**Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 28.02.2018**

## I–II курси

**1.** Скільки існує простих чисел вигляду $a^4+4$?

*Розв'язання.*

Оскільки

$$a^4+4=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)=((a-1)^2+1)((a+1)^2+1),$$

то існує лише **одне** просте число вигляду $a^4+4$ — "п'ять".

**2.** Нехай $M_n$ — простір дійснозначних матриць розміру $n\times n$, $\varphi\colon M_n\to M_n$ — лінійне відображення таке, що $det(A)=det(\varphi(A))$ для довільної матриці $A\in M_n$. Доведіть, що відображення $\varphi$ оборотне.

*Розв'язання.* Припустимо, що існує ненульова матриця $A$, для якої $\varphi(A)=\mathbf{0}$. Оскільки $det(A)=det(\varphi(A))=det(\mathbf{0})=0$, то матриця $A$ вироджена. Нехай $r=rang(A)$ — ранг матриці $A$. Тоді існує така матриця $B$, що $A+B$ — невироджена матриця і $rang(B)=n-r<n$. Отже, $det(\varphi(B))=det(B)=0$. Звідси маємо:

$$0=det(\varphi(B))=det(\varphi(B)+\varphi(A))=det(\varphi(B+A))=det(B+A)\neq 0$$

— суперечність. Отже, лінійний оператор на скінченновимірному просторі ін'єктивний, відтак оборотний.

**3.** [1] Побудувати графік функції $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/3)^n}$, $x\geq 0$.

*Відповідь*: $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1,\\ x, & 1<x\leq 3,\\ x^2/3, & x>3.\end{cases}$

**4.** [2] Що більше $\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dz$ чи $\dfrac{3\pi}{2}$?

*Розв'язання.* Оскільки $e^x$ — опукла функція,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{f(x)}\,dx\geq e^{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx}.$$

[1]В.А.Садовничий, А.С.Подколозин, Задачи студенческих олимпиад, М.: Наука, 1978; с.7.

[2]В.А.Садовничий, А.С.Подколозин, М.: Наука, 1978;

Звідси

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\, dx \ge \pi e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx} = \pi e^{\frac{1}{2}} > \frac{3\pi}{2}.$$

**5.** Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

з гладкими коефіцієнтами. Які умови на коефіцієнти $p$ і $q$ треба накласти, щоб рівняння мало таку фундаментальну систему розв'язків $\{u, v\}$, що $v(x) = u^2(x)$?

*Розв'язання.* Припустимо, що існує фундаментальна система розв'язків рівняння вигляду $\{u, u^2\}$. Звісно, що таке можливе, бо, наприклад, рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ має два лінійно незалежні розв'язки $e^x$ та $e^{2x}$. Визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & u^2(x) \\ u'(x) & 2u(x)u'(x) \end{vmatrix} = u^2(x)u'(x)$$

фундаментальної системи відмінний від нуля для усіх $x \in \mathbb{R}$. Тому як $u$, так і $u'$ не обертаються в нуль. З двох тотожностей

$$\begin{aligned} &u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &2u(x)u''(x) + 2u'^2(x) + 2p(x)u(x)u'(x) + q(x)u^2(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

легко отримати, що

$$2u'^2 = qu^2, \qquad uu'p = -uu'' - 2u'^2.$$

Тому $q > 0$, а також

$$\frac{u'}{u} = \pm\sqrt{\frac{q}{2}}.$$

Далі, диференціюючи рівність $u' = u\sqrt{\frac{q}{2}}$, матимемо

$$u'' = u'\sqrt{\frac{q}{2}} + \frac{uq'}{2\sqrt{2q}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = \sqrt{\frac{q}{2}} + \frac{q'}{2\sqrt{2q}}\frac{u}{u'} \quad \Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = \sqrt{\frac{q}{2}} + \frac{q'}{2q}.$$

А отже,

$$p = -\frac{u''}{u'} - 2\frac{u'}{u} = -\sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{q'}{2q} - 2\sqrt{\frac{q}{2}} = -3\sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{q'}{2q}.$$

У випадку $u' = -u\sqrt{\frac{q}{2}}$ подібні обчислення дають

$$p = 3\sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{q'}{2q}.$$

*Відповідь.* Рівняння має фундаментальноу систему розв'язків $\{u, u^2\}$, якщо $p = \pm 3\sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{q'}{2q}$.



**Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 28.02.2018**

## III–VI курси

**1.** $N$ студентів йдуть на вечірку. Кожна особа залишає кепку біля дверей. Залишаючи вечірку, кожен вибирає шапку випадковим чином.

(1) Яка ймовірність, що ніхто не візьме свою кепку?

(2) Яка границя ймовірності з п.(1) при $N \to \infty$?

(3) Яке математичне сподівання кількості студентів, що візьмуть кепку?

