

## Варіант №6

- 1) Нехай  $x, y$  — вектори,  $\alpha, \beta$  — скаляри. Довести, що  $\alpha x = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $\alpha = 0$  або  $x = 0$ .
- 2) Чи є лінійним підпростором простору  $\mathbb{R}^n$  множина усіх векторів  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , координати яких задовольняють умову:  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$  (усі координати  $x_i$  — цілі числа)?
- 3) За яких значень  $\lambda$  із лінійної незалежності системи векторів  $a_1, a_2$  випливає лінійна незалежність системи  $\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2$ ?
- 4) Нехай вектори  $e_1, e_2, e_3$  і  $x$  задані своїми координатами в деякій базі:  $e_1 = (2, 1, -3)$ ,  $e_2 = (3, 2, -5)$ ,  $e_3 = (1, -1, 1)$ ,  $x = (6, 2, -7)$ . Довести, що  $e_1, e_2, e_3$  — також база простору. Знайти координати вектора  $x$  у цій базі.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів  $S_1$  та  $S_2$  є базою. Знайти матрицю переходу від  $S_1$  до  $S_2$ :
 
$$S_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\},$$

$$S_2 = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори першої бази?
- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  і  $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ :  $a_1 = (1, 1, 0, 0, -1)$ ,  $a_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$ ,  $a_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $b_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $b_2 = (0, 2, 1, 1, 0)$ ,  $b_3 = (1, 2, 1, 2, -1)$ .
- 8) Довести, що простір матриць  $M_n(\mathbb{R})$  є прямую сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:
 
$$x \mapsto (x, a)x, \quad \text{де } V \text{ — евклідовий простір, } a \text{ — фіксований вектор?}$$
- 10) Знайти матрицю оператора:
 
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3) \text{ у просторі } \mathbb{R}^3 \text{ у базі з одиничних векторів.}$$
- 11) Нехай у базі  $e_1, e_2$  лінійний оператор  $\varphi$  заданий матрицею
 
$$\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$
 Знайти матрицю цього самого оператора у базі  $e'_1 = e_1 - 2e_2$ ,  $e'_2 = 2e_1 + e_2$ .

Знайти матрицю цього самого оператора у базі  $e'_1 = e_1 - 2e_2$ ,  $e'_2 = 2e_1 + e_2$ .

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

- 15) Нехай  $e_1, e_2$  — ортонормована база евклідового простору і оператор  $\varphi$  заданий у базі  $e_1, e_1 + e_2$  матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора  $\varphi^*$  в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору:  $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$ .

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(A^\top \cdot B), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))