Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 28.02.2018

I–II курси

1. Скільки існує простих чисел вигляду a^4+4?

2. Нехай M_n — простір дійснозначних матриць розміру $n\times n$, $\varphi\colon M_n\to M_n$ — лінійне відображення таке, що $det(A)=det(\varphi(A))$ для довільної матриці $A\in M_n$. Доведіть, що відображення φ оборотне.

3. Побудувати графік функції $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/3)^n}$, $x\geq 0$.

4. Що більше $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx$ чи $\dfrac{3\pi}{2}$?

5. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad x\in\mathbb{R},$$

з гладкими коефіцієнтами. Які умови на коефіцієнти p і q треба накласти, щоб рівняння мало таку фундаментальну систему розв'язків $\{u,v\}$, яка задовольняє тотожність $v(x)=u^2(x)$?

Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 28.02.2018

III–VI курси

1. N студентів йдуть на вечірку. Кожна особа залишає кепку біля дверей. Залишаючи вечірку, кожен вибирає кепку випадковим чином.

(1) Яка ймовірність, що ніхто не візьме свою кепку?

(2) Яка границя ймовірності з п.(1) при $N \to \infty$?

(3) Яке математичне сподівання кількості студентів, що візьмуть свою кепку?

2. Довести таке твердження. Для довільних множини $A \subset \mathbb{R}^n$, ненульового вектора $a \in \overline{A} \subset \mathbb{R}^n$, де $\overline{A}$ — замикання множини A, і $\varepsilon > 0$ існують такі $a_1, \dots a_n \in A$ та дійсні числа $t_1, \dots, t_n$ що $a = \sum_{i=1}^n t_i a_i$

$$1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^n t_i \le \sum_{i=1}^n |t_i| < 1 + \varepsilon.$$

3. Послідовність додатних чисел (x_n) зростає і обмежена зверху. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\Big).$$

4. Дано невід'ємну вимірну функцію $f\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ таку, що $\int_1^\infty f d\lambda < +\infty$, де λ позначає міру Лебега на $[1, +\infty)$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^\infty f(nx)$ збігається для майже всіх $x \in [1, +\infty)$ відносно міри λ.

5. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

з гладкими коефіцієнтами. Які умови на коефіцієнти p і q треба накласти, щоб рівняння мало таку фундаментальну систему розв'язків $\{u, v\}$, яка задовольняє тотожність $v(x) = u^2(x)$?