

г) Нехай p_k — найбільше просте число, що не перевищує $n > 2$. Канонічний розклад числа $t = p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ містить тільки прості числа, більші за n . Отже, $t > n$, а тому $p_1 p_2 \dots p_k > n$.

2.13. Якщо n складене, то $n = ab$, $a > 1$, $b > 1$. Тоді $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ — складене.

2.14. Якщо n має хоч один непарний дільник $d > 1$,

то

$$2^n + 1 = (2^{\frac{n}{d}} + 1)(2^{\frac{n}{d}(d-1)} - 2^{\frac{n}{d}(d-2)} + \dots - 2^{\frac{n}{d}} + 1),$$

де обидва множники більші від 1, оскільки $n \geq 3$, $d \geq 3$. Тоді число $2^n + 1$ було б складеним, що суперечить умові. Отже, $n = 2^k$.

2.15. Використати рівність $p^2 - q^2 = (p-1)(p+1) - (q-1)(q+1)$.

2.16. 5. Використати задачу 2.6, е).

2.18. Якщо $n = 1$, то покласти $x = 3$; якщо $n \geq 2$, то покласти $x = n^2$.

2.19. а) $n = 2$, $n = 8$, б) $n = 3$.

2.20. Нехай p — простий дільник $n! - 1$. Оскільки $p < n! - 1$, то $p < n!$. Крім того, $n!$ не ділиться на p , звідки $n < p$. Отже, $n < p < n!$ (3 доведеного випливає, що множина простих чисел нескінченна.)

2.21. $(n+1)! + 2$, $(n+1)! + 3$, ..., $(n+1)! + (n+1)$.

2.22. а) Припустимо, що множина простих чисел виду $3k+2$ скінченна. Нехай це числа $p_1 < p_2 < \dots < p_s$. Розглянемо число $t = 3p_1 p_2 \dots p_s + 2$. Зрозуміло, що це число виду $3k+2$. Оскільки $t > p_s$ і $t > 1$, то t складене. Отже, воно ділиться хоча б на одне просте число. На 3 воно не ділиться. Зрозуміло також, що всі прості дільники числа t не є виду $3k+1$. Отже, число t ділиться хоча б на один простий дільник виду $3k+2$. Оскільки всі такі прості числа знаходяться серед чисел p_1, p_2, \dots, p_s , то t ділиться на одне з них. Тоді з рівності $t = 3p_1 p_2 \dots p_s + 2$ випливає, що на це число поділиться й число 2. Дістали суперечність.

§ 3

3.1. а) 0; б) 7; в) 21; г) 13; д) 2; е) 17; є) 55; ж) 41; з) 71; к) 420; н) 1.

3.2. а) 13; б) 23; в) 119; г) 23; д) 7; е) 21; є) 2; ж) 33; з) 17; к) 12; м) 1.

3.3. а) 2; б) 0; в) 2520; г) 99671; д) 138600; е) 3276; є) 1116; ж) 67818; з) $n(n+1)$.

3.4. а) 88200, б) 36036; в) 2940; г) $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$ при n парному і $n(n+1)(n+2)$ при n непарному; д) 4582198; е) 4272.

3.5. а) $3 = 5 \cdot 21 - 2 \cdot 51$; б) $2 = 20 \cdot (-26) + 3 \cdot 174$; в) $29 = -6 \cdot 899 + 11 \cdot 493$; г) $17 = -10 \cdot 1445 + 23 \cdot 629$; д) $43 = -4 \cdot 903 + 5 \cdot 731$; е) $47 = 2 \cdot 1786 - 5 \cdot 705$; є) $6 = -135 \cdot 822 + 64 \cdot 1734$; ж) $1 = 17 \cdot 4373 + 90 \cdot (-826)$; з) $17 = 45 \cdot (-3791) + 52 \cdot 3281$.

3.6. Див. приклад 3, § 3.

3.7. а) $a = 30$, $b = 120$; $a = 60$, $b = 90$ і навпаки; б) $a = 24$, $b = 120$ і навпаки; в) $a = 2$, $b = 10$ і навпаки; г) $a = 20$, $b = 420$; $a = 60$, $b = 140$ і навпаки; д) $a = 4$, $b = 180$; $a = 20$, $b = 36$ і навпаки; е) $a = 495$, $b = 315$ і навпаки; є) $a = 140$, $b = 252$ і навпаки; ж) $a = 4$, $b = 24$; $a = 8$, $b = 12$ і навпаки; з) $a = 4$, $b = 12$ і навпаки; к) $a = 24$, $b = 2496$; $a = 192$, $b = 312$ і навпаки; л) $a = 552$, $b = 115$; $a = 435$, $b = 232$ і навпаки; м) $a = 75$, $b = 195$ і навпаки; н) не існує.

3.10. а) $a^d - 1$, де $d = (m, n)$; б) 13, якщо $(a-5) \div 13$; 1, якщо $(a-5)$ не ділиться на 13. Скористатися рівністю $4(a^2+1) = (2a+3)(2a-3) + 13$; в) 7.

3.12. а) Групувати доданки, показати послідовно, що це число ділиться на 271 і на 7, і використати співвідношення $(7, 271) = 1$, $7 \cdot 271 = 1897$; б) покласти $n+1 = a^3$ і показати, що $(a^3-1)a^3(a^3+1)$ ділиться на 7, 8 і 9;

в) Застосувати індукцію (за числом n , починаючи з $n=0$);

д) Розглянути різницю $(a^{2k}+1) - (a+1)$.

§ 4

4.1. а) 12 і 168; б) 9 і 217; в) 24 і 1170; г) 8 і 624; д) 30 і 2418; е) 8 і 1440; є) 12 і 1960; ж) 24 і 2808; з) 16 і 2340; к) 30 і 3844; л) 8 і 3096; м) 24 і 8736.

4.2. а) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24; б) 1, 5, 25, 2, 10, 50; в) 1, 5, 25, 2, 10, 50, 4, 20, 100; г) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360; д) 1, 5, 25, 125, 3, 15, 75, 375.

4.3. а) 20; б) 1, якщо $\tau(n) = 1$; p , якщо $\tau(n) = 2$; p^2 , якщо $\tau(n) = 3$; p^3 або pq , якщо $\tau(n) = 4$; p^4 , якщо $\tau(n) = 5$; p^5 або p^2q , якщо $\tau(n) = 6$, де скрізь p і q — різні прості числа; в) 675; г) 200; д) 192; е) 192; є) 180; ж) 45 360; з) 18; к) $2^8 3^5 5^4$; л) 120; м) $3^3 5^4$; н) 1 400.

4.4. а) $m = 2^k$, де k — довільне натуральне число.

4.5. а) 28; б) 160 або 169; в) 280.

4.9. а) 16; б) 30; в) 40; г) 80; д) 200; е) 500; є) 192; ж) 400; з) 320.

4.10. а) 8; б) 12; в) 24; г) 40; д) 66; е) 20; є) 2.

4.12. а) $x = 16, 24, 20, 30, 15$; б) $x = 36, 28, 13, 26, 21, 42$; в) розв'язків немає; г) $x = 2$ при $p = 2$; $x = p$, $x = 2p$ при $p > 2$; д) $x = 2^{k+1}$; $2^k \cdot 3$; $2^{k-1} \cdot 5$; $2^{k-2} \cdot 15$ при $k \geq 2$; $x = 15$ при $k = 3$; е) $x = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$; є) $x = 2^k \cdot 3^l$, $k, l \in \mathbb{N}$; ж) розв'язків немає; з) $x = 5^k$, $k \in \mathbb{N}$; к) $x = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$ л) $x = 2^k \cdot s$, де $k, s \in \mathbb{N}$ і $(s, 6) = 1$; м) $x = 3$.

4.13. а) 7875; б) 143; в) 14 161; г) 741 125; д) 343; е) 67 375; є) 143, 183, 225, 244, 248; ж) при $p \neq 3$ розв'язків немає, при $p = 3$ за k можна взяти будь-яке натуральне число, відмінне від 1.

4.15. а) 2; б) -3; в) -1; г) 2; д) 4; е) 3; є) 5; ж) 4; з) -2; к) -3; л) 2.

4.16. а) 0, 14; б) 0,86; в) 0,5; г) 0,6; д) 0,5; е) 0,15; є) 0,4; ж) $\frac{5}{7}$.

4.17. а) $[2, 3x] = 3$, тоді $2, 3x - a = 3$ або $2, 3x = 3 + a$, де $0 < a < 1$. Отже,

$3 < 2, 3x < 4$, тоді $\frac{3}{2,3} < x < \frac{4}{2,3}$. Остаточно маємо $x \in \left[\frac{30}{23}; \frac{40}{23} \right]$; б) $x \in \left[\frac{50}{32}; \frac{60}{32} \right]$;

в) $x = \frac{m + a}{a}$, де $0 < a < 1$; г) $x = 7$; д) $x \in [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; е) $x = 1$; є) $x = 0$; $1 \frac{1}{3}$;

$2 \frac{1}{3}$; ж) $x = 0; 1$; з) $x \in \emptyset$; к) $x \in [my; (m-1)(y+1)]$, де y — ціле число, причому $y < m - 1$.

4.18. а) Нехай $x = [x] + r$ і $y = [y] + s$, де $0 < r < 1$ і $0 < s < 1$. Тоді $x + y = [x] + [y] + (r + s)$. Якщо $0 < r + s < 1$, то $[x + y] = [x] + [y]$. Якщо $1 < r + s < 2$, то $[x + y] > [x] + [y]$. Отже, $[x + y] \geq [x] + [y]$; в) якщо $p = 4k + 1$,

то $\left[\frac{p}{4} \right] = k = \frac{p-1}{4}$; якщо $p = 4k + 3$, то $\left[\frac{p}{4} \right] = k = \frac{p-3}{4}$; г) $a = mq + r$, де

$0 < r < m$. Тоді $\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}$, де $0 < \frac{r}{m} < 1$, звідки $q = \left[\frac{a}{m} \right]$ і тому $\left[\frac{a}{m} \right] = \frac{a-r}{m}$;

з) використати твердження з п. а) цієї задачі; к) розглянути випадки $m = 4k + 1$, $m = 4k + 3$.

