

Варіант №11

1) Довести, що комутативність додавання векторів випливає з речти аксіом лінійного простору.

2) З'ясувати, чи є підпростором лінійного простору \mathbb{R}^2 така сукупність векторів: вектори координатної площини, кожен із яких лежить на одній із осей координат Ox і Oy ?

3) Довести, що система, яка складається з одного ненульового вектора, лінійно незалежна.

4) Довести, що система векторів $a_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$ лінійно незалежна. Доповнити їх до бази простору рядків.

5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :

$$S_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\},$$

$$S_2 = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}.$$

6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо записати вектори обох баз у зворотному порядку?

7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ і $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$: $a_1 = (1, 1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$, $b_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $b_2 = (0, 2, 1, 1, 0)$, $b_3 = (1, 2, 1, 2, -1)$.

8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.

9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)?$$

10) Знайти матрицю лінійного оператора φ , який переводить вектори $e_1 = (2, 1, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (3, 0, 1)$, відповідно, у вектори $f_1 = (1, 2, -1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (0, 1, 1)$ у тій самій базі, в якій задано координати цих векторів.

11) Нехай у двовимірному лінійному просторі лінійний оператор φ у базі e_1, e_2 задано матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти координати образу $\varphi(x)$ вектора $x = (4, -3)$ цього простору.

12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(A \cdot B^\top), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))