*Розв'язання.* (1) Занумеруємо студентів натуральними числами від 1 до $N$. Нехай подія $A_i$ полягає в тому, що $i$-й студент взяв свою кепку. Легко бачити, що $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Подібно $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N$. Нехай подія $B_N$ полягає в тому, що ніхто не візьме свою кепку, тобто $B_N = \bigcap_{i=1}^N \bar{A}_i$. За формулою включень-виключень

$$\mathbb{P}(B_N) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^N \bar{A}_i) = 1 - \sum_{i_1=1}^N \mathbb{P}(A_{i_1}) + \sum_{1\le i_1<i_2\le N} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - \ldots$$

$$+(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots +$$

$$+(-1)^N \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = 1 - C_N^1 \frac{(N-1)!}{N!} + C_N^2 \frac{(N-2)!}{N!} - \ldots$$

$$+(-1)^k C_N^k \frac{(N-k)!}{N!} + \cdots + (-1)^N \frac{1}{N!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^N \frac{1}{N!}.$$

(2) Переходячи до границі в останній рівності знаходимо за формулою Тейлора

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_N) = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}.$$

(3) Нехай $\chi_i$ — індикатор події $A_i$, тоді $\xi = \sum_{i=1}^N \chi_i$ — кількість студентів, які взяли свої кепки. Звідси

$$M\xi = \sum_{i=1}^{N} M\chi_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) = N\frac{1}{N} = 1.$$

**2.** Довести таке твердження. Для довільних множини $A \subset \mathbb{R}^n$, ненульового вектора $a \in \bar{A}$, де $\bar{A}$ — замикання множини $A$, і $\varepsilon > 0$ існують $a_1, \ldots, a_n \in A$ та дійсні числа $t_1, \ldots, t_n$ такі, що $a = \sum_{i=1}^n t_i a_i$ і

$$1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} t_i \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i| < 1 + \varepsilon.$$

*Розв'язання.* Доведемо твердження за індукцією. При $n = 1$ твердження елементарне.

Візьмемо довільне $n > 1$, $\varepsilon > 0$, множину $A \subset \mathbb{R}^n$ і ненульовий елемент $a \in \bar{A}$. Якщо $a \in A$, приймемо $a_1 = \cdots = a_n = a$ і зауважимо, що умова твердження індукції виконується для довільних дійсних чисел $t_1, \ldots, t_n$ з $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Отже, припустимо, що $a \notin A$. Виберемо додатне $\delta$ так, щоб

$$(1 + \delta) \cdot (1 + 2\delta) < 1 + \varepsilon \;\text{ і }\; (1 - \delta) - 2\delta(1 + \delta) > 1 - \varepsilon.$$

Оскільки $\frac{\langle a,a \rangle}{\|a\|^2} = 1$, за неперервністю функції $\frac{\langle a,x \rangle}{\|x\|^2}$ в околі $a$, існує точка $a_1 \in A$ така, що $1 - \varepsilon < \frac{\langle a,a_1 \rangle}{\|a_1\|^2} < 1 + \delta$.

Якщо $a = t_1 a_1$ для деякого $t_1 \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, то ми завершуємо доведення, приймаючи $a_2, \ldots, a_n = a_1$ і $t_2, \ldots, t_n = 0$. Отже, можемо припустити, що $a \neq t_1 a_1$ для всіх $t_1 \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Розглянемо окіл $O_a := \{x \in \mathbb{R}^n : 1 - \delta < \frac{\langle a,a_1 \rangle}{\langle x,a_1 \rangle} < 1 + \delta\}$ точки $a$.

Ототожнимо $\mathbb{R}^{n-1}$ з гіперплощиною $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a_1 \rangle = 0\}$ ортогональною до вектора $a_1$. Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що $a_1 + H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a_1 \rangle = \|a_1\|^2\}$ — гіперплощина, паралелна до $H$, яка проходить через $a_1$.

Нехай $p : \mathbb{R}^n \setminus H \to a_1 + H$, $p : x \mapsto \frac{\|a_1\|^2}{\langle x,a_1 \rangle} x$ — центральна проекція на $a_1 + H$.

Розглянемо множину $B = p(A \cap O_a) - a_1 \subset H = \mathbb{R}^{n-1}$ і точку $b = p(a) - a_1 \in \bar{B}$. Покажемо, що $b \neq 0$. Припускаючи, що $b = 0$, робимо висновок, що $\frac{\|a_1\|^2}{\langle a,a_1\rangle}a = p(a) = a_1$, відтак $a = \frac{\langle a,a_1\rangle}{\|a_1\|^2}a_1$, де $1-\varepsilon < \frac{\langle a,a_1\rangle}{\|a_1\|^2} < 1+\delta < 1+\varepsilon$. Суперечність.