4.19. а) 48; б) 98; в) 832; г) 13 589.

4.20. а) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; б) $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$; в) $2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \times + 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$; г) $2^{71} \cdot 3^{36} \cdot 5^{18} \cdot 7^{11} \cdot 11^6 \cdot 13^8 \cdot 17^4 \times \times 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73$; д) $2^3 \cdot 11 \cdot 13 \times \times 17 \cdot 19$.

4.21. а) 12; б) 28; в) 494.

4.24. а) $\left[\frac{10^7}{786} \right] - \left[\frac{10^8}{786} \right] = 11450$;

б) $999 - \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{7} \right] + \left[\frac{\left[\frac{999}{5} \right]}{7} \right] = 686$;

в) $100 - \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{6} \right] = 33$;

г) 1378; д) 5634; е) 393.
4.25. 30.

§ 5

5.1. а) [1; 3, 1, 1, 2], $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{7}, \frac{23}{18}$;

б) [1; 1, 8, 2], $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{17}{9}, \frac{36}{19}$;

в) [2; 1, 1, 4, 2], $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{23}{9}, \frac{51}{20}$;

г) [-2; 1, 1, 2, 1, 5], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{5}, -\frac{10}{7}, -\frac{57}{40}$;

д) [-2; 2, 1, 3, 1, 1, 4, 3], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{2}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{18}{11}, -\frac{23}{14}, -\frac{41}{25},$
 $-\frac{187}{114}, -\frac{602}{367}$;

е) [-6; 1, 1, 28], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{6}{1}, -\frac{5}{1}, -\frac{11}{2}, -\frac{313}{57}$;

е) [3; 1, 1, 1, 4, 10], $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{51}{14}, \frac{521}{143}$;

ж) [-1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 6], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{8},$
 $-\frac{5}{13}, -\frac{13}{34}, -\frac{83}{217}$;

з) [-1; 2, 2, 1, 1, 6, 2], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, -\frac{7}{12}, -\frac{46}{79},$
 $-\frac{99}{170}$;

к) [0; 2, 1, 2], $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}$;

л) [-1; 1, 1, 4, 1, 1, 1, 10], $\frac{P_k}{Q_k} = -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{9}, -\frac{5}{11}, -\frac{9}{20},$
 $-\frac{14}{31}, -\frac{149}{330}$;

5.2. а) $\frac{20}{31}$; б) $\frac{131}{583}$; в) $\frac{7}{23}$; г) $\frac{97}{113}$; д) $\frac{17}{83}$; е) $\frac{359}{113}$; е) $\frac{883}{271}$; ж) $\frac{73}{1201}$;
з) $-\frac{234}{195}$; к) $-\frac{271}{100}$; л) $\frac{2}{3}$.

5.3. а) $\frac{105}{38}$; б) $\frac{245}{83}$; в) $\frac{64}{25}$; г) $\frac{73}{43}$; д) $\frac{99}{464}$; е) $-1\frac{11}{50}$; е) $-2\frac{11}{29}$; ж) $-4\frac{25}{41}$;
з) $\frac{2633}{1810}$; к) $\frac{a^4 + 4a^3 + 3a}{a^4 + 3a^2}$; л) $\frac{a^3b^2 + 4a^2b + 3a}{a^2b^2 + 3ab + 1}$

5.4. Використати те, що

$$\frac{a}{(a, b)} = P_n, \frac{b}{(a, b)} = Q_n, P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n.$$

5.6. а) $\frac{29}{37} \approx \frac{7}{9} (+0,01) = 0,78$. Знак похибки «+», оскільки $\frac{P_4}{Q_4} < \frac{a}{b}$;

б) $\frac{648}{385} \approx \frac{69}{41} (+0,0003) \approx 1,6830$; в) $\frac{571}{359} \approx \frac{35}{22} (-0,0005) \approx 1,5909$. Знак похибки

«-», оскільки $\frac{P_5}{Q_5} > \frac{a}{b}$.

5.7. а) $\frac{85}{31}$ з надвишком; б) $\frac{277}{101}$ з недостатчею.

5.8. а) $x = \left[\frac{73}{30} \right] = 2$; б) $x = 2$.

5.9. [1; 1, 1, 4, 3]. Розкласти $\frac{14}{9}$ в ланцюговий дріб.

5.10. $q_2 = 3$.

5.11. Замінити дріб $\frac{587}{113}$ підхідним дробом з похибкою, яка не перевищує

0,001. $\frac{587}{113} = [5; 5, 7, 3]$. Підхідні дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{5}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{26}{5}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{187}{86}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{587}{113}.$$

Якщо взяти дріб $\frac{26}{5}$, то похибка становитиме $\frac{1}{5 \cdot 36} = \frac{1}{180} \approx 0,006$. Оскільки $0,006 > 0,001$, то дріб $\frac{26}{5}$ не підходить. Беремо дріб $\frac{187}{36}$. Знаходимо похибку

$\frac{1}{36 \cdot 113} = \frac{1}{4068} \approx 0,0003 < 0,001$. Отже, можна побудувати передачу за допомогою валів з кількістю зубців 187 і 36, що технічно можливо. а) 22 і 7; б) 163 і 51.

5.12. а) $x = -8360 - 117t, y = 2717 + 38t, t \in \mathbb{Z}$;

б) $x = -2 + 4t, y = -4 + 7t, t \in \mathbb{Z}$;

в) $x = -125 - 114t, y = 45 + 41t, t \in \mathbb{Z}$;

г) $x = 1 - 9t, y = 39 + 49t, t \in \mathbb{Z}$;

д) $x = 9 + 31t, y = 2 - 12t, t \in \mathbb{Z}$;

е) $x = 75 + 23t, y = -120 - 37t, t \in \mathbb{Z}$;

є) $x = 4 + 17t, y = -11 - 53t, t \in \mathbb{Z}$;

ж) $x = -15 - 39t, y = -25 - 64t, t \in \mathbb{Z}$;

з) $x = -15 + 37t, y = 18 - 43t, t \in \mathbb{Z}$;

к) $x = 1270 + 359t, y = -2020 - 571t, t \in \mathbb{Z}$.

5.13. а) Розв'язків немає; б) $x = 4 + 42t, y = 23t, t \in \mathbb{N}$; в) $x = 3, y = 5$.

5.14. 56 і 44.

5.15. 19 дощок 11 см завширшки і 7 дощок 13 см завширшки або 6 дощок 11 см завширшки і 18 дощок 13 см завширшки.

5.16. 2 мішки по 60 кг і 4 мішки по 80 кг.

5.17. $3 - 5t$ білетів по 30 коп. і $28 + 3t$ білетів по 50 коп., де $-9 < t < 0$.

5.18. Горобців — 9, горлиць — 10, голубів — 11.

5.19. (0, 18, 8); (1, 16, 9); (2, 14, 10); (3, 12, 11); (4, 10, 12); (5, 8, 13); (6, 6, 14); (7, 4, 15); (8, 2, 16); (9, 0, 17).

5.20. а) [1; (2)]; б) [1; (1, 2)]; в) [2, (4)]; г) [2; (2, 4)]; д) [2; (1, 1, 1, 4)]; е) [2; [1, 4)]; є) [3; (6)]; ж) [3; (3, 6)]; з) [3; (2, 6)]; к) [3; (1, 1, 1, 1, 6)]; л) [5; (3, 2, 3, 10)]; м) [5; (2, 10)]; н) [7; (1, 2, 7, 2, 1, 14)].

5.21. а) [(2)]; б) [(1, 2)]; в) [1; (2, 2, 1, 12, 1)]; г) [2; (1)]; д) [1; (1, 1, 4, 1)]; е) [2; (18, 2)]; є) [1; 7, (1, 6)]; ж) [-5; 2, (3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1)]; з) [3; (3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5)]; к) [2; 7, (2, 6)]; л) [0; 14, (8, 1, 2, 1, 8, 13)]; м) [1; 1, 1, (2, 2, 1, 12, 1, 2)]; н) [2; 1, 4, (5, 3)].

5.22. а) $\frac{\sqrt{3+1}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{13-1}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{29-1}}{2}$; г) $\sqrt{5}-2$; д) $\frac{\sqrt{53}-7}{2}$;

е) $1 + \sqrt{1}$, (6); е) $\sqrt{33} - 2,5$; ж) $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; к) $2(\sqrt{2}-1)$;

л) $1 + \sqrt{3}$; м) $\frac{\sqrt{15}}{3}$; н) $\frac{\sqrt{2}+3}{6}$.

5.23. а) $\frac{\sqrt{37}-3}{4}$; б) $\frac{\sqrt{7925}-69}{14}$; в) $\frac{5\sqrt{13}-13}{3}$; г) $\frac{\sqrt{101}-1}{4}$;

д) $\frac{\sqrt{37}-1}{3}$; е) $\frac{\sqrt{37}+3}{4}$; е) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; ж) $\frac{2(\sqrt{14}+2)}{5}$; з) $\frac{25-\sqrt{61}}{4}$;

к) $\frac{29+\sqrt{21}}{10}$; л) $\frac{138-\sqrt{5}}{79}$; м) $\frac{18+\sqrt{506}}{28}$; н) $\frac{4\sqrt{95}-18}{13}$.

5.24. а) $x^2 - 102 = 0$; б) $x^2 - 92 = 0$; в) $x^2 - x - 4 = 0$; г) $10x^2 - 17x - 5 = 0$; д) $19x^2 - 37x - 11 = 0$; е) $2x^2 - 15x + 26 = 0$; е) $16x^2 - 32x + 13 = 0$.

5.25. а) $x = \sqrt{q^2 + 1}$; б) $x = \sqrt{q^2 + 2}$.

5.26 а) $[q; (2q)]$; б) $[q^2; (q, 2q^2)]$; в) $[q; (1, q-1, 1, 2q)]$; г) $[q^2; (q^2, 2q^2)]$.

5.27 а) $\frac{587}{103} = [5; 1, 2, 3, 10] \approx 5,7(+0,0002)$;

б) $3,14159 = [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4] \approx \frac{355}{113} (+0,000004)$;

в) $\frac{2}{3} (+0,07) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{2}{37} (+0,00005) = \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$.

