

Б. В. ЗАБАВСЬКИЙ, О. М. РОМАНІВ

## НЕКОМУТАТИВНІ ОБЛАСТІ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

*Досліджуються максимально неголовні ідеали некомутативних областей Безу. Описано новий клас некомутативних областей з елементарною редукцією матриць.*

В найбільш загальній формі задача про повне описання як комутативних, так і некомутативних кілець, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального виду елементарними перетвореннями, поставлена в роботі [5]. В даній статті отримано опис одного класу некомутативних областей з елементарною редукцією матриць.

Позначимо через  $M_n(R)$  кільце квадратних матриць порядку  $n$  з елементами кільця  $R$ , а через  $U(R)$  — групу зворотніх елементів кільця  $R$ . Наведемо необхідні означення.

**Означення 1.** Під *елементарною матрицею* [3] з елементами кільця  $R$  розумімо квадратну матрицю одного з трьох наступних типів:

- 1) діагональна матриця зі зворотніми елементами на головній діагоналі;
- 2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
- 3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

**Означення 2.** Матриці  $A$  і  $B$  з елементами кільця  $R$  є *елементарно сківіалентними* (в позначеннях  $A \sim B$ ), якщо існують такі елементарні над  $R$  матриці  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ , відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \dots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \dots \cdot Q_s = B.$$

**Означення 3.** Кільце  $R$  називається кільцем з *елементарною редукцією матриць*, якщо допільна матриця  $A \in M_n(R)$  володіє *елементарною редукцією*, тобто якщо  $A$  елементарно сківіалентна діагональній матриці

$$\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де  $\varepsilon_i R \cap R \varepsilon_i \supseteq R \varepsilon_{i+1} R$ ,  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ , (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нули) [5].

Від *кільця елементарних дільників* [4] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що в його означенні матриці  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$  є не лише зворотніми, а й елементарними. Зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце  $\mathbb{P}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$  [2, 5].

Наступні означення будуть сформульовані для правого одностороннього випадку, хоча зрозуміло, що всіх їх можна симетрично переформулювати і для лівого випадку.

**Означення 4.** Кільце  $R$  називається *правим кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений правий ідеал є головним, тобто, для будь-яких  $a, b \in R$  існує таке  $d \in R$ , що  $aR + bR = dR$ .

**Означення 5.** Під скінченим правим ланцюгом подільності для довільних елементів  $a, b \in R$ ,  $b \neq 0$ , розуміємо послідовність рівностей:  $a = bq_1 + r_1$ ,  $b = r_1 q_2 + r_2$ , ...,  $r_{k-1} = r_k q_k + r_{k+1}$ , де  $r_{k+1} = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Означення 6.** Правий ідеал кільця  $R$ , який є максимальним в множині неголовних правих ідеалів, називають **максимально неголовним правим ідеалом** [1].

**Теорема 1.** Нехай  $R$  — область Безу і  $\mathcal{M}$  — довільний максимально неголовний правий ідеал. Тоді, для довільних  $a, b \in R$ , із умови  $a \in \mathcal{M}$ ,  $b \notin \mathcal{M}$  слідує, що  $a + b \notin \mathcal{M}$ .

**Доведення.** Нехай кільце  $R$  — область Безу,  $\mathcal{M}$  — довільний максимально неголовний правий ідеал області  $R$ . Розглянемо довільні елементи  $a, b \in R$  такі, що  $a \in \mathcal{M}$ ,  $b \notin \mathcal{M}$ .

Припустимо, що  $a + b \in \mathcal{M}$ , тобто існує елемент  $m \in \mathcal{M}$  такий, що  $a + b = m \in \mathcal{M}$ . Тоді

$$b = m - a. \quad (1)$$

Оскільки елементи  $a$  і  $m \in \mathcal{M}$ , то і елемент  $m - a \in \mathcal{M}$ . Звідси, враховуючи рівність (1), отримуємо, що і елемент  $b \in \mathcal{M}$ . А це суперечить умові теореми.

Отже, наше припущення невірне, тобто

$$a + b \notin \mathcal{M}$$

для довільних  $a \in \mathcal{M}$ ,  $b \notin \mathcal{M}$ . Теорему доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $R$  — область Безу, в якій виконуються наступні умови:

- 1) максимально неголовний правий ідеал єдиним і двобічним;
  - 2) для будь-якого елемента  $a \in R$  існує такий елемент  $a^* \in R$ , що  $RaR = a^*R = Ra^*$ ;
  - 3) для довільних двох елементів, що не належать максимально неголовному правому ідеалу, існує скінчений лівий і правий ланцюг подільності.
- Тоді  $R$  є кільцем з елементарною редукцією матриць.

