

УДК 512.552.12

**КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ  
МАТРИЦЬ І КВАЗІЕВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ**

О.М. РОМАНІВ

**Romaniv O. M. Rings with elementary reduction of matrices and quasi-Euclidean rings** We establish necessary and sufficient conditions under which a quasi-Euclidean ring is a ring with elementary reduction of matrices. It is proved that a semilocal Bezout ring is a ring with elementary reduction of matrices. We give a criterion for existing a solution of one matrix equation of a special type and find all such solutions.

**§ 1. Основні означення та домовленості**

Під кільцем  $R$  у даній праці розумімо комутативне кільце з відмінною від нуля одиницею, а під  $\mathcal{U}(R)$  — групу зворотних елементів цього кільця. Позначимо через  $(a, b)$  найбільший спільний дільник елементів  $a$  і  $b$  кільця  $R$ . Множину всіх максимальних ідеалів кільця  $R$ , які містять елемент  $a$ , позначатимемо  $\text{mres}(a)$ , а радикал Джекобсона —  $\mathcal{J}(R)$ . Відзначимо, що термін *напівлокальність* не іmplікує жодних ланцюгових умов. Кільце квадратних матриць порядку  $n$  з елементами кільця  $R$  позначимо через  $R_n$ , а *слід* і *визначник* матриці  $A \in R_n$  — через  $\text{tr } A$  і  $\det A$  відповідно.

**Означення 1.** Під *елементарною матрицею* з елементами кільця  $R$  розумімо квадратну матрицю одного з трьох типів [1]:

- 1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
- 2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
- 3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

**Означення 2.** Групою *елементарних матриць*  $\text{GE}_n(R)$  назовемо групу, породжену елементарними матрицями порядку  $n$  другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю). Через  $\text{SL}_n(R)$  позначимо *спеціальну лінійну групу*, тобто групу матриць порядку  $n$ , визначник яких дорівнює одиниці.

**Означення 3.** Говоритимемо, що матриці  $A$  і  $B$  з елементами кільця  $R$  є *елементарно еквівалентними* (у позначеннях  $A \sim B$ ), якщо існують такі елементарні над  $R$  матриці  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$  відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \dots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \dots \cdot Q_s = B.$$

**Означення 4.** Матриця  $A$  володіє *елементарною редукцією*, якщо вона елементарно еквівалентна канонічній діагональній матриці

$$\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де  $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R$ ,  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ , (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі).

**Означення 5.** Кільце  $R$  називається *кільцем з елементарною редукцією матриць*, якщо довільна матриця над ним володіє елементарною редукцією [2].

Поняття кільця з елементарною редукцією матриць було введено Б.В. Забавським і ним же була сформульована задача повного описання таких кілець [2].

Від *кільця елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що в його означенні матриці  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$  є елементарними. Тому зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце  $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$  [1,4], яке, зокрема, є кільцем головних ідеалів, але не є квазіевклідовим.

**Означення 6.** Кільце  $R$  називається *елементарно головним* [4], якщо для довільних  $a, b \in R$  існують  $c \in R$  і матриця  $M \in \text{GE}_2(R)$  такі, що  $(a, b)M = (c, 0)$ .

**Означення 7.** Якщо для довільних елементів  $a, b \in R$  існують  $c \in R$  і зворотна матриця  $M \in R_2$  такі, що  $(a, b)M = (c, 0)$ , то кільце  $R$  називається *правим кільцем Ерміта*. Аналогічно визначається *ліве кільце Ерміта*. У комутативному випадку ці класи кілець збігаються [3].

**Критерій ермітовості** (див. [5, теор. 3]). Комутативне кільце  $R$  є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли для довільних  $a, b \in R$  існують такі  $a_0, b_0, d \in R$ , що  $a = a_0d$ ,  $b = b_0d$  і  $(a_0, b_0) = 1$ .

**Означення 8.** Кільце  $R$  називається *кільцем Безу* [3], якщо будь-який скінченнопорожджений ідеал є головним, тобто для довільних елементів  $a, b \in R$  існує таке  $d \in R$ , що  $aR + bR = dR$ .