5.28 а) $x_1 \approx \frac{349}{73} (-0,0001) \approx 4,7808$, $x_2 \approx \frac{155}{57} (-0,0001) \approx 2,7192$;

б) $x_1 \approx -\frac{29}{40} (-0,0001) \approx -0,7250$, $x_2 \approx -\frac{331}{40} (-0,0001) \approx -8,2750$;

в) $x_1 \approx -\frac{211}{80} (-0,0001) \approx -2,6375$, $x_2 \approx \frac{311}{301} (-0,0001) \approx 1,0332$;

г) $x_1 \approx \frac{593}{130} (-0,0001) \approx 4,5615$, $x_2 \approx \frac{57}{130} (+0,0001) \approx 0,4384$;

д) $x_1 \approx -\frac{251}{125} (+0,0001) \approx -2,008$, $x_2 \approx -\frac{449}{140} (+0,0001) \approx -3,2071$.

5.29. $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{4}{3}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{4}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{29}{23}$.

5.31. $\frac{28}{28}$.

5.31. а) $[5; (2, 10)] \approx \frac{241}{44}$; б) $[7; (1, 2, 7, 2, 1, 14)] \approx \frac{530}{69}$;

в) $[2; (1, 4, 1, 1)] \approx \frac{271}{96}$; г) $[(1; 12, 1, 1, 1, 2, 1, 1)] \approx \frac{109}{101}$.

5.32. а) Через x позначити дріб $\frac{1}{[(b, a)]}$. Тоді $[(a, b)] = a + x$ і треба довести, що $x(a+x) = \frac{a}{b}$. Оскільки $x = \frac{1}{b + \frac{1}{a+x}}$, то в результаті перетворень маємо $x^2 + ax - \frac{a}{b} = 0$, тобто $x(a+x) = \frac{a}{b}$;

в) Показати, що $\frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a} = [a; a, a, a]$. Якщо дріб $[a; a, a, a]$ обчислити, то дістанемо $\frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a}$, що свідчить про нескоротність останнього; г) якщо $(P_n, P_{n-1}) = d$, то $P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}$, звідки $(P_{n-1}, P_{n-2}) = d$. При $n = 2$ маємо $d = (P_1, P_0) = (q_1 q_0 + 1, q_0) = 1$. Твердження $(Q_n, Q_{n-1}) = 1$ доводять аналогічно; д) використати результати задачі 5.32, г); е) застосувати

формули $P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$ і $Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ при $k = n+2$ і $k = n+1$;
 е) використати індукцію за числом n ; ж) використати індукцію за числом n і співвідношення $Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} > 2Q_{n-2}$;

л) Знак різниці

$$\alpha - \frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}} = \frac{q_{n+2} P_{n+1} + P_n}{q_{n+2} Q_{n+1} + Q_n} - \frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n (q_{n+2} - 1)}{(q_{n+2} Q_{n+1} + Q_n)(Q_n + Q_{n+1})}$$

залежить від парності n ; $\frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}} < \alpha$ при $n = 2k$, $\alpha < \frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}}$ при

$n = 2k + 1$. Дріб $\frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}}$ лежить між α і $\frac{P_n}{Q_n}$. Тоді

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \left| \frac{P_n + P_{n+1}}{Q_n + Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n+1})}.$$

Зауваження. Встановлена нерівність дає нижню границю для $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right|$ і, отже, доповнює відому нерівність

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}};$$

м) Твердження випливає з рівності

$$\frac{(q_n + m) P_{n-1} + P_{n-2}}{(q_n + m) Q_{n-1} + Q_{n-2}} - \frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = (-1)^{n-2} \cdot m \cdot \frac{1}{A},$$

де $A > 0$ — добуток знаменників підхідних дробів;

5.33. а) $\frac{ab + \sqrt{a^2 b^2 + 4ab}}{2b} = [(a, b)];$

б) маємо рівняння $bx^2 - abx - a = 0$ (див. задачу 5.32, а)). Сума коренів цього рівняння дорівнює a , звідки $x_2 = a - [(a, b)] = \frac{1}{[(b, a)]}$;

в) оскільки $x = [a; (b, c)] = a + \frac{1}{[(b, c)]}$, то $[(b, c)] = \frac{1}{x-a}$. Число $[(b, c)]$ є коренем рівняння $cx^2 - bcx - b = 0$ (див. задачу 5.33, б)). Отже, другий корінь можна знайти з умови $\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{[(c, b)]}$, звідки $x = a - [(c, b)]$;

г) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ab+1}{bc+1}$. Числа x і y задовольняють умову

$$(bc+1)x^2 - (abc+a+c-b)x - (ab+1) = 0,$$

$$(ab+1)y^2 - (abc+a+c-b)y - (bc+1) = 0,$$

звідки $\frac{x}{y} = \frac{ab+1}{bc+1}$, отже $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y}$;

д) Якщо $\sqrt{m} = [q_0; q_1, q_2, \dots]$, то $q_0 + \sqrt{m} = [2q_0; q_1, q_2, \dots] > 1$ і $-1 < q_0 - \sqrt{m} < 0$. Отже, $q_0 + \sqrt{m}$ виражається чистим періодичним ланцюговим дробом, тобто $q_0 + \sqrt{m} = [(2q_0; q_1, q_2, \dots, q_n)]$. Тоді $\sqrt{m} = [q_0; (q_1, q_2, \dots, q_n)]$.

5.34. а) $\alpha = \frac{10\sqrt{2} + P_{k-1}}{3\sqrt{2} + Q_{k-1}}, \frac{P_k}{Q_k} = [3; 3], \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{3}{1}.$

$$a = \frac{10\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}+1} = \frac{57-\sqrt{2}}{17};$$

$$\text{б) } a = [2; 1, 5, 2, 1, (2, 1)] = \frac{51+4\sqrt{3}}{23}.$$

$$\text{б.35. Якщо } x = [a; a, a, \dots] = [a, x], \text{ то } x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

§ 6

6.1. а) 64; б) 159; в) 596; г) 1205; д) 1429; е) 1874.

6.2. а) XXVI; б) CXII; в) MCMLXXX.

6.3. а) 10^9 ; б) 10^{12} ; в) 10^{15} .

6.4. а) $11\,000_2$; б) $10\,001\,111_2$; в) $101\,011_2$; г) 111_2 ; д) $2\,255\,025_7$; е) $3(10)94\,913_{12}$; ж) $30\,413_7$; з) $190\,000_{12}$; и) 56_7 і остача 202_7 ; к) $(10)94_{12}$ і 87_{12} в остачі; л) $2,4_8$.

6.5. а) $100\,001_2$; б) $11, 11\,101_2$; в) $100\,000, 11\,001_2$; г) $0, 1337_8$; д) $11, 14_8$.

6.6. а) 1_8 ; б) 1_6 ; в) 1_8 ; г) 1_5 ; д) 1_5 ; е) 1_8 ; є) 1_3 ; ж) 1_7 ; з) 1_7 ; к) 1_8 ; л) 1_4 ; м) 1_8 ; н) 1_6 .

6.7. а) 39; б) 205; в) 229; г) 2617; д) 704; е) 8387; є) 1668; ж) 1523; з) 6871; к) 5669; л) 42 923.

6.8. а) 0,875; б) 0,75; в) 25,9365; г) 287,388671875; д) 0,044921875.

6.9. а) $4(10)2(11)_{12}$; б) 230 578₉; в) 11 202 102 120 100₃; г) 367 341₈;

д) $10\,001\,000\,110\,110\,111\,101\,100_2$; е) $2\,121\,311_5$; є) 4126_8 .

6.10. а) $11\,111\,111\,010_2 = 221\,0122_3 = 31\,132_5$; б) $1\,010\,111\,000\,010_2 = 10\,211\,012_3 = 42\,121_5$; в) 2061_7 ; г) $1\,653\,212_7$; д) $55\,173_8$; е) $42\,167_8$.

6.11. а) 4; б) 5; в) 9; г) 9; д) 5; е) 9; є) 7; ж) 6; з) 5.

6.12. а) 5; б) 8; в) 6; г) 7; д) 7; е) 7; є) 7; ж) 9; з) 6; к) будь-яка основа $g, g \geq 2$.

6.14. а) $(\underbrace{100\dots 01}_p)_2$; б) $(\underbrace{11\dots 11}_p \underbrace{00\dots 00}_{p-1})_2$.

6.15. $x = 2, y = 4$.

6.16. а) $724\bar{3} \cdot 29 = 210\,047$.

6.17. 153 846.

6.18. $x_1 = 0, y_1 = 8; x_2 = 8, y_2 = 0$.

6.19. 361.

6.21. $(xyz)_{10} = 150, g = 15$.

6.22. $63_{10} = 77_8 = 333_4 = 111\,111_2$.

Розділ II

§ 7

7.1. Усі множини, крім множин з) і м). Усі кільця з одиницями. Кільця б), г), є), ж) містять одиницю при $m = \pm 1$. Дільники одиниці: а) 1, -1; б) 1, -1 при $m = \pm 1$; в) $\pm (3 + 2\sqrt{2})^n$, де $n \in \mathbb{Z}$; д) 1, -1, $i, -i$; е) 1, -1, $i, -i$ при $m = \pm 1$; є) 1, -1; ж) 1, -1 при $m = \pm 1$; к) 1, -1; л) усі ненульові елементи; н) 1, -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

7.4. Усі множини, крім а), є кільцями. Усі кільця, крім є), ж), л), містять одиничний елемент. Дільники одиниці: б) такі матриці A , що $|A| = \pm 1$; в), г), д) будь-яка невідроджена матриця; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; з) будь-яка ненульова матриця; к) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; м) будь-яка ненульова матриця;

н) будь-яка ненульова матриця. Дільники нуля мають б) — е), це вироджені ненульові матриці. Комутативними є кільця є) — н).

7.5. Усі множини є кільцями. Всі кільця, крім б) — д), є комутативними і містять одиницю. Дільники одиниці: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

е) будь-яка ненульова матриця; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, де b — довільне ціле число; к) матриці виду $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & b & c \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Дільники нуля: а) немає;

б) — д) усі ненульові матриці; е) немає; е) матриці виду $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$, де $a \neq 0$; ж) матриці виду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де $a, b \neq 0$; з) довільна матриця виду $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$; к) матриці виду

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } b^2 + c^2 \neq 0.$$

7.6. Кільцем є тільки а).

