

Варіант №1

- 1) Чи є лінійним простором порожня множина?
- 2) Чи є лінійним підпростором простору \mathbb{R}^n множина усіх векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координати яких задовільняють умову: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$?
- 3) Довести, що функції $\cos x, \sin x$ лінійно незалежні.
- 4) Довести, що система векторів $a_1 = (2, 2, 7, -1)$, $a_2 = (3, -1, 2, 4)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$ лінійно незалежна. Доповнити їх до бази простору рядків.
- 5) Довести, що кожна з двох заданих систем векторів S_1 та S_2 є базою. Знайти матрицю переходу від S_1 до S_2 :

$$S_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\},$$

$$S_2 = \{(3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\}.$$
- 6) Як зміниться матриця переходу від однієї бази до іншої, якщо поміняти місцями два вектори першої бази?
- 7) Знайти вимірності суми та перетину лінійних оболонок систем векторів простору \mathbb{R}^4 : $S_1 = \langle(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\rangle$, $S_2 = \langle(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\rangle$.
- 8) Довести, що простір матриць $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумою підпростору симетричних і підпростору кососиметричних матриць.
- 9) Чи є задане віображення у відповідному лінійному просторі лінійним оператором:

$$x \mapsto a, \text{ де } a \text{ — фіксований вектор?}$$
- 10) Знайти матрицю лінійного оператора φ , який переводить вектори $e_1 = (2, 1, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (3, 0, 1)$, відповідно, у вектори $f_1 = (1, 2, -1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (0, 1, 1)$ у тій самій базі, в якій задано координати цих векторів.
- 11) Нехай у двовимірному лінійному просторі лінійний оператор φ у базі e_1, e_2 задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$
 Знайти координати образу $\varphi(x)$ вектора $x = (4, -3)$ цього простору.
- 12) Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого у деякій базі матрицею:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 13) З'ясувати, чи можна задану матрицю звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази над полем \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 14) Довести таку властивість операції переходу до спряженого оператора в евклідовому просторі:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

- 15) Нехай e_1, e_2 — ортонормована база евклідового простору і оператор φ заданий у базі $e_1, e_1 + e_2$ матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора φ^* в цій самій базі.

- 16) За допомогою процесу ортогоналізації векторів побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів евклідового простору: $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

- 17) Чи є задана функція двох аргументів білінійною функцією у відповідному просторі:

$$\alpha(A, B) = \text{tr}(AB), \quad (A, B \in M_n(\mathbb{R})).$$

- 18) Знайти нормальній вигляд у множині дійсних чисел такої квадратичної форми:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

- 19) Задану квадратичну форму привести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираження нових невідомих через початкові:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

- 20) Вільна тема (не оцінюється, тематика довільна (не обов'язково математична))