**Доведення.** Розглянемо матрицю вигляду

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R),$$

де  $RaR + RbR + RcR + RdR \neq R$ . Можливі наступні випадки:

- 1) хоча б один елемент матриці  $A$  не належить максимально неголовному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ ;
- 2) всі елементи матриці  $A$  належать максимально неголовному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ .

Розглянемо кожен випадок почергово.

**Випадок 1.** Нехай, з точністю до елементарної еквівалентності матриць, елемент  $a$  матриці  $A$  не належить максимально неголовному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ . Якщо елемент  $b$  належить максимально неголовному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ , то, додавши до другого стовпчика перший, на місці елемента  $b$  ми отримаємо елемент  $a + b$ , який, за теоремою 1, не належить максимально неголовному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ . Тому припустимо, що елемент  $b \notin \mathcal{M}$ . Тоді, в силу умов, накладених на область  $R$ , для елементів  $a$  і  $b$  існує скінчений ланцюг подільності

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \dots, \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,$$

причому, за теоремою 1, елемент  $r_1$  не належить максимально неголовиному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ . Так само, елементи  $r_2, r_3, \dots, r_k \notin \mathcal{M}$ . Таким чином, маємо:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 & b \\ * & * \end{pmatrix}, \text{ тобто } A \sim \begin{pmatrix} r_1 & b \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & b \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ * & * \end{pmatrix}, \text{ тобто } A \sim \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ * & * \end{pmatrix},$$

і т.д. За скінченне число кроків ми отримаємо

$$A \sim \begin{pmatrix} r_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Отже, в даному випадку для доведення теореми достатньо розглянути трикутні матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де елемент  $a$  не належить максимально неголовиному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ .

Позначимо через  $X$  множину всіх дільників  $x$  елемента  $a$  таких, що  $(x, 0)$  є першим рядком матриць, елементарно еквівалентних до матриці  $A$ . Зрозуміло, що жоден з елементів множини  $X$  не належить максимально неголовиному правому ідеалу  $\mathcal{M}$ , оскільки елемент  $x$  є дільником (лівим або правим або двобічним) елемента  $a$ .

Нехай елемент  $a_1 \in X$  є мінімальним стосовно правової подільності, тобто, якщо  $a_1 = p_2 a_2 q_2$  для деякого елемента  $a_2 \in X$ , то елемент  $q_2 \in U(R)$ . Покажемо, що такий елемент  $a_1$  існує. Маємо:

$$a_1 = p_2 a_2 q_2 = p_2 p_3 a_3 q_3 q_2 = \dots$$

$$a_1 R \subset p_2 a_2 R \subset p_2 p_3 a_3 R \subset \dots \quad (2)$$

Елемент  $a_1 \notin \mathcal{M}$ , тому ідеал  $\bigcup_{i=2}^{\infty} p_i a_i R$  є головним ідеалом, тобто, існує такий елемент  $y \in R$ , що

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} p_i a_i R = yR.$$

Оскільки  $y \in p_i a_i R$ , то  $yR = p_i a_i R$ , тобто, ланцюг (2) обривається на скінченному кроці. Таким чином,

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix},$$

де елемент  $a_1 \notin \mathcal{M}$ .

Припустимо, як вище, що елемент  $b_1$  також не належить максимально неголовиному правому ідеалу  $\mathcal{M}$  (якщо  $b_1 \in \mathcal{M}$ , то, додавши до другого рядка перший, на місці елемента  $b_1$  отримаємо елемент  $a_1 + b_1$ , який, за теоремою 1, не належить  $\mathcal{M}$ ).

За умовою теореми, для елементів  $a_1$  і  $b_1$  існує скінчений ланцюг подільності, тому

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

де  $a_1 = p a_2$ ,  $p \in R$  і елементи  $a_2, b_2 \notin \mathcal{M}$ .

Аналогічно, маємо

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \underset{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

де  $a_2R + b_2R = a_3R$  і  $a_2 = a_3q$  для деякого  $q \in R$ . Тоді  $a_1 = pa_3q$ . Згідно мінімальності елемента  $a_1$ , елемент  $q \in U(R)$  і тому  $b_2 \in a_2R$ , тобто  $b_2 = a_2z$  для деякого  $z \in R$ .