7.7. Не утворюють кільце множини з пп. б), д). Усі кільця комутативні. Дільники одиниці: а) усі елементи (одиницею в цьому кільці є пара $(0, 0)$); в) немає одиниці; г) $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ (одиницею тут є $(1, 1)$); е) — ж) $(1, 0)$, $(-1, 0)$; (одиниця тут $(1, 0)$). Дільники нуля: а) усі пари, крім нульової $(1, 1)$ і одиничної $(0, 0)$; в) усі пари, крім нульової $(0, 0)$; г) $(a, 0)$, $(0, b)$, де $a, b \neq 0$; е) (a, a) , $(a, -a)$, де $a \neq 0$; е), ж) дільників нуля немає.

7.10. Областями цілісності є 7.1: а), б) при $m = 1$; в), г) при $m = 1$; д), е) при $m = 1$; е), ж) при $m = 1$; к), л), н; 7.4: е), з), к), м), н); 7.5: а), е); 7.7: е), ж). Полями є 7.1: л); 7.4: з), м), н); 7.5: е).

7.11. Дільниками нуля є вирази виду $a + ae$, $a \neq 0$.

7.12. Дільниками нуля є вирази виду be , $b \neq 0$.

§ 8

8.1. а) Двосторонні ідеали; б) двосторонній ідеал; в) лівий ідеал; г) правий ідеал; д) двосторонній ідеал; е) двосторонній ідеал; е) двосторонній ідеал; ж) двосторонній ідеал; з) двосторонній ідеал; к) двосторонній ідеал; л) двосторонній ідеал.

8.2. а) Правий ідеал; б) правий ідеал; в) лівий ідеал; г) двосторонній ідеал; д) не є ідеалом при $a \neq 0$; е) не є ідеалом при $a \neq 0$ і $b \neq 0$; е) двосторонній ідеал; ж) не є ідеалом при $a \neq 0$; з) не є ідеалом при $a \neq 0$.

8.5. а) $\langle 1 \rangle = Z$; б) $\langle 6 \rangle$; в) $\langle 6 \rangle$; г) $\langle 3 \rangle$; д) $\langle 6 \rangle$; е) $\langle 2 \rangle$; ж) $\langle 20 \rangle$; з) $\langle 40 \rangle$; к) $\langle 1 \rangle = Z$; л) $\langle 35 \rangle$; м) $\langle 35 \rangle$.

8.8. а) $\langle 1 \rangle = Z$; б) $\langle 2 \rangle$; в) $\langle 3 \rangle$; г) $\langle 1 \rangle = Z$; д) $\langle 2 \rangle$; е) $\langle 1 \rangle = Z$; е) $\langle 2 \rangle$.

8.10. Використати задачу 8.3, в); $a \equiv b \pmod{0}$ тоді і тільки тоді, коли числа a і b дорівнюють одне одному.

8.11. Для фактор-кільця $Z_2 = Z/\langle 2 \rangle$ маємо табл. 47, 48. Дільник нуля в Z_2 немає; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$.

Таблиця 47

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Таблиця 48

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Для Z_3 — табл. 49, 50.

Таблиця 49

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Таблиця 50

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Дільник нуля в Z_3 немає; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$; $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$.

Для Z_4 — табл. 51, 52.

Таблиця 51

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Таблиця 52

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Дільник нуля $\bar{2}$; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$; $\bar{3}^{-1} = \bar{3}$.

Для Z_5 — табл. 53, 54.

Таблиця 53

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Таблиця 54

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Дільників нуля в Z_5 немає; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$.

8.12. Z_2, Z_3 і Z_5 .

8.14. а) $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$; б) $\bar{3}, \bar{6}$; в) $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}$; г) $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}$; д) $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}$; е) $\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{12}$; е) $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}$.

8.15. а) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{6}^{-1} = \bar{6}$; б) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$; в) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{8}^{-1} = \bar{8}$; г) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{9}^{-1} = \bar{9}$; д) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{6}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{9}$, $\bar{6}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{8}$, $\bar{8}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{9}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{10}^{-1} = \bar{10}$; е) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$; $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{11}^{-1} = \bar{11}$; е) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{9}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{10}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{8}$, $\bar{6}^{-1} = \bar{11}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{8}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{9}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{10}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{11}^{-1} = \bar{6}$, $\bar{12}^{-1} = \bar{12}$; ж) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{9}^{-1} = \bar{11}$, $\bar{11}^{-1} = \bar{9}$, $\bar{13}^{-1} = \bar{13}$; з) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{8}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{13}$, $\bar{8}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{11}^{-1} = \bar{11}$, $\bar{13}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{14}^{-1} = \bar{14}$; к) $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{11}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{13}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$, $\bar{9}^{-1} = \bar{9}$, $\bar{11}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{13}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{15}^{-1} = \bar{15}$.

8.16. а) $Z[i]/\langle 2 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{i}, \overline{1+i}\}$, де $\bar{0} = 0 + \langle 2 \rangle = \{2k + 2si \mid k, s \in \mathbb{Z}\}$, $\bar{1} = 1 + \langle 2 \rangle = \{2k + 1 + 2si \mid k, s \in \mathbb{Z}\}$, $\bar{i} = i + \langle 2 \rangle = \{2k + (2s + 1)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\}$, $\overline{1+i} = 1 + i + \langle 2 \rangle = \{2k + 1 + (2s + 1)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\}$.

Таблиці додавання і множення (табл. 55, 56).

Таблиця 55

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	\bar{i}	$\overline{1+i}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	\bar{i}	$\overline{1+i}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\overline{1+i}$	\bar{i}
\bar{i}	\bar{i}	$\overline{1+i}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\overline{1+i}$	$\overline{1+i}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Таблиця 56

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	\bar{i}	$\overline{1+i}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	\bar{i}	$\overline{1+i}$
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\overline{1+i}$
$\overline{1+i}$	$\bar{0}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+i}$	$\bar{0}$

Дільник нуля $\overline{1+i}$; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{i}^{-1} = \bar{i}$. б) $Z[i]/\langle 3 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{i}, \bar{2i}, \overline{1+i}, \overline{1+2i}, \overline{2+i}, \overline{2+2i}\}$, де

$$\bar{0} = 0 + \langle 3 \rangle = \{3k + 3si \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{1} = 1 + \langle 3 \rangle = \{3k + 1 + 3si \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{2} = 2 + \langle 3 \rangle = \{3k + 2 + 3si \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{i} = i + \langle 3 \rangle = \{3k + (3s + 1)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{2i} = 2i + \langle 3 \rangle = \{3k + (3s + 2)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{1+i} = 1 + i + \langle 3 \rangle = \{3k + 1 + (3s + 1)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{1+2i} = 1 + 2i + \langle 3 \rangle = \{3k + 1 + (3s + 2)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{2+i} = 2 + i + \langle 3 \rangle = \{3k + 2 + (3s + 1)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{2+2i} = 2 + 2i + \langle 3 \rangle = \{3k + 2 + (3s + 2)i \mid k, s \in \mathbb{Z}\}.$$

Таблиці додавання і множення для елементів $Z[i]/\langle 3 \rangle$ (табл. 57, 58).

Таблиця 57

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$	\bar{i}	$\bar{2i}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$
\bar{i}	\bar{i}	$\overline{1+i}$	$\overline{2+i}$	$\bar{2i}$	$\bar{0}$	$\overline{1+2i}$	\bar{i}	$\overline{2+2i}$	$\bar{2}$
$\bar{2i}$	$\bar{2i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{0}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\overline{1+i}$	$\bar{2}$	$\overline{2+i}$
$\overline{1+i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{2+i}$	\bar{i}	$\overline{1+2i}$	$\bar{1}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{2}$	$\bar{2i}$	$\bar{0}$
$\overline{1+2i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{2i}$	$\bar{1}$	$\overline{1+i}$	$\bar{2}$	$\overline{2+i}$	$\bar{0}$	\bar{i}
$\overline{2+i}$	$\overline{2+i}$	\bar{i}	$\overline{1+i}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{2}$	$\bar{2i}$	$\bar{0}$	$\overline{1+2i}$	$\bar{1}$
$\overline{2+2i}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{2i}$	$\overline{1+2i}$	$\bar{2}$	$\overline{2+i}$	$\bar{0}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\overline{1+i}$

Таблиця 58

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{2+2i}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2i}$	\bar{i}	$\overline{2+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{1+i}$
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\overline{2+i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{2+2i}$	$\overline{1+2i}$
$\bar{2i}$	$\bar{0}$	$\bar{2i}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{2+i}$
$\overline{1+i}$	$\bar{0}$	$\overline{1+i}$	$\overline{2+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{1+2i}$	$\bar{2i}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	\bar{i}
$\overline{1+2i}$	$\bar{0}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{2+2i}$	$\bar{2}$	\bar{i}	$\bar{2i}$	$\bar{1}$
$\overline{2+i}$	$\bar{0}$	$\overline{2+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+2i}$	$\overline{1+i}$	$\bar{1}$	$\bar{2i}$	\bar{i}	$\bar{2}$
$\overline{2+2i}$	$\bar{0}$	$\overline{2+2i}$	$\overline{1+i}$	$\overline{1+2i}$	$\overline{2+i}$	\bar{i}	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2i}$

Дільників нуля немає; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{i}^{-1} = \bar{2i}$, $\bar{2i}^{-1} = \bar{i}$, $\overline{1+i}^{-1} = \overline{2+i}$, $\overline{1+2i}^{-1} = \overline{2+2i}$, $\overline{2+i}^{-1} = \overline{1+i}$, $\overline{2+2i}^{-1} = \overline{1+2i}$; в) $\langle 2 \rangle = \langle 2 \rangle$; г) $\langle -3i \rangle = \langle 3 \rangle$; д) $\langle i \rangle = Z[i]$ і тому $Z[i] \langle i \rangle = \{Z[i]\} = \{0\}$.