За припущенням індукції, існують точки $b_2,\dots,b_n \in B$ і дійсні числа $\lambda_2,\dots,\lambda_n$ такі, що $b = \sum_{i=2}^n \lambda_i b_i$ і

$$1-\delta < \sum_{i=2}^n \lambda_i \le \sum_{i=2}^n |\lambda_i| < 1+\delta.$$

Для довільних $i \in \{2,\dots,n\}$, знайдемо $a_i \in A$ з $b_i + a_1 = p(a_i) = \frac{\|a_1\|^2}{\langle a_i,a_1\rangle}a_i$. Тоді

$$\frac{\|a_1\|^2}{\langle a,a_1\rangle}a = p(a) = a_1 + b = a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i b_i =$$

$$= a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i(-a_1 + \frac{\|a_1\|^2}{\langle a_i,a_1\rangle}a_i) = \Big(1-\sum_{i=2}^n \lambda_i\Big)a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \frac{\|a_1\|^2}{\langle a_i,a_1\rangle}a_i$$

і

$$a = \frac{\langle a,a_1\rangle}{\|a_1\|^2}\Big(1-\sum_{i=2}^n \lambda_i\Big)a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \frac{\langle a,a_1\rangle}{\langle a_i,a_1\rangle}a_i = \sum_{i=1}^n t_i a_i,$$

де

$$t_1 = \frac{\langle a,a_1\rangle}{\|a_1\|^2}\Big(1-\sum_{i=2}^n \lambda_i\Big) \text{ і } t_i = \lambda_i \frac{\langle a,a_1\rangle}{\langle a_i,a_1\rangle}$$

для $i \in \{2,\dots,n\}$.

Зазначимо, що $|t_1| < (1+\delta)\cdot\delta$ і

$$\Big|\sum_{i=2}^n t_i - \lambda_i\Big| \le \sum_{i=2}^n |t_i-\lambda_i| = \sum_{i=2}^n |\lambda_i|\cdot|1-\tfrac{\langle a,a_1\rangle}{\langle a_i,a_1\rangle}| < \sum_{i=2}^n |\lambda_i|\cdot\delta < (1+\delta)\cdot\delta.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^n |t_i| = |t_1| + \sum_{i=2}^n |t_i| < (1+\delta)\cdot\delta + \sum_{i=2}^n |\lambda_i| + \sum_{i=2}^n (|t_i|-|\lambda_i|) <$$

$$< (1+\delta)\cdot\delta + (1+\delta) + \sum_{i=2}^n |t_i-\lambda_i| < (1+\delta)\cdot\delta + (1+\delta) + (1+\delta)\cdot\delta =$$

$$= (1+\delta)\cdot(1+2\delta) < 1+\varepsilon.$$

і

$$\sum_{i=1}^{n} t_i > -|t_1| + \sum_{i=2}^{n} t_i > -(1+\delta)\cdot\delta + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i + \sum_{i=2}^{n}(t_i-\lambda_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i=2}^{n}\lambda_i - (1+\delta)\cdot\delta - \sum_{i=2}^{n}|t_i-\lambda_i| > 1-\delta-(1+\delta)\cdot\delta-(1+\delta)\cdot\delta > 1-\varepsilon.$$

**3.** Послідовність додатних чисел $(x_n)$ зростає і обмежена зверху. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\Big).$$

*Розв'язання.* Оскільки $x_n \uparrow a > 0$ $(n\to\infty)$, то $x_{n+1}-x_n \to 0$ і $x_{n+1} \sim x_n$ $(n\to\infty)$. Звідси

$$1-\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \sim \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} \sim \ln\frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad n\to\infty.$$

Але $\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_{k+1}}{x_k} = \ln\frac{x_{n+1}}{x_1} \to \ln\frac{a}{x_1}$ $(n\to\infty)$. Отже, за ознакою порівняння збіжний і вихідний ряд.

**4.** Дано невід'ємну вимірну функцію $f\colon [1,+\infty)\to[0,+\infty)$ таку, що $\int_1^\infty f d\lambda < +\infty$, де $\lambda$ позначає міру Лебега на $[1,+\infty)$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^\infty f(nx)$ збігається для майже всіх $x\in[1,+\infty)$ відносно міри $\lambda$.

*Розв'язання.*[3] Нехай $\mu$ — така міра на $\mathbb{N}$, що кожне натуральне число має міру 1. Візьмемо довільні $b > a \geq 1$. Використовуючи заміни змінних та теорему Фубіні, маємо

$$\int_{[a,b]}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)\Big)d\lambda(x) = \int_{[a,b]}\int_{\mathbb{N}} f(nx)d\mu(n)d\lambda(x) =$$

$$\int_{[a,b]}\int_{\mathbb{N}} f(nx)d\lambda(x)d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(x)d\lambda(x) =$$

$$= \int_a^\infty \sum_{n:na\leq x\leq nb}\frac{1}{n}f(x)d\lambda(x) \leq \frac{b}{a}\int_1^\infty f(x)d\lambda(x) < +\infty.$$

Тут використано, що в сумі $\sum_{n:na\leq x\leq nb}\frac{1}{n}$ не більше ніж $\frac{x}{a}$ доданків, кожен з яких не перевищує $\frac{b}{x}$. Із теореми Фубіні випливає потрібне твердження.

[3] Задача №17, 2000, студентських олімпіад мех.-мату КНУ ім. Шевченка.

**5.** Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

з гладкими коефіцієнтами. Які умови на коефіцієнти $p$ і $q$ треба накласти, щоб рівняння мало таку фундаментальну систему розв'язків $\{u, v\}$, що $v(x) = u^2(x)$?

*Розв'язання.* Див. задачу 5 молодших курсів.