Очевидно, Ермітове кільце є кільцем Безу [3].

## §2. Квазіевклідові кільця

**Означення 9.** Під *квазі-алгоритмом* [4], заданим на кільці  $R$ , розуміємо таку функцію  $\varphi: R \times R \rightarrow W$  ( $W$  — деякий ординал), що для довільних  $a, b \in R$  ( $b \neq 0$ ) існують такі  $q, r \in R$ , для яких виконуються умови  $a = bq + r$  і  $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$ .

**Означення 10.** Кільце  $R$  називають *квазіевклідовим* [4], якщо існує деякий ординал  $W$  і квазі-алгоритм  $R \times R \rightarrow W$ .

Прикладами квазіевклідових кілець є евклідові кільця, кільця нормування, регулярні кільця [4].

Нагадаємо деякі необхідні факти.

**Теорема 1** (див. [4 теор.8]). *Клас квазіевклідових кілець збігається з класом елементарно головних кілець.*

**Теорема 2** (див. [4, теор.17]). *Нехай  $R$  — кільце і для довільного  $x \in R$  анулятор  $\text{Ann}(x)$  породжується ідемпотентом. Тоді такі твердження еквівалентні:*

- (i)  $R$  є квазіевклідовим;

(ii)  $R$  є кільце Безу і  $\text{GE}_n(R) = \text{SL}_n(R)$  для довільного натурального  $n \geq 2$ .

*Зауваження.* Нехай  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R_2$ , де  $R$  — квазіевклідове кільце. На підставі теореми 1, кільце  $R$  є елементарно головним. Тому для елементів  $x, y \in R$  існують такі  $a \in R$  і елементарна матриця  $M \in \text{GE}_2(R)$ , що  $(x, y)M = (a, 0)$ . Тоді

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Отже, над квазіевклідовим кільцем при зведенні матриць другого порядку до діагонального вигляду досить обмежитися трикутними матрицями вигляду  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  або  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .

Доведемо деякі допоміжні твердження.

**Твердження 1.** *Квазіевклідове кільце є кільцем Ерміта.*

*Доведення.* Достатньо зауважити, що квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), а елементарно головне кільце є кільцем Ерміта (це випливає з означень 6 і 7).

**Лема 1.** *Довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем  $R$  є скінченним добутком елементарних матриць.*

*Доведення.* Спочатку доведемо, що довільну зворотну матрицю другого порядку над квазіевклідовим кільцем за допомогою елементарних перетворень можна звести до діагонального вигляду.

Нехай  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  — зворотна над  $R$  матриця. Тоді  $(a, b) = 1$  і, оскільки квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), то існує така матриця  $Q \in \text{GE}_2(R)$ , що  $(a, b)Q = (1, 0)$ . Тому

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P \in \text{GE}_2(R)$ . Тоді

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Отже, якщо  $A$  — довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем  $R$ , то існують такі матриці  $P, Q$  (які є скінченними добутками елементарних матриць), що

$$P \cdot A \cdot Q = F, \tag{1}$$

де  $F$  — діагональна матриця. Очевидно, матриця  $F$  є зворотною матрицею. Оскільки визначник матриці  $F$  дорівнює добутку діагональних елементів, то звідси випливає, що всі ці діагональні елементи є зворотними. Отже,  $F$  є елементарною матрицею першого типу.

З рівності (1) перейдемо до рівності  $A = P^{-1} \cdot F \cdot Q^{-1}$ , з якої випливає, що довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць.

**Твердження 2.** Квазіевклідове кільце  $R$  є кільцем з елементарною редукцією матриць, коли кожна матриця вигляду  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ , де  $aR + bR + cR = R$ , володіє елементарною редукцією.

Доведення. Необхідність очевидна.

