

Варіант №2

- 1) Чи може лінійний простір складатись з одного вектора?
- 2) Чи є лінійним підпростором простору \mathbb{R}^n множина усіх векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координати яких задовольняють умову: $x_1 - x_2 - \dots - x_n = 0$?
- 3) Довести, що функції $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ лінійно незалежні.
- 4) Довести, що система векторів $a_1 = (2, 3, -4, -1), a_2 = (1, -2, 1, 3)$ лінійно незалежна. Доповнити їх до бази простору рядків.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :

$$S_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\},$$

$$S_2 = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори другої бази?
- 7) Знайти вимірності суми та перетину лінійних оболонок систем векторів простору \mathbb{R}^4 : $S_1 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3) \rangle, S_2 = \langle (1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1) \rangle$.
- 8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямую сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане віображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:

$$x \mapsto x + a, \text{ де } a \text{ — фіксований вектор?}$$
- 10) Знайти матрицю оператора:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3) \text{ у просторі } \mathbb{R}^3 \text{ у базі з одиничних векторів.}$$
- 11) Нехай у базі e_1, e_2 лінійний оператор φ заданий матрицею

$$\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього самого оператора у базі $e'_1 = e_1 - 2e_2, e'_2 = 2e_1 + e_2$.

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(AB - BA), \quad (A, B \in M_n(\mathbb{R})).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))