

## Варіант №9

- 1) Навести приклад множини  $V$  з операціями додавання та множення на скаляри поля дійсних чисел, в якій виконуються всі аксіоми лінійного простору, крім  $1 \cdot a = a$  для  $1 \in \mathbb{R}$  і довільних  $a \in V$ .
- 2) З'ясувати, чи є підпростором лінійного простору  $\mathbb{R}^2$  така сукупність векторів: вектори площини з початком  $O$ , кінці яких не лежать на заданій прямій?
- 3) Довести таке: якщо хоча б одна підсистема системи векторів лінійного простору лінійно залежна, то і вся система векторів лінійно залежна.
- 4) Нехай вектори  $e_1, e_2, e_3$  і  $x$  задані своїми координатами в деякій базі:  $e_1 = (2, 1, -3)$ ,  $e_2 = (3, 2, -5)$ ,  $e_3 = (1, -1, 1)$ ,  $x = (6, 2, -7)$ . Довести, що  $e_1, e_2, e_3$  — також база простору. Знайти координати вектора  $x$  у цій базі.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів  $S_1$  та  $S_2$  є базою. Знайти матрицю переходу від  $S_1$  до  $S_2$ :
 
$$S_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\},$$

$$S_2 = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори першої бази?
- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  і  $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ :  $a_1 = (1, 2, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, -1)$ ,  $a_3 = (1, 3, 3)$ ,  $b_1 = (1, 2, 2)$ ,  $b_2 = (2, 3, -1)$ ,  $b_3 = (1, 1, -3)$ .
- 8) Довести, що простір матриць  $M_n(\mathbb{R})$  є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:
 
$$f(x) \mapsto f(x+1) - f(x), \text{ де } f \in \mathbb{R}_n[x]?$$
- 10) Знайти матрицю лінійного оператора  $\varphi$ , який переводить вектори  $e_1 = (2, 1, -1)$ ,  $e_2 = (2, -1, 2)$ ,  $e_3 = (3, 0, 1)$ , відповідно, у вектори  $f_1 = (1, 2, -1)$ ,  $f_2 = (1, 0, 0)$ ,  $f_3 = (0, 1, 1)$  у тій самій базі, в якій задано координати цих векторів.
- 11) Нехай у двовимірному лінійному просторі лінійний оператор  $\varphi$  у базі  $e_1, e_2$  задано матрицею
 
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$
 Знайти координати образу  $\varphi(x)$  вектора  $x = (4, -3)$  цього простору.

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

- 15) Нехай  $e_1, e_2$  — ортонормована база евклідового простору і оператор  $\varphi$  заданий у базі  $e_1, e_1 + e_2$  матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора  $\varphi^*$  в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору:  $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$ .

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \det(AB), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))