Для доведення достатності припустимо, що  $aR + bR + cR = dR$  і  $d \notin \mathcal{U}(R)$ . На підставі твердження 1 і критерію ермітовості, існують такі елементи  $a_0, b_0, c_0 \in R$ , що  $a = a_0d$ ,  $b = b_0d$ ,  $c = c_0d$  і  $a_0R + b_0R + c_0R = R$ . Тому

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix},$$

де матриця  $\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}$  володіє елементарною редукцією. Зважаючи на належність  $\text{diag}(d, d)$  до центру  $R_2$ , тепер легко бачити, що матриця вигляду  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  також володіє елементарною редукцією.

Індукція за розмірами матриць завершує доведення.

**Теорема 3.** Нехай  $R$  — квазіевклідова область, в якій множина максимальних ідеалів є незліченою, а довільний ненульовий елемент міститься в не більше, ніж зліченній множині максимальних ідеалів. Тоді  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Згідно з твердженням 2, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де  $aR + bR + cR = R$ .

Якщо  $a \in \mathcal{U}(R)$ , то

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \stackrel{e}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця  $A$  володіє елементарною редукцією. Нехай  $a \notin \mathcal{U}(R)$ , тобто множина максимальних ідеалів, які містять  $a$ , непорожня. Покладемо

$$\text{mspec}(a) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n, \dots\}.$$

Тоді, не обмежуючи загальності, можна вважати, що  $b \notin \mathcal{M}_1$ . Справді, якщо  $b \in \mathcal{M}_1$ , то  $(b+c) \notin \mathcal{M}_1$ , оскільки  $aR + bR + cR = R$  і елементарними перетвореннями стовпців елемент  $b$  можна замінити елементом  $(b+c)$ . Кільце  $R$  — елементарно головне (теорема 1). Тому існує така елементарна матриця  $P_1$ , що

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де  $aR + bR = a_1R$ .

Якщо  $a_1 \in \mathcal{U}(R)$ , то матриця  $P_1 A$  володіє елементарною редукцією. Нехай  $a_1 \notin \mathcal{U}(R)$  і, як і вище, вважатимемо, що  $a_1 \in \mathcal{M}_2$ . Тоді  $b_1 \notin \mathcal{M}_2$ , бо у протилежному випадку

$(b_1 + c_1) \notin \mathcal{M}_2$ . Оскільки кільце  $R$  є елементарно головним, то існує така елементарна матриця  $Q_1$ , що  $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ , де  $a_1 R + b_1 R = a_2 R$ .

Продовжуючи побудову, отримаємо сукупність матриць вигляду

$$P_k A Q_k = \begin{pmatrix} a_i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

яким відповідає такий ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1 R \subset a_2 R \subset \dots \subset a_i R \subset \dots, \quad (2)$$

причому  $a_i \notin \mathcal{M}_i$ .

Позначимо  $\mathcal{I} = \bigcup_i a_i R$ . Припустимо, що  $\mathcal{I} \neq R$ . Тоді існує такий максимальний ідеал  $\mathcal{M}$ , що  $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ . Оскільки  $aR \subset \mathcal{I}$ , то  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$ , де  $\mathcal{M}_s \in \text{mspec}(a)$ . Це неможливо, бо існує такий ідеал  $a_s R$  з ланцюга (2), що  $a_s \notin \mathcal{M}_s$ . Тому,  $\mathcal{I} = R$ , тобто ланцюг (2) скінчений. Отже, існують такі матриці  $P_n, Q_n$ , які є скінченими добутками елементарних матриць, що  $P_n A Q_n$  є канонічною діагональною матрицею.

Зауважимо, що в доведенні теореми 3 використані ідеї праці [11].

З теореми 3 очевидним чином випливають такі наслідки.

**Наслідок 1.** Напівлокальне квазіевклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.

**Наслідок 2.** Квазіевклідове кільце, в якому множина максимальних ідеалів є не більш, ніж зліченна, є кільцем з елементарною редукцією матриць.

