

Варіант №5

- 1) З лінійного простору виключено нескінченну множину векторів. Чи може отримана після цього виключення множина векторів залишатись лінійним простором?
- 2) Чи є лінійним підпростором простору \mathbb{R}^n множина усіх векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координати яких задовольняють умову: $x_1 \cdot x_n = 0$?
- 3) Довести, що поліноми $1, x, x^2, \dots, x^n$ лінійно незалежні елементи лінійного простору $\mathbb{R}_n[x]$ усіх поліномів степеня $\leq n$.
- 4) Нехай вектори e_1, e_2, e_3 і x задані своїми координатами в деякій базі: $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$. Довести, що e_1, e_2, e_3 — також база простору. Знайти координати вектора x у цій базі.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :
- $$S_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\},$$
- $$S_2 = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори другої бази?
- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ і $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$: $a_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $a_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $a_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$, $b_1 = (1, 1, 2, 1, -1)$, $b_2 = (0, -2, 0, -1, -5)$, $b_3 = (2, 0, 2, 1, -3)$.
- 8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумаю підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:
 $x \mapsto (x, a)b$, де V — евклідовий простір, a, b — фіксовані вектори?
- 10) Знайти матрицю лінійного оператора φ , який переводить вектори $e_1 = (2, 1, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (3, 0, 1)$, відповідно, у вектори $f_1 = (1, 2, -1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (0, 1, 1)$ у тій самій базі, в якій задано координати цих векторів.
- 11) Нехай у двовимірному лінійному просторі лінійний оператор φ у базі e_1, e_2 задано матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти координати образу $\varphi(x)$ вектора $x = (4, -3)$ цього простору.

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(A \cdot B^\top), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

20)

- 21) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))