

СТРОГАЯ ФАКТОРИАЛЬНОСТЬ
И ФАКТОРИАЛЬНЫЙ РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА

В данной работе R всегда обозначает ассоциативное кольцо с $I \neq 0$. Напомним, что элемент $a \in R$ называется атомом, если он необратим и не разлагается в произведение двух необратимых элементов. Элементы $a, b \in R$ называются ассоциированными, если $a = ubv$, где u, v – обратимые элементы кольца R . Регулярный элемент $a \in R$ называется инвариантным, если $\alpha R = Ra$. Через $I(R)$ обозначим множество всех инвариантных элементов кольца R , а через $U(R)$ – множество всех обратимых элементов кольца R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Атом $a \in R$ называется максимальным правым (левым) атомом, если aR (Ra) – максимальный правый (левый) идеал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если любой максимальный правый идеал кольца R является главным правым идеалом, то любой атом в R является максимальным правым атомом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так, т.е. существует максимальный правый идеал mR , содержащий aR собственным образом. Тогда $a = mb$, $b \in R$. Так как a – атом, то $b \in U(R)$, и поэтому $aR = mR$. Полученное противоречие доказывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если R – кольцо конечно-порожденных главных правых идеалов, то любой атом $a \in R$ является максимальным правым атомом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда существует максимальный правый идеал M , содержащий aR собственным образом. Поэтому существует элемент $m \in M$, что $m \notin aR$. В силу предположений на кольцо R имеем, что $aR + mR = dR$. Поскольку $d \in M$, то $d \notin U(R)$. Ввиду того, что a – атом и $aR \subset dR$, имеем $a = du$, где $u \in U(R)$. Это возможно лишь в случае, когда $aR = dR$. Полученное противоречие с выбором элемента m завершает доказательство предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. В кольце главных правых идеалов любой атом является максимальным правым атомом.

Легко убедиться, что в кольце формальных степенных рядов от двух переменных x, y над полем, x, y являются не максимальными атомами.

В дальнейшем, если не оговорено противное, кольцо R обозначает область целостности, в которой любой максимальный правый атом является инвариантным элементом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Представление элемента кольца R в виде произведения некоторых элементов называется его атомным разложением, все необратимые сомножители этого произведения являются атомами. Назовем два атомных разложения $a = b_1 b_2 \dots b_t$, $a = c_1 c_2 \dots c_s$ изоморфными, если $t = s$, существует подстановка $i \rightarrow i'$ индексов $1, 2, \dots, t$ такая, что $R/b_i R \cong R/c_{i'} R$, как правые R -модули. Ненулевой элемент области целостности R назовем факториальным, если он обладает атомным разложением, причем любые два его атомных разложения изоморфны. Ненулевой элемент f области целостности R называется строго факториальным, если f — факториальный и каждый его атомный сомножитель является максимальным правым атомом.

В силу условий, наложенных на область целостности R , и того факта, что множество инвариантных элементов замкнуто относительно умножения, имеем, что любой строго факториальный элемент является инвариантным элементом. Предположим, что $a, \bar{a} \in J(R)$ и $R/aR \cong R/\bar{a}R$. Сравнивая аннуляторы этих изоморфных правых R -модулей, получаем $aR = \bar{a}R = Ra = R\bar{a}$. Отсюда следует, что строго факториальные разложения элемента из R определяются однозначно с точностью до ассоциированности, т.е. если a — строго факториальный элемент, имеющий два атомных разложения $a = b_1 b_2 \dots b_t$, $a = c_1 c_2 \dots c_s$, то $t = s$, и при некотором определенным образом установленном однозначном соответствии $i \rightarrow i'$ элементы b_i и $c_{i'}$ ассоциированы.

Напомним, что правый (левый) идеал N кольца R называется максимально неглавным правым (левым) идеалом, если для правого (левого) идеала J кольца R из вложения $N \subset J \subset R$ и того, что $N \neq J$, вытекает, что J — главный правый (левый) идеал кольца R . Индуктивность множества неглавных правых (левых) идеалов относительно порядка включения правых (левых) идеалов гарантирует их существование.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть R — область целостности, в которой любой максимальный правый атом является инвариантным элементом и пусть a — необратимый элемент области целостности R , который не содержится ни в одном максимально неглавном правом идеале. Тогда a — строго факториальный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если a — максимальный правый атом, то все доказано. В противном случае существует такой максимальный правый атом m_1 , что $a = m_1 b_1 = a_1 m_1$. Аналогично для элемента a_1 , имеем $a_1 = m_2 b_2 = a_2 m_2$, где m_2 — максимальный правый атом. Учитывая, что элемент a не содержится ни в одном максимально неглавном правом идеале, и продолжая этот процесс, получаем конечную цепь правых идеалов

$$aR \subset a_1 R \subset \dots \subset a_n R, \quad (I)$$

где $a_i = a_{i+1} m_{i+1}$ и m_i - максимальные правые атомы области целостности R . Отсюда $\alpha = m_n \dots m_1$.