Таким чином, маємо

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Нехай  $t$  — довільний елемент області  $R$ . Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & tc_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Якщо елемент  $tc_2 \notin M$ , то за умовою теореми, для елементів  $a_2$  і  $tc_2$  існує скінчений ланцюг подільності, і ми отримуємо

$$\begin{pmatrix} a_2 & tc_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \underset{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ b_4 & c_4 \end{pmatrix},$$

де  $a_2R + tc_2R = a_4R$ . Звідси випливає, що  $a_2 = a_4q_4$  і  $a_1 = pa_4q_4$ . Згідно мінімальності елемента  $a_1$ , елемент  $q_4 \in U(R)$  і тому елемент  $tc_2 \in a_2R$ .

Якщо ж елемент  $tc_2 \in M$ , то, в силу теореми 1, елемент  $a_2 + tc_2 \notin M$ , і ми отримуємо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & tc_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + tc_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки елементи  $a_2$  і  $a_2 + tc_2$  не належать максимально неголовному правому ідеалу  $M$ , то для них існує скінчений ланцюг подільності. Тому

$$\begin{pmatrix} a_2 & tc_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \underset{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} a_5 & 0 \\ b_5 & c_5 \end{pmatrix},$$

де  $a_2R + (a_2 + tc_2)R = a_5R$ . Тоді  $a_2 = a_5q_5$  і

$$a_1 = pa_5q_5.$$

З мінімальності елемента  $a_1$  випливає, що елемент  $q_5 \in U(R)$ , і тому  $a_2 + tc_2 \in a_2R$ , тобто  $tc_2 \in a_2R$ .

Отже, для довільного елемента  $t$  справедливе співвідношення

$$tc_2 \in a_2R.$$

Звідси випливає, що

$$Rc_2 \subseteq a_2R.$$

Таким чином, ми отримуємо

$$c_2R \subseteq Rc_2R \subseteq a_2R.$$

Звідси випливає, що елемент  $a_2$  є повним правим дільником елемента  $c_2$ .

*Випадок 2.* Нехай всі елементи матриці  $A$  належить максимально неголовному правому ідеалу  $M$ .

В силу умов, накладених на область  $R$ , існує такий елемент  $f \in R$ , що

$$RaR + RbR + RcR + RdR = fR = Rf.$$

Тоді існують такі елементи  $a_0, b_0, c_0, d_0 \in R$ , що

$$a = fa_0, \quad b = fb_0, \quad c = fc_0, \quad d = fd_0.$$

Звідси випливає, що матрицю  $A$  ми можемо розписати як добуток двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix},$$

причому  $Ra_0R + Rb_0R + Rc_0R + Rd_0R = R$ , так як  $R$  — область.

Елемент  $f$  є дуо-елементом. Тому, в даному випадку, замість початкової матриці  $A$  достатньо розглянути матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix},$$

де  $Ra_0R + Rb_0R + Rc_0R + Rd_0R = R$ .

Але, якщо виконується рівність

$$Ra_0R + Rb_0R + Rc_0R + Rd_0R = R,$$

то хоча б один із елементів  $a_0, b_0, c_0, d_0$  не належить максимально неголовному правому ідеалу  $M$ . Таким чином, випадок 2 зводиться до випадку 1.

Отже, кільце  $R$  є кільцем з елементарною редукцією матриць.

1. Забавский Б. В. О некоммутативных кольцах элементарных делителей // Укр. мат. журн. – 1987. – т. 39. – № 4. – С. 440–444.
2. Bougaud B. Anneaux Quasi-Euclidiens: These de docteur troisieme cycle, 1976. – 67 р.
3. Cohn P. On the structure of the  $GL_2$  of a ring // I. H. E. S. – 1966. – 30. – P. 365–413.
4. Kaplansky I. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – 66. – P. 464 – 491.
5. Zabavsky B. Ring with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). – 1996. – P. 14.

## НЕКОММУТАТИВНЫЕ ОБЛАСТИ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ РЕДУКЦИЕЙ МАТРИЦ

Исследуются максимально неглавные идеалы некоммутативных областей Безу. Описаны новые классы некоммутативных областей с элементарной редукцией матриц.

## NONCOMMUTATIVE DOMAINS WITH ELEMENTARY REDUCTION OF MATRICES

The maximal nonprincipal ideals of noncommutative Bezout domains are investigated. The new classes of noncommutative domains with elementary reduction of matrices are described.

Львівський державний  
університет ім. І. Франка

Отримано  
08.09.98