8.17. а) 16 елементів; дільники нуля; $\bar{2}$, $\bar{2}i$, $\overline{1+i}$, $\overline{2+2i}$, $\overline{3+i}$, $\overline{3+3i}$;
 $\bar{i}^{-1} = \bar{3}i$, $\bar{3}i^{-1} = \bar{i}$, $\overline{1+2i}^{-1} = \overline{1+2i}$;

б) 25 елементів; дільники нуля; $\overline{1+2i}$, $\overline{1+3i}$, $\overline{2+i}$, $\overline{2+4i}$, $\overline{3+i}$,
 $\overline{3+4i}$, $\overline{4+2i}$, $\overline{4+3i}$; $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{4}i^{-1} = \bar{i}$, $\overline{3+2i}^{-1} = \overline{1+i}$;

в) 36 елементів; дільники нуля; $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{2}i$, $\bar{3}i$, $\bar{4}i$, $\overline{1+i}$, $\overline{1+3i}$,
 $\overline{1+5i}$, $\overline{2+2i}$, $\overline{2+4i}$, $\overline{3+i}$, $\overline{3+3i}$, $\overline{3+5i}$, $\overline{4+2i}$, $\overline{4+4i}$, $\overline{5+i}$, $\overline{5+3i}$,
 $\overline{5+5i}$; $\bar{2} + \bar{5}i^{-1} = \bar{2} + \bar{3}i$, $\bar{4} + \bar{i}^{-1} = \bar{2} + \bar{i}$.

8.18. $Z[\sqrt{3}]/2Z[\sqrt{3}] = \{\bar{0}, \bar{1}, \sqrt{3}, \overline{1+\sqrt{3}}\}$, де $\bar{0} = 0 + 2Z[\sqrt{3}] = \{2k + 2s\sqrt{3} | k, s \in Z\}$, $\bar{1} = 1 + 2Z[\sqrt{3}] = \{2k + 1 + 2s\sqrt{3} | k, s \in Z\}$, $\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2Z[\sqrt{3}] = \{2k + (2s+1)\sqrt{3} | k, s \in Z\}$, $\overline{1+\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} + 2Z[\sqrt{3}] = \{2k + 1 + (2s+1)\sqrt{3} | k, s \in Z\}$.

Таблиці додавання і множення (табл. 59, 60).

Дільник нуля $\overline{1+\sqrt{3}}$; $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\sqrt{3}^{-1} = \sqrt{3}$.

Таблиця 59

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Таблиця 60

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$
$\sqrt{3}$	$\bar{0}$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$
$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\bar{0}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\overline{1+\sqrt{3}}$	$\bar{0}$

§ 9

9.3. Оскільки в довільному полі P є тільки два ідеали $\{0\}$ і P , а ядро $\text{Кер } \varphi$ гомоморфізму φ двох полів P і P_1 повинно бути ідеалом в полі P , то при гомоморфному відображенні поля P на поле P_1 ці поля ізоморфні.

Зауваження. Якщо розглядати відображення поля в поле, то можливий ще очевидний гомоморфізм поля P в поле P_1 :

$$\psi(a) = 0_1 \text{ для будь-якого } a \in P.$$

9.4. Використати задачу 8.4, з).

$$9.6. \text{Кер } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in Z \right\}.$$

$$9.7. \text{Кер } \varphi = 3Z.$$

$$9.8. \text{Кер } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \in Q \right\}.$$

$$9.9. \text{Кер } \varphi = \{f \in K \mid f(1) = 0\}.$$

9.12. 1) Кільце класів лишків Z_4 ; 2) поле із задачі 7.3, г); 3) $0, 1, a, a+1$ при $1+1=0, a^2=a, a(a+1)=0, (a+1)^2=a+1$; 4) $0, 1, a, a+1$ при $1+1=0, a^2=0, (a+1)^2=1, a(a+1)=a$. Усі кільця комутативні.

9.13. Кільце складається з елементів $\{ma\}$; $m=0, 1, \dots, pq-1$. Елемент a можна вибрати так, що виконуватиметься один з чотирьох випадків: а) $a^2 = a$ (кільце, ізоморфне кільцю класів лишків); 2) $a^2 = 0$ (нульове множення); 3) $a^2 = pa$; 4) $a^2 = qa$.

§ 10

10.14. а) 1; б) 10; в) 3; г) 15; д) $((m, n, s), (k, t, f))$; е) $((m, n, s), (k, t, f))$.

10.15. а) $(4 + 3i, 3 + i) \sim 1 + 2i$, $[4 + 3i, 3 + i] \sim \frac{(4+i)(3+i)}{1=2^i} \sim 7 - i$;

б) $(6 + i, 5 + 7i) \sim 6 + i$, $[6 + i, 5 + 7i] \sim 5 + 7i$;

в) $(8 + 12i, 10 + 4i) \sim 2$; $[8 + 12i, 10 + 4i] \sim 16 + 76i$;

г) $(5 - 5i, 7 - i) \sim 3 + i$; $[5 - 5i, 7 - i] \sim -5 + 15i$;

д) $(11 - 3i, 3 + 7i) \sim 1 + i$, $[11 - 3i, 3 + 7i] \sim 61 + 7i$;

е) $(5 + 6i, 6 + 5i) \sim 1$; $[5 + 6i, 6 + 5i] \sim 61$;

е) $(7 + 3i, 5 + 2i) \sim 1$; $[7 + 3i, 5 + 2i] \sim 29 + 29i$.

10.16. а) $(7 + \sqrt{2}, -5 - 5\sqrt{2}) \sim 1$; $[7 + \sqrt{2}, -5 - 5\sqrt{2}] \sim 45 + 40\sqrt{2}$; б) $(5 + 2\sqrt{2}, 6 - \sqrt{2}) \sim 5 + 2\sqrt{2}$; $[5 + 2\sqrt{2}, 6 - \sqrt{2}] \sim 26 + 7\sqrt{2}$.

10.17. Для задачі 10.15: а) $d = 1 + 2i = (4 + 3i) \cdot 1 + (3 + i)(-1)$; б) $d = 6 + i = (6 + i) \cdot 1 + (5 + 7i) \cdot 0$; в) $d = 2 = (8 + 12i)(-1 - 3i) + (10 + 4i) \times (-1 + 4i)$;

г) $d = 3 + i = (7 - i)(-1) + (5 - 5i)(1 + i)$;

д) $d = 1 + i = (11 - 3i)(1 - 2i) + (3 + 7i)(1 + i)$;

е) $d = 1 = (5 + 6i)(-6) + (6 + 5i)(6 + i)$;

е) $d = 1 = (7 + 3i)(-2) + (5 + 2i) \cdot 3$.

Для задачі 10.16: а) $d = 1 = (7 + \sqrt{2})(-4 + 2\sqrt{2}) + (-5 - 5\sqrt{2})(9 - 7\sqrt{2})$; б) $d = 5 + 2\sqrt{2} = (5 + 2\sqrt{2}) \cdot 1 + (6 - \sqrt{2}) \cdot 0$.

10.18. а) Нехай z — ціле гауссове число і $\text{Nr}(z) = p$ — просте число. Якщо $z = xy$, де $x, y \in Z[i]$, то $p = \text{Nr}(z) = \text{Nr}(x) \cdot \text{Nr}(y)$. Оскільки $\text{Nr}(x)$ і $\text{Nr}(y)$ — натуральні числа і p — просте число, то або $\text{Nr}(x) = 1$, або $\text{Nr}(y) = 1$, тобто одне з чисел x або y є дільником одиниці в $Z[i]$. Це означає, що z є просте ціле гауссове число.

10.19. Показати, що $2 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^8} \frac{1}{2^8} = \dots$

10.20. Знайти елементи, які неоднозначно розкладаються на прості множники, довівши простоту множників та їхню неасоціййованість: а) $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$; б) $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$; в) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = (1 + \sqrt{17}i)(1 - \sqrt{17}i)$; г) $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = (1 + \sqrt{19}i)(1 - \sqrt{19}i)$.

10.21. Використати норму $\text{Nr}(a + b\sqrt{3}i) = a^2 + 3b^2$.

10.22. Використати норму $\text{Nr}(a + bi) = a^2 + b^2$.

10.24. а) $5 = (2 + i)(2 - i)$; б) $5 - 5i = (1 - i)(2 - i)(2 + i)$; в) $3 + i = (1 + i)(2 - i)$; г) $-90 + 180i = 3^2(1 + i)^2(2 + i)^2(2 - i)$; д) $-182 - 126i = 7(1 + i)^3(2 + i)^3$; е) $7 + 8i = 7 + 8i$; є) $41 = (4 + 5i)(4 - 5i)$.

Розділ III

§ 11

11.1. а) 216 і 21, 134 і 214; б) 135 і 225, 106 і 181, 167 і 452; в) 217 і 241.

11.2. а) 137, 620; б) 201; в) 234, 634.

11.9. а) 1; б) 1; в) 4; г) 0; д) 1; е) 1; є) 0; ж) 0; з) 1; к) 12; л) 3; м) 1; н) 71. Остача дорівнюватиме 36.

11.10. б) Нехай $11a + 2b \equiv 9 \pmod{9}$. Тоді $11a + 2b \equiv 0 \pmod{9}$. Домножимо цю конгруенцію на 12. Матимемо $132a + 34b \equiv 0 \pmod{19}$. Звідси $18a + 5b \equiv 0 \pmod{19}$, тобто $18a + 5b \equiv 19$.

11.12. Застосувати метод доведення «від супротивного». в) Нехай x_0, y_0, z_0 — розв'язок рівняння $24x + 36y = 61z$. Тоді $24x_0 + 36y_0 = 61z_0$. Якщо числа рівні, то вони конгруентні за будь-яким модулем. Отже, $(-1)^{x_0} + 1^{y_0} \equiv 1^{z_0} \pmod{5}$. Звідси $(-1)^{x_0} \equiv 0 \pmod{5}$, що неможливо.

11.14. а) k, l, m — будь-які; б) k, l, m одночасно парні або непарні; в) $k, l + 1, m$ одночасно парні або непарні.

11.15. а) 2; б) 9; в) 7; г) 3.

11.16. а) 88; б) 67; в) 24; г) 9; д) 27; е) 36; є) оскільки $9^{10} \equiv 1 \pmod{100}$, то $9^{10q+r} \equiv 9^r \pmod{100}$. Оскільки $9^9 \equiv 9 \pmod{10}$, то $9^{99} \equiv 9^9 \equiv 89 \pmod{100}$.