Пусть A - множество правых идеалов, содержащих правый идеал αR . В силу выбора элемента α все правые идеалы из A - главные правые идеалы. Для любых двух таких правых идеалов имеем $mR + nR = pR \in A$ и $mR \cap nR = gR \in A$. Тем самым A - модулярная решетка. Тогда выражение (I) является цепью в A , а поскольку $a_{i+1} R / a_i R \cong R / m_{i+1} R$, то все ее факторы простые, т.е. цепь (I) - композиционный ряд в A . Поэтому, как следует из обобщенной теоремы Шрейера, данное атомное представление элемента α однозначно с точностью до ассоциированности максимальных правых атомов. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть m и n - максимальные правые атомы области целостности R и $m, n \in J(R)$. Если для некоторого натурального числа k верно включение $m^k R \subseteq nR$, то m и n ассоциированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если m и n - не ассоциированные максимальные правые атомы, то $mR + nR = R$. Следовательно, существуют такие элементы $u, v \in R$, что $mu + nv = 1$. Так как $m \in J(R)$, то существуют такие элементы $u', v' \in R$, что $nm^{k-1}v' + m^k u' = m^{k-1}$, т.е. $m^{k-1} \in nR$. Продолжая этот процесс по аналогии, получаем, что $mR \subseteq nR$. Но тогда m, n - ассоциированные элементы области целостности R , что и требовалось доказать. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть m - максимальный правый атом, который является инвариантным элементом области целостности R , если для правого идеала J выполняется $m^s R \subseteq J \subseteq mR$, где s - натуральное число. Тогда $J = m^k R$ для некоторого натурального числа k ($1 \leq k \leq s$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4 правый идеал J содержит лишь в одном максимальном правом идеале mR . Пусть k - наибольшее такое натуральное число, что $J \subseteq m^k R$. Тогда $J \not\subseteq m^{k+1} R$. Обозначим $J = J + m^{k+1} R$. Очевидно, что $m^{k+1} R \subset J \subseteq m^k R$. Так как $J \neq m^{k+1} R$, то существует элемент $j \in J$, что $j = m^k r$, где $r \notin mR$. Отсюда $mR + rR = R$, т.е. существуют такие элементы $u, v \in R$, что $mu + rv = 1$ и $m^{k+1}u + m^k rv = m^k \in J$. Значит, $J + m^{k+1} R = m^k R$. Отсюда $i + m^{k+1}r = m^k$ для некоторых элементов $i \in J$, $r \in R$. Учитывая это, получаем $im^{s-k-1} + m^s r' = m^{s-1} \in J$, где $rm^{s-k-1} = m^{s-k-1}r'$, поскольку $m \in J(R)$. Аналогично $im^{s-k-2} + m^{s-1}r'' = m^{s-2} \in J$. Продолжая этот процесс, получаем $J = m^k R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть m, n - ненасоциированные максимальные правые атомы области целостности R . Если $m, n \in J(R)$, то $mn = pmu$, где $u \in U(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $m, n \in J(R)$, то $mn = na$, $nm = mb$. Поскольку m, n – неассоциированные правые атомы, то $mR + nR = R$. Отсюда, поскольку $m, n \in J(R)$, существуют такие элементы $u, v \in R$, что $um + vn = 1$. Тогда $umb + vnb = b$, $uma + vna = a$, $unm + vnb = b$, $uma + vna = a$. Так как $m, n \in J(R)$, то в R существуют такие элементы x, y , что $nx = b$, $ny = a$. Отсюда $mn = npy$, $nm = npx$, $mn = npxy$, т.е. $xy = yx = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть N – максимально неглавный идеал области целостности R и $N \subset m_i^{k_i} R$, $i=1,2,\dots,s$, где m_i – попарно неассоциированные максимальные правые атомы области целостности R и пусть $m_i \in J(R)$. Тогда $N \subset m_1^{k_1} \dots m_s^{k_s} R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании предложения 4 $m_i^{k_i} R + m_j^{k_j} R = R$, где m_i, m_j – неассоциированные максимальные правые атомы области R . Аналогично $m_1^{k_1} \dots m_{t-1}^{k_{t-1}} m_{t+1}^{k_{t+1}} \dots m_s^{k_s} R + m_t^{k_t} R = R$. Так как $m_i^{k_i} \in J(R)$, тогда $\bigcap_{i=1}^s m_i^{k_i} R = m_1^{k_1} \dots m_s^{k_s} R$. Отсюда $N \subset m_1^{k_1} \dots m_s^{k_s} R$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть R – область целостности, в которой любой максимальный правый атом является инвариантным элементом. Тогда любой строго факториальный элемент области целостности R не содержится ни в одном максимально неглавном правом идеале области целостности R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так, т.е. в области целостности R существует строго факториальный элемент $f = m_1^{k_1} \dots m_s^{k_s}$, который содержится в некотором максимально неглавном правом идеале N . В силу предложения 6 $m_1^{k_1} \dots m_s^{k_s} = m_i^{k_i} m_1^{k_1} \dots m_{i-1}^{k_{i-1}} m_{i+1}^{k_{i+1}} \dots m_s^{k_s}$.

