ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
Львів, 18–20 квітня 2018 року
I—II курси, 1-ий день

1. Нехай квадратна матриця A з дійсними елементами задовольняє рівняння
$$A^3 - A - I = 0.$$
Довести, що $\det A > 0$.

2. Нехай функція $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна і така, що виконуються умови
$$\int_0^x tf(t)\, dt = O(x^{3/2}), \quad f'(x) = O(x^{-1/2}) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$
Довести, що функція f обмежена.

3. Нехай $A \subset [0, +\infty)$ — деяка множина така, що
$$(\forall n)(\forall \{a_j\colon 1 \le j \le n\} \subset A) : \sum_{j=1}^{n} a_j \le 2018.$$
Довести, що множина A не більш, ніж зліченна, а у випадку, коли множина A нескінченна, то точка 0 — єдина її точка скупчення.

4. Чи існує неперервне на деякому інтервалі взаємно однозначне відображення, обернене до якого є розривним?

5. Довести, що якщо для $r \in \mathbb{R}$ і кожного $c > 0$ існують цілі числа m, n такі, що $\frac{m}{n} \ne r$ і виконується нерівність $\left|r - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n}$, то r — ірраціональне число.

6. Нехай $\frac{1}{2} < a_j < 1$ $(1 \le j \le n)$, $a_j \ge a_{j+1}$ $(1 \le j \le n-1)$,
$$f(x) := f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{k} x_j \prod_{j=k+1}^{n} (1 - x_j) + \prod_{j=1}^{k} (1 - x_j) \prod_{j=k+1}^{n} x_j.$$
Довести, що для довільної перестановки $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується нерівність
$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ge f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)}).$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 18–20 квітня 2018 року

III—Y курси, 1-ий день

1. У кожному рядку невиродженої матриці A розміру $n \times n$ є лише один відмінний від нуля елемент, який дорівнює 1 або -1. Доведіть, що існує таке натуральне число m, що $A^m = A^T$, A^T — матриця транспонована до заданої.

2. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, функція $F\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна і така, що $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)\colon xF'_x \geq yF'_y$, а криволінійний інтеграл $\int_{AB} F(x, y)(ydx + xdy)$ по кожній спрямній кривій, яка з'єднує довільні точки A, B залежить лише від цих точок, тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Довести, що існує неперервно диференційовна функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $F(x, y) = f(xy)$.

3. У просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$ лінійний оператор S діє за формулою $(Sf)(x) := \displaystyle\int_0^x e^{t-x} f(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R}_+$. Доведіть його неперервність і обчисліть норму.

4. Нехай l_∞ — лінійний простір всіх обмежених послідовностей дійсних чисел $x = (x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Навести приклад такої норми $\|\cdot\|$ на l_∞, що $(l_\infty, \|\cdot\|)$ — сепарабельний простір.

5. Скажемо, що множина $A \subset \mathbb{N}$ має нульову щільність, якщо $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sharp(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n} = 0$. Послідовність дійсних чисел назвемо збіжною за щільністю до x $\Big(\text{d-}\lim x_n = x\Big)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ множина $A_\varepsilon := \{n\colon |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ має нульову щільність. Довести, що для довільної обмеженої послідовності невід'ємних чисел (a_n)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \iff \text{d-}\lim a_n = 0.$$

6. Довести, що регулярний топологічний простір X є компактним тоді і лише тоді, коли довільне бієктивне неперервне відображення $f : X \to Y$ на гаусдорфів простір Y є гомеоморфізмом.

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 18–20 квітня 2018 року

I—II курси, 2-ий день

1. Нехай G — скінченна група, порядок якої не ділиться на 3 і така, що $(\forall a, b \in G)\colon (ab)^3 = a^3 b^3$. Довести, що група G абелева, тобто, така група, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$.

2. Нехай $b_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le n)$, $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \neq 0$, (a_k) — попарно різні додатні числа. Якщо функція $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin a_k x$ є періодичною, то $\{\frac{a_k}{a_j}\colon 1 \le k, j \le n\} \subset \mathbb{Q}$, тобто, $(\forall k, j)\colon \frac{a_k}{a_j}$ — раціональні числа. Довести.