Шуканими цифрами є 8 і 9; ж) оскільки $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$, то $7^{100} \equiv 1 \pmod{100}$, звідки $7^{99} \equiv 7^{100q+89} \equiv 7^{89} \pmod{100}$. Проте $7^{88} \equiv 1 \pmod{100}$, тому $7^{89} \equiv 7 \pmod{100}$. Отже, шуканими цифрами є 0 і 7.

11.17. а) $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1, 2^{32} = (2^8)^4 = (256^2)^2 = 65536^2 \equiv 154^2 \equiv 23716 \equiv -1 \pmod{641}$. Отже, $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$. Справді, $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 \equiv 641 \cdot 6\,700\,417$;

б) Це твердження рівнозначне твердженню, що числа 2^{2^n} , $n = 2, 3, \dots$ закінчуються цифрою 6. Застосуємо метод математичної індукції. При $k = 2$ маємо $2^{2^2} = 16 \equiv 6 \pmod{10}$. Припустимо, що $2^{2^k} \equiv 6 \pmod{10}$ і доведемо, що $2^{2^{k+1}} \equiv 6 \pmod{10}$. Оскільки $(2^{2^k})^2 = 2^{2 \cdot 2^k} = 2^{2^{k+1}}$, то при піднесенні до квадрата конгруенції $2^{2^k} \equiv 6 \pmod{10}$ дістанемо $2^{2^{k+1}} \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10}$, що й треба було довести.

§ 12

12.1. а) 6; б) 27 і -3; в) 8; г) 65 і -2; д) 1; е) 7; є) 14 і -1; ж) 667 і -114; з) 55 і -1; к) 1; л) 14 і -3; м) 501 і -2; н) 37 і -14.

12.2. 0, 1, 2, ..., $m-1$, якщо m — модуль.

12.3. 0, $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{m-1}{2}$, якщо m — непарне число; 0, $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{m}{2} - 1\right), \frac{m}{2}$ або 0, $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{m}{2} - 1\right), -\frac{m}{2}$, якщо m — парне число.

12.4. 1, 2, ..., m , якщо m — модуль.

12.5. 0, -1, -2, ..., $-(m-1)$, якщо m — модуль.

12.6. -1, -2, ..., $-m$, якщо m — модуль.

12.7. Наприклад: а) 3; б) 0, 5; в) 3, 4, 5; г) 0, 9, 10, -1; д) 0, 1, 2, 3, 100; е) 36, 1, 2, 3, 4, 5; є) 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13; ж) 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, 12$; з) 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, 1; к) 10, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5$; л) 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13; м) -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14; -15, -16, -17; н) 20, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, -10$.

12.8. Використати відповіді до задач 12.2—12.7, виключивши у відповідних повних системах числа, не взаємно прості з модулем.

12.9. а), б), г), д), ж), з), к) — так; в), е), є) — ні.

12.10. а), в), г), д) — так; б), е) — ні.

12.13. а) $K_1^{(6)} = K_7^{(48)} \cup K_{13}^{(48)} \cup K_{19}^{(48)} \cup K_{25}^{(48)} \cup K_{31}^{(48)} \cup K_{37}^{(48)} \cup K_{43}^{(48)}$;
 $K_3^{(6)} = K_9^{(48)} \cup K_{15}^{(48)} \cup K_{21}^{(48)} \cup K_{27}^{(48)} \cup K_{33}^{(48)} \cup K_{39}^{(48)} \cup K_{45}^{(48)}$;
 $K_5^{(6)} = K_5^{(48)} \cup K_{11}^{(48)} \cup K_{17}^{(48)} \cup K_{23}^{(48)} \cup K_{29}^{(48)} \cup K_{35}^{(48)} \cup K_{41}^{(48)} \cup K_{47}^{(48)}$.

12.14. а) $K_2^{(3)}$; б) $K_3^{(4)}$; в) $K_2^{(5)}$; г) $K_3^{(7)}$; д) $K_2^{(8)}$; е) $K_3^{(9)}$; є) $K_3^{(10)}$; ж) $K_9^{(11)}$;
 з) $K_{15}^{(61)}$; к) не існує, оскільки $(198, 501) = 3 \neq 1$; л) $K_{472}^{(501)}$; м) $K_{1453}^{(1498)}$; $K_{98}^{(1693)}$.

§ 13

13.1. г), в) Теорема Ейлера не справджується.

13.2. г), л) Мала теорема Ферма не справджується.

13.3. а) 7; б) 1; в) 22; г) 5; д) 32; е) 29; ж) 19; з) 1; к) 1.

13.4. а) 2; б) 1, 4, 1, 4; в) 13; г) 7; д) 14; е) 14; ж) 65; з) 49.

13.5. а) 21; б) 22; в) 64; г) 21; д) 375.

13.6. а) 2; б) 6; в) 1; г) 5; д) 2; е) 0; ж) 2; з) 70; к) 7.

13.7. а) 01; б) 67; в) 31; г) 97; д) 01; е) 61; ж) 97; з) 76; к) 92; л) 84.

13.12. а) 0, якщо $a \equiv 5 \pmod{1}$, якщо не ділиться на 5; б) $\frac{1+m}{2}$; в) $\frac{1+m}{2}$, якщо

$$m = 4k - 1 \text{ і } \frac{3m+1}{4}, \text{ якщо } m = 4k + 1.$$

§ 14

14.1. а) $x \equiv 2 \pmod{3}$; б) розв'язків немає; в) $x \equiv 2 \pmod{5}$; г) $x \equiv 5 \pmod{7}$; д) $x \equiv 4, 9 \pmod{10}$; е) $x \equiv 3 \pmod{7}$; ж) $x \equiv 8 \pmod{11}$; з) $x \equiv 2, 5, 8, 11 \pmod{12}$.

14.2. а) $x \equiv 3 \pmod{13}$; б) розв'язків немає; в) $x \equiv 3, 10 \pmod{14}$; г) $x \equiv 2 \pmod{27}$; д) $x \equiv 6 \pmod{23}$; е) $x \equiv 3 \pmod{37}$; ж) $x \equiv 11 \pmod{41}$; з) $x \equiv 38 \pmod{51}$.

14.3. а) $x \equiv 4 \pmod{13}$; б) $x \equiv 3 \pmod{12}$; в) $x \equiv 10 \pmod{12}$; г) $x \equiv 14 \pmod{19}$; д) $x \equiv 13 \pmod{34}$; е) Розв'язків немає; ж) $x \equiv 3 \pmod{22}$; з) $x \equiv 1, 14, 27 \pmod{39}$.

14.4. а) $x \equiv 9 \pmod{98}$; б) $x \equiv 28 \pmod{119}$; в) розв'язків немає; г) $x \equiv 11 \pmod{169}$; д) $x \equiv 73 \pmod{177}$; е) $x \equiv 29 \pmod{201}$; ж) $x \equiv 29, 138, 247 \pmod{327}$; з) $x \equiv 17, 96, 175, 254, 333 \pmod{395}$; к) $x \equiv 153, 461, 769 \pmod{924}$; л) $x \equiv 1630 \pmod{2413}$; м) розв'язків немає.

14.5. а) $x \equiv 3 \pmod{23}$; б) $x \equiv 11 \pmod{24}$; в) $x \equiv 11 \pmod{24}$; г) $x \equiv 23 \pmod{30}$; д) розв'язків немає; е) $x \equiv 2, 7, 12, 17, 22, 27 \pmod{30}$; ж) $x \equiv 2 \pmod{41}$; з) $x \equiv 21 \pmod{50}$.

14.7. а) $x \equiv a + b \pmod{ab}$; б) $x \equiv (a - b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}$; в) $x \equiv (a - b)(a + b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}$; г) $x \equiv (a - b) \pmod{ab}$; д) $x \equiv \frac{1+p}{2} \pmod{p}$; е) $x \equiv m - 1 \pmod{m}$; ж) $x \equiv a^{p-2} \pmod{p}$.

14.8. а) Будь-яка конгруенція виду $ax \equiv b \pmod{15}$, де $(a, 15) = 1$; б) $ax \equiv b \pmod{15}$, $(a, 15) = 3$, $b \equiv 3$ або $(a, 15) = 5$, $b \equiv 5$; в) такої конгруенції скласти не можна.

14.9. а) $x = 2 + 3t$, $y = -2t$, $t \in \mathbb{Z}$; б) $x = 2 + 3t$, $y = 2 + 4t$, $t \in \mathbb{Z}$; в) $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 3t$, $t \in \mathbb{Z}$; г) $x = 3 + 4t$, $y = -3 - 5t$, $t \in \mathbb{Z}$; д) $x = 7 + 8t$, $y = -2 - 3t$, $t \in \mathbb{Z}$; е) $x = -3 + 13t$, $y = 4 - 17t$, $t \in \mathbb{Z}$; ж) $x = -7 + 15t$, $y = 12 - 23t$, $t \in \mathbb{Z}$; з) $x = -1 + 16t$, $y = -8 + 17t$, $t \in \mathbb{Z}$; к) розв'язків немає; л) $x = 20 + 21t$, $y = 23 + 25t$, $t \in \mathbb{Z}$; м) $x = 47 + 105t$, $y = 21 + 47t$, $t \in \mathbb{Z}$; н) $x = 94 + 111t$, $y = 39 + 47t$, $t \in \mathbb{Z}$.

14.10. а) $x \equiv 18 \pmod{35}$; б) розв'язків немає; в) $x \equiv 12 \pmod{35}$; г) $x \equiv 105 \pmod{225}$; д) $x \equiv 170b_1 + 52b_2 \pmod{221}$; е) $x \equiv 100 \pmod{143}$, $y \equiv 111 \pmod{143}$; ж) розв'язків немає.

14.11. а) $x \equiv 91 \pmod{120}$; б) $x \equiv 59 \pmod{60}$; в) $x \equiv 33 \pmod{90}$; г) $x \equiv 86 \pmod{315}$; д) $x \equiv 256 \pmod{154}$; е) розв'язків немає; ж) $x \equiv 47 \pmod{420}$; з) $x \equiv 125 \pmod{1496}$; к) $x \equiv 11151b_1 + 11300b_2 + 16875b_3 \pmod{39325}$; л) $x \equiv 8479 \pmod{15015}$.

