

## Варіант №8

- 1) Навести приклад множини  $V$  з операціями додавання та множення на скаляри поля дійсних чисел, в якій виконуються всі аксіоми лінійного простору, крім  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  для довільних  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $a \in V$ .
- 2) З'ясувати, чи є підпростором лінійного простору  $\mathbb{R}^2$  така сукупність векторів: вектори площини з початком  $O$ , кінці яких лежать на заданій прямій?
- 3) Довести, що кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.
- 4) Нехай вектори  $e_1, e_2, e_3, e_4$  і  $x$  задані своїми координатами в деякій базі:  $e_1 = (1, 2, -1, -2)$ ,  $e_2 = (2, 3, 0, -1)$ ,  $e_3 = (1, 2, 1, 4)$ ,  $e_4 = (1, 3, -1, 0)$ ,  $x = (7, 14, -1, 2)$ . Довести, що  $e_1, e_2, e_3$  і  $e_4$  — також база простору. Знайти координати вектора  $x$  у цій базі.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів  $S_1$  та  $S_2$  є базою. Знайти матрицю переходу від  $S_1$  до  $S_2$ :
 
$$S_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\},$$

$$S_2 = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо записати вектори обох баз у зворотному порядку?
- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  і  $\langle b_1, b_2 \rangle$ :  $a_1 = (1, 2, -1, -2)$ ,  $a_2 = (3, 1, 1, 1)$ ,  $a_3 = (-1, 0, 1, -1)$ ,  $b_1 = (2, 5, -6, -5)$ ,  $b_2 = (-1, 2, -7, -3)$ .
- 8) Довести, що простір матриць  $M_n(\mathbb{R})$  є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:
 
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)?$$
- 10) Знайти матрицю оператора:
 
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$$
 у просторі  $\mathbb{R}^3$  у базі з одиничних векторів.
- 11) Нехай у базі  $e_1, e_2$  лінійний оператор  $\varphi$  заданий матрицею
 
$$\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього самого оператора у базі  $e'_1 = e_1 - 2e_2$ ,  $e'_2 = 2e_1 + e_2$ .

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*.$$

- 15) Нехай  $e_1, e_2$  — ортонормована база евклідового простору і оператор  $\varphi$  заданий у базі  $e_1, e_1 + e_2$  матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора  $\varphi^*$  в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору:  $(1, 1, -1, -2)$ ,  $(5, 8, -2, -3)$ ,  $(3, 9, 3, 8)$ .

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(AB - BA), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))