**Теорема 4.** Напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай  $R$  — напівлокальне кільце Безу і елементи  $a, b \in R$  такі, що  $aR + bR = R$ . Тоді

$$\text{mspec}(a) \cap \text{mspec}(b) = \emptyset. \quad (3)$$

Позначимо через  $r$  елемент кільця  $R$ , який належить усім максимальним ідеалам кільця  $R$ , крім максимальних ідеалів множини  $\text{mspec}(a)$  (такий елемент  $r$  існує, оскільки кільце  $R$  напівлокальне). Очевидно,

$$\text{mspec}(r) \cap \text{mspec}(a) = \emptyset. \quad (4)$$

Розглянемо елемент  $a + br \in R$ . Припустимо, що  $a + br \in \mathcal{M}$ , де  $\mathcal{M}$  — максимальний ідеал кільця  $R$ .

Можливі такі випадки:

- 1)  $a \in \mathcal{M}$  і  $b \in \mathcal{M}$  — суперечить умові (3);
- 2)  $a \in \mathcal{M}$  і  $r \in \mathcal{M}$  — суперечить умові (4).

Отже, наше припущення невірне. Тому  $a + br = u \in \mathcal{U}(R)$  і

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \stackrel{\epsilon}{\sim} (u, 0).$$

Як бачимо, кільце  $R$  є елементарно головним, а на підставі теореми 1, воно квазіевклідове. Тоді за наслідком 1 отримуємо, що напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Далі розглянемо кільце Ерміта  $R$ , яке задовольняє таку умову.

**Умова 1.** Нехай для  $a, b \in R$  ( $a \notin \mathcal{J}(R)$ ) існує таке  $m \in R$ , що  $(b, m) = 1$  і для кожного  $n \in R$  такого, що  $(n, a) \neq 1$  і  $(n, b) = 1$ , маємо:  $(n, m) \neq 1$ .

У [7, теор.2.6] доведено, що довільне кільце Ерміта  $R$ , елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників. Використаємо цей факт для доведення теореми, у формулюванні якої умову 1 дещо перефразуємо.

**Теорема 5.** Нехай  $R$  — кільце Ерміта і для будь-яких  $a, b \in R$  ( $b \neq 0$ ) існує таке  $s \in R$ , що  $\text{mspec}(s) = \text{mspec}(a) \setminus \text{mspec}(b)$ . Тоді  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай елементи  $a, b \in R$  такі, що  $aR + bR = R$ . Очевидно,

$$\text{mspec}(a) \cap \text{mspec}(b) = \emptyset. \quad (5)$$

За умовою теореми, існує деякий елемент  $r \in R$ , який належить усім максимальним ідеалам кільца  $R$ , крім максимальних ідеалів множини  $\text{mspec}(a)$ . Тому  $\text{mspec}(r) = \text{mspec}(0) \setminus \text{mspec}(a)$ . Очевидно, що

$$\text{mspec}(r) \cap \text{mspec}(a) = \emptyset. \quad (6)$$

Розглянемо елемент  $a + br \in R$ . Припустимо, що  $a + br = u \in \mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \in \text{mspec}R$ ). Тоді  $a \in \mathcal{M}$  і  $b \in \mathcal{M}$  або  $a \in \mathcal{M}$  і  $r \in \mathcal{M}$ , що суперечить умовам (5) або (6) відповідно. Тому  $a + br \in \mathcal{U}(R)$ . Звідси

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \stackrel{\mathcal{E}}{\sim} (u, 0).$$

Таким чином, дане кільце  $R$  є елементарно головним, а на підставі теореми 1 і квазівклідовим. Оскільки кільце Ерміта, елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників, а довільна зворотна матриця над квазівклідовим кільцем є добутком елементарних матриць, то кільце  $R$  є кільцем з елементарною редукцією матриць.

**Означення 11** Комутативне кільце  $R$  називається *кільцем стабільного рангу один*, якщо для довільних взаємопростих  $a, b \in R$  існує такий елемент  $t \in R$ , що  $a + bt$  є зворотним елементом кільца  $R$ .

Зауважимо, що кільця, які задовольняють умовам теорем 4,5, є кільцями стабільного рангу один.

