{-1}(ba)^{-1} = (ba)^{-1}(ba)^{-1} =$$
$$= (ba)^{-1}(ba)^{-1}(ba)^{-1}ba = (ba)^{-3}ba,$$

а $(ba)^{-3} = ((ba)^3)^{-1} = (b^3a^3)^{-1} = a^{-3}b^{-3}$, звідки

$$ab = a^3a^{-3}b^{-3}bab^3 = b^{-2}ab^3 = b^{-2}a^{-2}a^3b^3 = b^{-2}a^{-2}(ab)^3 \Longrightarrow$$
$$a^2b^2 = a^2b^2ab(ab)^{-1} = a^2b^2b^{-2}a^{-2}(ab)^3(ab)^{-1} = (ab)^2 \Longrightarrow$$
$$ab = a^{-1}aabbb^{-1} = a^{-1}a^2b^2b^{-1} = a^{-1}(ab)^2b^{-1} = a^{-1}ababb^{-1} = ba.$$

2. Нехай X – топологічний простір, $C(x)$ – об'єднання усіх лінійно зв'язних підмножин простору X, що містять точку x, а $\mathrm{Path}(X) := \{C(x) : x \in X\}$ – множина компонент лінійної зв'язності простору X, наділена найсильнішою топологією, у якій фактор-відображення $C(\cdot) : X \to \mathrm{Path}(X)$, $C(\cdot) : x \mapsto C(x)$, є неперервним. Чи існує компактний метризовний простір X, для якого простір $\mathrm{Path}(X)$ лінійно зв'язний і містить більше однієї точки? Нагадаємо, що підмножина Z топологічного простору X називається *лінійно зв'язною*, якщо для довільних точок $x, y \in Z$ існує неперервна функція $\gamma : [0, 1] \to Z$ з $\gamma(0) = x$ і $\gamma(1) = y$.

Розв'язок. Розглянемо добре відомий приклад зв'язного не лінійно зв'язного простору, який називається "варшавська крива":

$$X := \big(\{0\} \times [-1, 1]\big) \cup \big\{(x, \sin(\tfrac{1}{x}) : x \in (0, 1]\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Цей простір має дві компоненти лінійної зв'язності, одна з яких відкрита, а інша – замкнена. Тому $\mathrm{Path}(X)$ гомеоморфний зв'язній двокрапці $D = \{0, 1\}$, наділений топологією $\tau = \big\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\big\}$. Зв'язна двокрапка є лінійно зв'язною, оскільки відображення цілої частини $\gamma : [0, 1] \to D$, $\gamma : x \mapsto [x]$, є неперервним (і з'єднує точки 0 і 1 в D). $C(x)$ називається *компонентою лінійної зв'язності* точки x топологічного простору X. $\mathrm{Path}(X) := \{C(x) : x \in X\}$ називається *простором компонент лінійної зв'язності* простору X.

3. У банаховому просторі X для замкненої опуклої множини A:
$$(\exists x \in A)\ (\forall y \in X)\ (\exists \varepsilon(y) > 0)\ (\forall \lambda \in [0, \varepsilon(y)]) : \quad x + \lambda y \in A.$$
Доведіть, що внутрішність $\mathrm{int}A \neq \varnothing$.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності міркувань припустимо, що $x = 0$. Тоді $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} \lambda A = X$, позаяк

$$\forall y \in X\ \exists \varepsilon(y) > 0\ \forall t \in [0, \varepsilon(y)] :\ ty \in A \quad \Longrightarrow$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{Q}_+ \cap [\tfrac{1}{t}, +\infty) :\ \lambda A \ni y.$$

Припустимо тепер, що $\mathrm{int}A = \varnothing$. Зі замкнености A випливає, що вона ніде не щільна. Тоді, за теоремою Бера отримаємо, що зліченне об'єднання ніде не щільних множин $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{Q}_+} \lambda A$ не може дорівнювати X. Суперечність.

Зауваження. Така точка $x \in A$ називається афінно-внутрішньою точкою множини A, а множину всіх афінно-внутрішніх точок називають якдром цієї множини. . Власне, тут стверджується, що якщо ядро множини є непорожнім, то вона сама – непорожня.

4. Нехай $(\mathbb{T}, \mathcal{A}, \mu)$ – простір з мірою, тобто, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра підмножин $\mathbb{T}$, μ – зліченно-адитивна міра. Для $\mathcal{A}$-вимірної функції $x = x(t)\colon T \to \mathbb{R}$ визначимо такі числа

$$\varphi(x) := \sup\Big\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |x(t)|d\mu(t) : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) > 0\Big\},$$
$$\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|x(t)| = \inf\{C > 0\colon |x(t)| \le C \ (\mathrm{mod}\ \mu) \text{ на } \mathbb{T}\}.$$

Довести, що $\varphi(x) < +\infty \iff \|x\|_\infty < +\infty$ та порівняйте ці числа.

