

Варіант №7

- 1) Нехай x, y — вектори, α, β — скаляри. Довести, що $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta$ або $x = y$.
- 2) З'ясувати, чи є підпростором лінійного простору \mathbb{R}^2 така сукупність векторів: вектори площини з початком O , кінці яких лежать на одній із двох прямих, що перетинаються в точці O ?
- 3) Чи правильно, що *коєсен* вектор лінійно залежної системи векторів лінійно виражається через інші?
- 4) Нехай вектори e_1, e_2, e_3, e_4 і x задані своїми координатами в деякій базі: $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$. Довести, що e_1, e_2, e_3 і e_4 — також база простору. Знайти координати вектора x у цій базі.

- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :

$$S_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\},$$

$$S_2 = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}.$$

- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори другої бази?

- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок $\langle a_1, a_2 \rangle$ і $\langle b_1, b_2 \rangle$: $a_1 = (1, 2, 1, 0)$, $a_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $b_1 = (2, -1, 0, 1)$, $b_2 = (1, -1, 3, 7)$.

- 8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.

- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:

$$f(x) \mapsto f(\alpha x + \beta), \text{ де } f \in \mathbb{R}_n[x], \alpha, \beta \text{ — фіксовані числа?}$$

- 10) Знайти матрицю лінійного оператора φ , який переводить вектори $e_1 = (2, 1, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (3, 0, 1)$, відповідно, у вектори $f_1 = (1, 2, -1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (0, 1, 1)$ у тій самій базі, в якій задано координати цих векторів.

- 11) Нехай у двовимірному лінійному просторі лінійний оператор φ у базі e_1, e_2 задано матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти координати образу $\varphi(x)$ вектора $x = (4, -3)$ цього простору.

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(AB), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))