**Теорема 6.** Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай  $R$  — кільце стабільного рангу один. Припустимо, що  $aR + bR = dR$ , де  $a, b, d \in R$ . Тоді, згідно з критерієм ермітовості, існують такі  $a_0, b_0 \in R$ , що  $a = a_0d$ ,  $b = b_0d$ . Тому

$$(a, b) = (a_0, b_0) \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $R$  — кільце стабільного рангу один, то для елементів  $a_0, b_0$  існує таке  $t \in R$ , що  $a_0 + b_0t = u \in \mathcal{U}(R)$ . Таким чином,

$$(a_0, b_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = (u, b_0) \stackrel{\mathcal{E}}{\sim} (u, 0).$$

Зважаючи на належність  $diag(d, d)$  до центру  $R_2$ , легко бачити, що  $R$  є елементарно головним, а тому їй квазіевклідовим (теорема 1). На підставі твердження 1,  $R$  є кільцем Ерміта. Кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем елементарних дільників [8, лема 4], а довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченим добутком елементарних матриць (лема 1). Тому отримуємо, що кільце Ерміта стабільного рангу один є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Оскільки регулярні кільця і кільця нормування є кільцями стабільного рангу один, то з теореми 6 випливають такі наслідки.

**Наслідок 3.** *Регулярне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

**Наслідок 4.** *Кільце нормування є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

### §3. Матричні рівняння спеціального вигляду над квазіевклідовими областями

У праці [9] Забавським Б. і Дяченко Н. одержали критерій існування розв'язку матричного рівняння спеціального типу над комутативною областю Безу. Ми сформулюємо і доведемо подібний критерій над квазіевклідовою областю і, що важливо, знайдемо ці розв'язки в явному вигляді.

**Теорема 8.** *Для квазіевклідової області  $R$  такі властивості еквівалентні:*

- (i)  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць;
- (ii) для довільної матриці  $A \in R_2$ , найбільший спільний дільник всіх у сукупності елементів якої дорівнює одиниці, знайдеться власний (тобто ненульовий і неодиничний) ідемпотент у правому ідеалі  $A R_2$ ;
- (iii) матричне рівняння  $XAX = X$  має ненульовий розв'язок, де  $X, A \in R_2$  і найбільший спільний дільник всіх (у сукупності) елементів матриці  $A$  дорівнює одиниці.

**Доведення.** Проведемо доведення за схемою (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Нехай  $aR + bR + cR = R$ , де  $a, b, c \in R$ . Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R_2.$$

Оскільки  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць, то для матриці  $A$  існують такі зворотні матриці  $P, Q \in R_2$  (які є скінченими добутками елементарних матриць), що  $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ . Тоді

$$\begin{aligned} (AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P)^2 &= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} PAQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \\ &= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P. \end{aligned}$$

Легко бачити, що  $AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$  — шуканий ідемпотент в ідеалі  $A R_2$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Нехай ідемпотент  $E = E^2 \in AR_2$ , тоді  $E = AB$  (де  $B \in R_2$ ). Розглянемо добуток

$$BABABAB = (BAB)(ABAB) = (BAB)AB = B(ABAB) = BAB.$$

Звідси, поклавши  $X = BAB$ , отримаємо рівність  $XAX = X$ . Отже, рівняння  $XAX = X$  має ненульовий розв'язок.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Нехай рівняння  $XAX = X$  має ненульовий розв'язок. Тоді, домноживши його зліва на  $A$ , отримаємо  $AXAX = AX$ . Звідси випливає, що будь-який правий ідеал  $AR_2$  містить власний ідемпотент.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Розглянемо такі  $a, b, c \in R$ , що  $aR + bR + cR = R$ . Нехай  $\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \in R_2$  і  $F = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar + bs & ak + bt \\ cs & ct \end{pmatrix}$  — власний ідемпотент. У праці [10, лема 1] було доведено, що матриця  $M \in R_2$ , де  $R$  — область цілісності, є власним ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли  $\det M = 0$  і  $\text{tr } M = 1$ . Завдяки цьому факту, із рівностей  $\text{tr } F = 1$  і  $\det F = 0$  отримуються рівності  $ar + bs + ct = 1$  і  $sk = rt$  ( $rtR \subseteq sR$ ).