14.12. а) $x \equiv 17 \pmod{90}$; б) $x \equiv 4 \pmod{105}$; в) розв'язків немає; г) $x \equiv -299 \pmod{335}$; д) розв'язків немає; е) $x \equiv 9573 \pmod{13923}$; ж) $x \equiv 85056 \pmod{130169}$.

14.13. Абсциси точок такі: $x \equiv 291 \pmod{819}$. Ординати знаходять за допомогою рівнянь прямих.

14.14. а) $a \equiv 5 \pmod{6}$; б) $a \equiv 0 \pmod{4}$; в) $a \equiv 1 \pmod{7}$; г) $a \equiv 1 \pmod{6}$.

14.15. Необхідно і достатньо, щоб $7 - 3 = 4 \not\equiv 0 \pmod{(6, m)}$. Якщо, наприклад, $(6, m) = 3$, то можна взяти $m = 15$.

14.16. 19.

14.18. а) 7; б) 2, в) 2, г) 19, д) 7; е) 8.

14.20. а), б) через 12 точок.

$$14.21. r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$14.22. c | (a, b).$$

14.23. 5 вересня. Задача зводиться до розв'язування невизначеного рівняння $12x + 31y = 8$, $1 < x < 31$ (або $1 < y < 12$). Оскільки $(12, 31) = 1$, то таке рівняння з обмеженнями на x і y має єдиний розв'язок.

$$14.24. 2 \text{ і } 4 \text{ або } 6 \text{ і } 1.$$

14.25. Можливі вісім варіантів: 2 і 39, 9 і 34, 16 і 29, 23 і 24, 30 і 19, 37 і 14, 44 і 9, 51 і 4. Найкращим є перший, бо в ньому треба зробити найменшу кількість стикувань труб.

14.26. Можливі 10 варіантів: 3 і 28, 8 і 25, 13 і 22, 18 і 19, 23 і 16, 28 і 13, 33 і 10, 38 і 7, 43 і 4, 48 і 1.

§ 15

15.1. а) $x^3 + 2x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$; б) $x^3 + 18x^2 + 4x - 17 \equiv 0 \pmod{59}$; в) $x^6 + 4x^5 + 22x^4 + 76x^3 + 70x^2 + 52x + 39 \equiv 0 \pmod{101}$; г) $x^n + a_1x^{n-1}h + \dots + a_nh \equiv 0 \pmod{m}$, де h задовольняє умову $a_0h \equiv 1 \pmod{m}$.

15.2. а) $2x^3 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$; б) $3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x \equiv 0 \pmod{5}$; в) $3x^2 + x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$; г) $5x^6 + x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 3x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$; д) $6x^8 + 7x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$.

15.3. а) $x \equiv 2 \pmod{3}$; б) розв'язків немає; в) $x \equiv 1, 2 \pmod{3}$; г) $x \equiv 1 \pmod{3}$; д) $x \equiv 1 \pmod{3}$; е) $x \equiv 4 \pmod{5}$; є) $x \equiv 3 \pmod{5}$; ж) $x \equiv 2 \pmod{5}$; з) розв'язків немає; к) $x \equiv 1 \pmod{5}$; л) $x \equiv 1, 2 \pmod{5}$.

15.4. а) $x \equiv 2 \pmod{7}$; б) $x \equiv 4 \pmod{7}$; в) $x \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7}$; г) $x \equiv 4, 5 \pmod{7}$; д) $x \equiv 4 \pmod{11}$; е) розв'язків немає; є) $x \equiv 7, 9 \pmod{11}$; ж) $x \equiv 12 \pmod{13}$; з) $x \equiv 7, 13 \pmod{23}$.

15.5. а) Випробовуючи лишки 0, ± 1 , ± 2 , знаходимо перший розв'язок $x_1 \equiv 4 \pmod{5}$. Запишемо тотожну конгруенцію

$$f(x) \equiv (x - 4)f_1(x) \pmod{5}. \quad (1)$$

Знаходимо $f_1(x)$ як частку від ділення $f(x)$ на $x - 4$ і визначаємо його корені за модулем 5:

$$f_1(x) = x^2 + 8x + 32 \equiv x^2 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Ця конгруенція має розв'язок $x_2 \equiv 3 \pmod{5}$, отже

$$f_1(x) \equiv (x - 3)f_2(x) \pmod{5}. \quad (2)$$

Знаходимо $f_2(x)$ як частку від ділення $f_1(x)$ на $x - 3$ і його корені за модулем 5:

$$f_2(x) = x + 11 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Розв'язуючи цю конгруенцію, дістаємо $x \equiv 4 \pmod{5}$, отже

$$f_2(x) \equiv x - 4 \pmod{5}. \quad (3)$$

З конгруенцій (1) — (3) маємо

$$f(x) \equiv (x - 3)(x - 4)^2 \pmod{5}.$$

Зауважимо, що розв'язок $x \equiv 4 \pmod{5}$ є двократним.

Конгруенція $(x - 3)(x - 4)^2 \equiv 0 \pmod{5}$ є еквівалентною заданій. Ліва частина її є розкладом на лінійні множники функції $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ за модулем 5;

- б) $(x - 1)(x - 2)^2 \equiv 0 \pmod{5}$;
- в) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \equiv 0 \pmod{5}$;
- г) $3(x - 1)(x - 2)(x - 3) \equiv 0 \pmod{5}$;
- д) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6) \equiv 0 \pmod{7}$;
- е) $5(x - 1)(x - 3)(x - 5) \equiv 0 \pmod{7}$;
- є) $6(x - 1)(x - 2)(x - 9) \equiv 0 \pmod{11}$;
- ж) $(x - 2)(x - 3)(x - 9) \equiv 0 \pmod{17}$;
- з) $(x - 1)(x - 13)(x - 21) \equiv 0 \pmod{23}$;
- к) $(x - 2)^2(x - 11)(x - 28) \equiv 0 \pmod{29}$;
- л) $(x - 17)(x - 28)(x - 30) \equiv 0 \pmod{31}$.

15.6. б) — е) Використати теорему Вільсона; е) треба почленно перемножити конгруенції $a \equiv a^p \pmod{p}$ і $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

15.7. а) $x \equiv 1, 2, 4, 5 \pmod{6}$; б) $x \equiv 1 \pmod{6}$; в) $x \equiv 2 \pmod{10}$; г) $x \equiv 0, 4, 6 \pmod{10}$; д) $x \equiv 7 \pmod{10}$; е) $x \equiv 9 \pmod{15}$; є) $x \equiv 11 \pmod{15}$; ж) $x \equiv 2, 5, 11 \pmod{15}$; з) $x \equiv 4 \pmod{21}$; к) розв'язків немає; л) $x \equiv 0, 14, 20, 34 \pmod{35}$; м) $x \equiv 2, 7, 24, 29 \pmod{55}$.

15.8. а) $x \equiv 2, 5, 11, 17, 20, 26 \pmod{30}$; б) $x \equiv 3, 26, 28, 49, 63, 73, 84, 94 \pmod{105}$.

15.9. а) $x \equiv 21 \pmod{25}$; б) $x \equiv 16 \pmod{25}$;

в) $x \equiv 2, 3 \pmod{25}$; г) $x \equiv 13 \pmod{25}$;

д) $x \equiv 17 \pmod{49}$; е) $x \equiv 1^2, 33 \pmod{49}$;

є) $x \equiv 2, 9, 16, 23, 30, 33, 37, 44 \pmod{49}$;

ж) $x \equiv 8 \pmod{49}$; з) розв'язків немає.

15.10. а) $x \equiv 8 \pmod{27}$; б) $x \equiv 19 \pmod{27}$;

в) $x \equiv 22 \pmod{27}$; г) $x \equiv 16 \pmod{27}$;

д) $x \equiv 22, 53 \pmod{64}$; е) $x \equiv 61 \pmod{125}$;

є) $x \equiv 113 \pmod{125}$; ж) $x \equiv 84 \pmod{125}$;

з) $x \equiv 19 \pmod{125}$; к) $x \equiv 43, 123, 168, 248, 293, 373, 418, 498, 543, 623 \pmod{625}$.

15.11. а) Розв'язків немає; б) $x \equiv 2 \pmod{12}$;

в) $x \equiv 4, 13 \pmod{18}$; г) $x \equiv 12 \pmod{40}$;

д) $x \equiv 6, 33, 42 \pmod{45}$; е) $x \equiv 42 \pmod{45}$;

є) $x \equiv 6, 24, 42 \pmod{45}$; ж) $x \equiv 12, 24, 37, 49 \pmod{50}$;

з) $x \equiv 13 \pmod{63}$; к) $x \equiv 8, 44, 58 \pmod{63}$;

л) $x \equiv 32, 82, 132 \pmod{175}$; м) $x \equiv 36, 136 \pmod{175}$;

н) $x \equiv 22, 76, 122, 176 \pmod{225}$.

15.12. Необхідно і достатньо, щоб $p \equiv 1 \pmod{n}$ і $a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$.

15.13. а) $x \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$; б) $x \equiv 2, 6, 7, 10 \pmod{11}$; в) конгруенція має лише два розв'язки $x \equiv 2, 9 \pmod{11}$.

15.14. а) 6; б) $p-1$; в) 8; г) $\varphi(m)$; д) $\frac{p-1}{2}$; е) $\frac{p-1}{2}$.

15.16. Оскільки 103 — просте число і $103 \equiv 1 \pmod{2}$, то дана конгруенція має лише два розв'язки. Оскільки ж числа 31 і -31 задовольняють її і $31 \equiv -31 \pmod{103}$, то маємо такі два розв'язки: $x \equiv 31, 72 \pmod{103}$.

15.19. $x \equiv 3, 13 \pmod{20}$.

§ 16

16.1. а) $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $x \equiv 2, 3 \pmod{5}$;

б) $(6x-1)^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 0, 2 \pmod{5}$;

в) $(2x+2)^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 1, 2 \pmod{5}$;

г) $(2x-2)^2 \equiv 0 \pmod{7}$, $x \equiv 1 \pmod{7}$;

д) $(2x-1)^2 \equiv 3 \pmod{7}$, розв'язків немає;

є) $(3x+1)^2 \equiv 4 \pmod{7}$, $x \equiv 5, 6 \pmod{7}$;

є) $(x-5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$, $x \equiv 4, 6 \pmod{11}$;

ж) $(10x+7)^2 \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 1, 8 \pmod{13}$;

з) $(x-3)^2 \equiv 0 \pmod{13}$, $x \equiv 3 \pmod{13}$.

