

Варіант №10

- 1) Не використовуючи комутативність додавання векторів, довести, що правий протилежний і нульовий елементи будуть і лівими.
- 2) З'ясувати, чи є підпростором лінійного простору \mathbb{R}^2 така сукупність векторів: вектори координатної площини, кінці яких лежать у першій чверті?
- 3) Довести, що система, яка складається з одного нульового вектора, лінійно залежна.
- 4) Довести, що система векторів $a_1 = (2, 2, 7, -1)$, $a_2 = (3, -1, 2, 4)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$ лінійно незалежна. Доповнити їх до бази простору рядків.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :

$$S_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\},$$

$$S_2 = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори другої бази?
- 7) Знайти бази суми та перетину лінійних оболонок $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ і $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$: $a_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $a_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $a_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$, $b_1 = (1, 1, 2, 1, -1)$, $b_2 = (0, -2, 0, -1, -5)$, $b_3 = (2, 0, 2, 1, -3)$.
- 8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане відображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)?$$
- 10) Знайти матрицю оператора:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$$
 у просторі \mathbb{R}^3 у базі з одиничних векторів.
- 11) Нехай у базі e_1, e_2 лінійний оператор φ заданий матрицею

$$\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$
 Знайти матрицю цього самого оператора у базі $e'_1 = e_1 - 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$.

- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(A + B), \quad \text{де } A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))