Если для максимального правого атома m_i , $i=1,2,\dots,s$ выполнялось бы условие $N \notin m_i^{k_i} R$, тогда $N + m_i^{k_i} R = m_i^{r_i} R$, где $r_i < k_i$. Случай $m_i^{k_i} R \subset N \subset m_i R$ тривиальный ввиду предложения 8. Так как $N + m_i^{k_i} R = m_i^{r_i} R$, то существуют такие элементы $n \in N$, $l \in R$, что $n + m_i^{k_i} l = m_i^{r_i}$. Отсюда

$$nm_1^{k_1} \dots m_{i-1}^{k_{i-1}} m_{i+1}^{k_{i+1}} \dots m_s^{k_s} + m_i^{k_i} \dots m_s^{k_s} l = m_i^{r_i} m_1^{k_1} \dots m_{i-1}^{k_{i-1}} m_{i+1}^{k_{i+1}} \dots m_s^{k_s} \in N.$$

Если же $N \notin m_i R$ для некоторого $i=1,2,\dots,s$, то, очевидно, в N ле-

жит строго факториальный элемент $m_1^{k_1} \cdots m_{i-1}^{k_{i-1}} m_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots m_s^{k_s}$. Суммируя изложенное выше, получаем, что для N выполняются условия $m_1^{r_1} \cdots m_t^{r_t} \in N$ и $N \subset m_i^{r_i} R$ для любого $i = 1, 2, \dots, t$, где $t \leq s$. Так как $m_1^{r_1} \cdots m_t^{r_t} \in N$, то $m_1^{r_1} \cdots m_t^{r_t} R \subseteq N$. Поскольку $N \subset m_i^{r_i} R$, $i = 1, 2, \dots, t$, то, благодаря предложению 7, имеем $N \subseteq m_1^{r_1} \cdots m_t^{r_t} R$.

Отсюда $N = m_1^{r_1} \cdots m_t^{r_t} R$, что противоречит выбору правого идеала N . Предложение доказано.

Пусть $\mathcal{I}_r(R)$ ($N_l(R)$) – пересечение всех максимально неглавных правых (левых) идеалов области целостности R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть \mathcal{I} – идеал области целостности R такой, что для любых $i \in \mathcal{I}$, $f \in R$, где f – строго факториальный элемент, элемент $f + i$ также строго факториальный. Тогда $\mathcal{I} \subseteq N_r(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{I} \neq N_r(R)$, тогда существует максимально неглавный правый идеал N , что $\mathcal{I} \neq N$. В силу определения правого идеала N имеем $N + \mathcal{I} = fR$, где f – строго факториальный элемент области целостности R . Тогда существуют такие элементы $n \in N$, $i \in \mathcal{I}$, что $n + i = f$. В силу определения идеала \mathcal{I} элемент $n = f - i$ – строго факториальный элемент области целостности R , что невозможно в силу предложения 8. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть R – область целостности, в которой любой максимальный правый атом является максимальным левым атомом, и наоборот, любой максимальный левый атом является максимальным правым атомом, причем все эти атомы являются инвариантными. Предположим еще, что R – область целостности с единственным максимально неглавным правым идеалом N . Тогда N – идеал области целостности R , причем N является единственным максимально неглавным левым идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так, тогда существуют такие элементы $n \in N$, $x \in R$, что $xn \notin N$. В силу предложения 3 xn – строго факториальный элемент области целостности R . Поэтому элемент n – строго факториальный, как правый делитель строго факториального элемента. Полученное противоречие доказывает, что N является идеалом. Очевидно, что элемент $f + n$ – строго факториальный для любого строго факториального элемента f области R и любого элемента $n \in N$. На основании предложения 9 в случае левых идеалов имеем $N \subseteq N_l(R)$.

С другой стороны, идеал N является максимально неглавным левым идеалом. Действительно, если существует максимально неглавный левый идеал K , который не совпадает с N , то существует такой элемент $k \in K$, что $k \notin N$. В силу предложения 3 k — отрого факториальный элемент. Но это невозможно в силу предложения 8, так как $k \in K$. Полученное противоречие доказывает, что $N = N_l(R)$ и N — единственный максимально неглавный левый идеал области целостности R .

Поступила 05.12.88