Розв'язок. За означенням $\|x\|_\infty$, $(\forall E \in \mathcal{A}, \mu(E) > 0)\colon\ |x(t)| \le \|x\|_\infty$ ($\mathrm{mod}\ \mu$) на E. Тому,

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E |x|d\mu \le \frac{1}{\mu(E)}\int_E \|x\|_\infty d\mu = \|x\|_\infty,$$

звідки, $\varphi(x) \le \|x\|_\infty$.

Навпаки. Припустимо, що $\varphi(x) < \|x\|_\infty$. Для числа $a = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \|x\|_\infty)$ маємо, що $\varphi(x) < a < \|x\|_\infty$. З означення $\|x\|_\infty$ випливає, що $E := \{t \in \mathbb{T}\colon |x(t)| \ge a\} \in \mathcal{A}$ і $\mu(E) > 0$. Звідси отримуємо, що

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E |x|d\mu \ge \frac{1}{\mu(E)}\int_E a d\mu = a > \varphi(x),$$

що суперечить означенню $\varphi(x)$.

5. Нехай $(\exists M \in \mathbb{R})$. Відшукати всі цілі функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такі, що $(\forall z \in \mathbb{C})\colon\ \mathrm{Re}(f(z)) \ge M$. Відповідь обгрунтувати.

Розв'язок. Розглянемо таку цілу функцію $g(z) = e^{-f(z)}$. Зазначимо, що $|g(z)| = e^{-\,Re(f(z))} \leqslant e^{-M}$. Позаяк $g(z)$ також ціла функція, то за теоремою Ліувілля робимо висновок, що вона є сталою. А, отже, $f(z) \equiv C$, тобто, також стала. При цьому, повинна виконуватись нерівність $\mathrm{Re}C \ge M$.

6. Нехай $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $A - (a_{i,j})$ – матриця розміру $n \times n$, $x = x(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ – розв'язок задачі Коші для системи $\dot{x} = Ax$ і початкової умови $x(0) = b \in \mathbb{R}^n_+$, де $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$. Довести, що

$$(\forall t > 0)(\forall b \in \mathbb{R}^n_+)\colon\ x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \quad\iff\quad (\forall i \ne j)\colon\ a_{i,j} \ge 0.$$

Розв'язок. Задача Коші має розв'язок

$$x(t) = e^{tA}b, \qquad e^{tA} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k,$$

де $A^0 = I,\ A^k = A(A^{k-1})\ (k \ge 1)$. Позначимо $e^{tA} = \big(b_{i,j}(t)\big)$.

Необхідність. Припустимо, що $(\forall t > 0)\colon\ x(t) \in \mathbb{R}^n_+$ і $a_{i,j} < 0$ для деяких i, j. Зауважимо, що (при цьому матричну границю розглядаємо як матрицю з поелементних границь)

$$\frac{tA - I}{t} \to A \quad (t \to +0).$$

Тому, якщо $a_{i,j} < 0$ для деяких i, j, то для всіх досить малих t також $b_{i,j}(t) < 0$. Нехай $b = e_s$ – s-ий елемент стандартної бази в $\mathbb{R}^n$. Тоді, $x(t) = e^{tA}e_s = \big(b_{1,s}(t), \ldots, b_{i,s}(t), \ldots, b_{n,s}(t)\big)^T$, але $b_{i,s}(t) < 0$. Суперечність.
Достатність. Нехай $(\forall i \neq j)\colon\ a_{i,j} \geq 0$. Досить довести, що $(\forall i \neq j)(\forall t > 0)\colon\ b_{i,j}(t) \geq 0$. Позначимо $a = \max\{a_{i,i}\colon 1 \leq i \leq n\}$. Тоді всі елементи матриці $A + cI$ невід'ємні. Нескладно зрозуміти, що такими ж є елементи матриці $A^{t(A+cI)}$ Невід'ємні елементи має також діагональна матриця $e^{-ctI} = \mathrm{diag}(e^{-ct}, \ldots, e^{-ct})$.

Зауважимо тепер, що у випадку, коли матриці A, B комутують, то $e^{A+B} = e^A e^B$. Справді,

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} C_k^s A^s B^{k-s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{A^s}{s!} \frac{B^{k-s}}{(k-s)!} =$$
$$= \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\Big)\Big(\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!} B^s\Big) = e^A e^B.$$

Матриці $A + cI$ та $-cI$ комутують, тому,

$$e^{tA} = e^{t(A+cI-cI)} = e^{t(A+cI)} e^{-tcI}.$$

Залишилося скористатися невід'ємністю при $t > 0$ елементів матриць $e^{t(A+cI)}$ та e^{-tcI}.