Припустимо, що  $dR = rR + sR$  і  $r = dp$  і  $s = dq$ , де  $p, q \in R$ ,  $(p, q) = 1$ ,  $p, q \in R$ .

Тоді з рівності  $sk = rt$  випливає, що  $dpt = dqk$ , а тому  $pt = qk$ . Отже, існує деяке  $m \in R$ , для якого  $t = qm$ .

Покладемо

$$P = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що  $\det P = \det Q = 1$ . На підставі теореми 2, спеціальна лінійна група  $\text{SL}_2(R)$  збігається з групою елементарних матриць  $\text{GE}_2(R)$ . Тому  $P$  і  $Q$  — зворотні матриці, які є добутками елементарних над  $R$  матриць.

Розглянемо добуток

$$PAQ = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що матриця  $A$ , а, отже, і довільна матриця над  $R$ , володіє елементарною редукцією. Тому  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць.

Теорему доведено. Залишилось записати розв'язок матричного рівняння  $XAX = X$  в явному вигляді. Вже доведено, що  $X = BAB$ , де  $AB$  — власний ідемпотент у правому ідеалі  $AR_2$ . Тому

$$X = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix},$$

де  $ar + bs + ct = 1$  і  $sk = rt$  ( $rtR \subseteq sR$ ).

Перейдемо до розгляду групи  $\text{SL}_2(R)$ , де  $R$  — кільце з елементарною редукцією матриць. Згідно з теоремою 2,  $R$  є такою областю Безу, що  $\text{GE}_2(R) = \text{SL}_2(R)$ . Тому довільну матрицю другого порядку над кільцем  $R$ , визначник якої дорівнює одиниці, можна зобразити у вигляді скінченного добутку матриць вигляду  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Справді, група  $\text{GE}_2(R)$  породжується матрицями вигляду  $F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ , де  $a \in R$  [4], як це видно з таких рівностей:

$$\begin{aligned} F(a) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GE}_2(R), \\ F^{-1}(a) &= F(0)F(-a)F(0) \in \text{GE}_2(R), \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= (F(0))^3 F(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3. \end{aligned}$$

Як наслідки можна сформулювати ще ряд тверджень, доведення яких тепер вже очевидні.

**Теорема 8.** Група  $\text{SL}_2(R)$ , де  $R$  — кільце нормування, породжується матрицями вигляду  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , де  $a, b \in R$ .

**Теорема 9.** Група  $\text{SL}_2(R)$ , де  $R$  — регулярне кільце, породжується матрицями вигляду  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , де  $a, b \in R$ .

**Теорема 10.** Група  $\text{SL}_2(R)$ , де  $R$  — напівлокальне кільце Безу, породжується матрицями вигляду  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , де  $a, b \in R$ .

1. Cohn P. *On the structure of the  $GL_2$  of a ring*// I.H.E.S. – 1996. – Vol 30. – P. 365 – 413.
2. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix*// Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). – 1996. –P. 14.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 66. – P.464–491.
4. Bougaud B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*// These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
5. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 82. – P. 362 – 365.
6. Кон П. Свободные кольца и их связь. – М.: Мир. – 1975.
7. Larsen M., Lewis W., Schores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P.231 – 248.
8. Brewer J., Katz D., Ullery W. *Pole assignability in polynomial rings, power series rings, and Prüfer domains*// J. of Algebra. – 1987. – Vol. 106. – P. 265 – 286.
9. Забавський Б., Дяченко Н. *Критерий существования решения матричного уравнения специального вида над коммутативной областью Безу*// VI симп. по теор. ком. алгебр и модулей. Львов, 11-13 октября. 1990. – С. 53.
10. Дубровин Н.И. *Проективный предел с элементарными делителями*// Мат. сб. – 1982. – Vol. 119. – P. 89 – 95.
11. Забавський Б.В., Комарницкий Н.Я. *Дистрибутивные области элементарными делителями*// Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, N7, – С. 1000-1004.