3. Нехай натуральні числа $k \neq n$. Довести, нерівності:

$$\text{a)}\ \Big|\ln \frac{k}{n}\Big| \ge \frac{1}{\max\{k, n\}},$$

$$\text{b)}\ \Big|\ln \frac{k}{n}\Big| \ge \frac{1}{\max\{k, n\}} - \frac{1}{1 + \min\{k, n\}} + \ln\Big(1 + \frac{1}{\min\{k, n\}}\Big).$$

4. Нехай $C_0^{(2)}[a, b]$ — клас двічі диференційовних на відрізку $[a; b]$ функцій $y = f(x)$, $f(a) = f(b) = 0$ і $\sup\{|f''(x)|\colon a \le x \le b\} \le c$. Знайти значення

$$M := \sup\big\{\max\{|f(x)|\colon x \in [a; b]\}\colon f \in C_0^{(2)}[a, b]\big\}.$$

5. Чи існують функції $y = f(u)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $y = f(g(x))$ — неперервне на всій числовій прямій і для деяких a, b, c

$$\lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{u \to b} f(u) = c, \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) \neq c.$$

6. Задамо перетворення T простору $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ за формулою $T(t) = (\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_2+t_3}{2}, ..., \frac{t_n+t_1}{2})$ для кожного $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Нехай вектор $x \in \mathbb{R}^n$ має попарно різні цілочисельні координати. Доведіть, що у послідовності $x, Tx, T^2x, \ldots$ є вектор з нецілочисельною координатою.

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 18–20 квітня 2018 року

III—Y курси, 2-ий день

1. Нехай G — скінченна група, порядок якої не ділиться на 3 і така, що $(\forall a, b \in G)\colon (ab)^3 = a^3 b^3$. Довести, що група G абелева, тобто, така група, що $(\forall a, b \in G)\colon ab = ba$.

2. Нехай X — топологічний простір, $C(x)$ — об'єднання усіх лінійно зв'язних підмножин простору X, що містять точку x, а $\mathrm{Path}(X) := \{C(x) : x \in X\}$ — множина компонент лінійної зв'язності простору X, наділена найсильнішою топологією, у якій фактор-відображення $C(\cdot) : X \to \mathrm{Path}(X)$, $C(\cdot) : x \mapsto C(x)$, є неперервним. Чи існує компактний метризовний простір X, для якого простір $\mathrm{Path}(X)$ лінійно зв'язний і містить більше однієї точки? Нагадаємо, що підмножина Z топологічного простору X називається *лінійно зв'язною*, якщо для довільних точок $x, y \in Z$ існує неперервна функція $\gamma : [0,1] \to Z$ з $\gamma(0) = x$ і $\gamma(1) = y$.

3. У банаховому просторі X для замкненої опуклої множини A:

$$(\exists x \in A)\ (\forall y \in X)\ (\exists \varepsilon(y) > 0)\ (\forall \lambda \in [0, \varepsilon(y)]) : \quad x + \lambda y \in A.$$

Доведіть, що внутрішність $\mathrm{int} A \neq \varnothing$.

4. Нехай $(\mathbb{T}, \mathcal{A}, \mu)$ — простір з мірою, тобто, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин $\mathbb{T}$, μ — зліченно-адитивна міра. Для $\mathcal{A}$-вимірної функції $x = x(t)\colon T \to \mathbb{R}$ визначимо такі числа

$$\varphi(x) := \sup\left\{\frac{1}{\mu(E)} \int_E |x(t)| d\mu(t) : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) > 0\right\},$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |x(t)| = \inf\{C > 0\colon |x(t)| \le C \pmod{\mu} \text{ на } \mathbb{T}\}.$$

Довести, що $\varphi(x) < +\infty \iff \|x\|_\infty < +\infty$ та порівняйте ці числа.

5. Нехай $(\exists M \in \mathbb{R})$. Відшукати всі цілі функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такі, що $(\forall z \in \mathbb{C})\colon\ \mathrm{Re}(f(z)) \ge M$. Відповідь обгрунтувати.

6. Нехай $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $A - (a_{i,j})$ — матриця розміру $n \times n$, $x = x(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^n$ — розв'язок задачі Коші для системи $\dot{x} = Ax$ і початкової умови $x(0) = b \in \mathbb{R}_+^n$, де $\dot{x} = \frac{d}{dt} x(t)$. Довести, що

$$(\forall t > 0)(\forall b \in \mathbb{R}_+^n)\colon\ x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \iff \quad (\forall i \neq j)\colon\ a_{i,j} \ge 0.$$