16.2. а) $(x+1)^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $x \equiv 1, 7 \pmod{10}$;

б) $(x+6)^2 \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 6, 12 \pmod{15}$;

в) $(6x+7)^2 \equiv 4 \pmod{17}$, $x \equiv 2, 7 \pmod{17}$;

г) $(x-4)^2 \equiv 13 \pmod{17}$, $x \equiv 12, 13 \pmod{17}$;

д) $(x-1)^2 \equiv 17 \pmod{19}$, $x \equiv 7, 14 \pmod{19}$;

є) $(x-5)^2 \equiv 5 \pmod{19}$, $x \equiv 14, 15 \pmod{19}$;

є) $(x+6)^2 \equiv 8 \pmod{23}$, $x \equiv 4, 7 \pmod{23}$;

ж) $(2x-5)^2 \equiv -39 \pmod{96}$, $x \equiv 13, 16 \pmod{24}$;

з) $(6x+2)^2 \equiv 5 \pmod{44}$, розв'язків немає.

16.3. а) $a \equiv 1, 4 \pmod{5}$; б) $a \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$;

в) $a \equiv 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$; г) $a \equiv 1, 3, 4, 9, 10, 12 \pmod{13}$;

д) $a \equiv 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 \pmod{17}$; е) $a \equiv 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13,$

16, 18 $\pmod{23}$; є) $a \equiv 1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 33,$

34, 36 $\pmod{37}$;

- ж) $a \equiv 1, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 24, 25, 28, 29, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 47, 52 \pmod{53}$.
- 16.4. а) $x \equiv 3, 4 \pmod{7}$; б) $x \equiv 2, 5 \pmod{7}$; в) розв'язків немає.
- 16.5. а) -1 ; б) 1 ; в) 1 ; г) 1 ; д) -1 ; е) -1 ; ж) -1 ; з) 1 .
- 16.6. а) -1 ; б) 1 ; в) -1 ; г) -1 ; д) -1 ; е) 1 ; ж) -1 ; з) 1 .
- 16.7. а) 0 ; б) 2 ; в) 0 ; г) 0 ; д) 0 ; е) 2 ; ж) 0 ; з) 0 ; к) 0 .
- 16.8. а) $x \equiv 1 \pmod{3}$; б) $x \equiv 1, 4 \pmod{5}$;
в) $x \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$; г) $x \equiv 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$;
д) $x \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$; е) $x \equiv 7, 11, 13, 14 \pmod{15}$.
- 16.10. а) $x \equiv 66, 245 \pmod{311}$; б) $x \equiv 12, 35 \pmod{47}$;
в) $x \equiv 6, 23 \pmod{29}$; г) $x \equiv 15, 22 \pmod{37}$.
- 16.11. а) Ні; б) так; в) ні; г) так.
- 16.12. а) $x \equiv \pm 2 + 5q, y \equiv 2 \pm 16q + 20q^2, q \in \mathbb{Z}$; б) розв'язків немає;
в) розв'язків немає; г) $x = 8 + 11q, y = -1 + 6q + 11q^2$ або $x = 2 + 11q, y = -1 - 6q + 11q^2, q \in \mathbb{Z}$; д) $x = 10 + 13q$ або $x = 11 - 13q, y = 13q^2 - 1, q \in \mathbb{Z}$.
- 16.14. а) $x \equiv 3, 5, 11, 13 \pmod{16}$;
б) $x \equiv 7, 9, 23, 25 \pmod{32}$;
в) $x \equiv 5, 11, 21, 27 \pmod{32}$;
г) $x \equiv 13, 19, 45, 51 \pmod{64}$;
д) $x \equiv 11, 21, 43, 53 \pmod{64}$;
е) $x \equiv 31, 33, 95, 97 \pmod{128}$;
ж) $x \equiv 29, 35, 93, 99 \pmod{128}$;
з) $x \equiv 41, 87, 169, 215 \pmod{256}$.
- 16.15. а) $x \equiv 13, 14 \pmod{27}$; б) $x \equiv 53, 72 \pmod{125}$;
в) $x \equiv 116, 127 \pmod{243}$; г) $x \equiv 1, 2, 177, 226 \pmod{400}$.

§ 17

- 17.1. а) 4 ; б) 2 ; в) 2 ; г) 6 ; д) 2 ; е) 4 ; ж) 4 ; з) 10 ; к) не існує; л) 6 ; м) 18 ; н) 18 .
- 17.2. а) клас K_1 має порядок 1 ; клас $K_{10} - 2$; класи $K_9, K_4, K_5, K_6 - 5$, класи $K_2, K_8, K_7, K_3 - 10$; б) клас K_1 має порядок 1 ; клас $K_{12} - 2$; класи $K_7, K_{11} - 3$; $K_8, K_{12} - 6$; класи $K_4, K_5, K_6, K_9, K_{18}, K_{17} - 9$; класи $K_2, K_3, K_{10}; K_{12}, K_{14}, K_{15} - 18$; в) клас K_1 має порядок 1 ; класи $K_9, K_{13}, K_{20} - 2$; класи $K_4, K_{18} - 3$; класи $K_2, K_3, K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{13} - 6$.
- 17.3. а) $12, 3 \text{ і } 2$; б) $8, 8 \text{ і } 4$; в) $10, 10, 2 \text{ і } 5$; г) $6, 2 \text{ і } 12$; д) $5, 10, 2 \text{ і } 10$.
- 17.4. а) 30 ; б) 2 .
- 17.5. а) $2, 6, 7, 8$; б) $2, 6, 7, 11$; в) не існує; г) $2, 3, 10, 13, 14, 15$; д) $3, 5, 10, 12, 17, 19, 24, 26, 38, 40, 45, 47$; е) $2, 5, 11, 14, 20, 23, 29, 32, 38, 41, 47, 50, 56, 59, 65, 68, 74, 77$.
- 17.6. а) $2, 3$; б) $2, 5$; в) $6, 2$; г) $8, 3$; д) $12, 2$.
- 17.7. а) 3 ; б) 3 ; в) 5 ; г) 6 ; д) 2 ; е) 27 ; ж) 7 ; з) 7 ; к) 3 ; л) 3 ; м) 2 .
- 17.8. $2, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27$.
- 17.9. $x \equiv 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 \pmod{17}$.
- 17.10. $5, 6, 9, 13, 22$. 17.12. 28 .
- 17.13. а) x — довільне натуральне число; б) $P_8(5) = 2$, тому $x = 2n, n \in \mathbb{N}$;
в) $x = 6n, n \in \mathbb{N}$; г) $x = 20n, n \in \mathbb{N}$;
д) $x = 14n, n \in \mathbb{N}$; е) $x = 21n, n \in \mathbb{N}$.
- 17.14. $x \equiv 108 \pmod{131}$.
- 17.15. а) Оскільки $P_9(4) = 3$, то задана конгруенція має розв'язки тільки при $b \equiv 1, 4, 7 \pmod{9}$; б) оскільки $P_9(5) = \varphi(9) = 6$, то задана конгруенція має розв'язки при умові, що $(b, 9) = 1$.
- 17.16. д) Використати результат задачі 17.16, г), н) дослідити конгруенцію $(a^k - 1)(a^k + 1) \equiv 0 \pmod{p}$.
- 17.17. б) Довести за індукцією, що $P_{2^a}(a) < 2^{a-2}$, де a — непарне натуральне число, $a > 3$.
- 17.18. а) Нехай число $2^{2^n} + 1$ має простий дільник p . Тоді $2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, тобто $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$. Звідси $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Це означає, що $P_p(2) = 2^{2^n + 1}$. Тоді $p - 1 : 2^{2^n + 1}$, тобто $p \equiv 1 \pmod{2^{2^n + 1}}$. Оскільки конгруенція справджується при всіх $n > 1$, зокрема $p \equiv 1 \pmod{2^3}$, то $p = 8t + 1$.

За критерієм Ейлера про квадратичні лишки

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{p}\right) \pmod{p}.$$

Проте $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(8f+1)^2-1}{8}} = 1$. Отже, $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Звідси $\frac{p-1}{2} : 2^{n+1}$ і тому $p-1 : 2^{n+2}$ або $p \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$. Це означає, що $p = 1 + k \cdot 2^{n+2}$;

в) якщо q — просте непарне число і $a^p \equiv 1 \pmod{q}$, то $\delta = P_q(a) = 1$ або p . При $\delta = 1$ маємо $a \equiv 1 \pmod{q}$, а при $\delta = p$ маємо $q-1 = 2px$, $x \in \mathbb{N}$;

г) якщо q — просте непарне число і $a^p + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, то $a^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Тому $\delta = P_q(a)$ є одним з чисел $1, 2, p$ або $2p$. Випадки $\delta = 1$ і $\delta = p$ неможливі. При $\delta = 2$ маємо: $a^2 \equiv 1 \pmod{q}$, $a+1 \equiv 0 \pmod{q}$. При $\delta = 2p$ маємо: $q-1 = 2px$, $x \in \mathbb{N}$.

д) Використати результат задачі 17.18, а), поклавши $a = 2$, і провести доведення методом від супротивного.

17.19. в) Очевидно, що $P_{a^m-1}(a) = m$ і тому $\varphi(a^m - 1) \vdots m$; е) використати результати задач 17.19, г) — 17.19, е).

§ 18

18.1. а), б), г), е), ж) — див. таблиці індексів за відповідними модулями в додатку; в) табл. 61, 62; д) табл. 63, 64.

18.2. Табл. 65, 66.

Таблиця 61

N	0	1	2	3	4
0		0	3	1	2

Таблиця 62

I	0	1	2	3	4
0	1	3	4	2	

Таблиця 63

N	0	1	2	3	4	5	6
0		0	4	5	2	1	3

Таблиця 64

I	0	1	2	3	4	5	6
0	1	5	4	6	2	3	

Таблиця 65

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	11	—	4	1	—	14	15	—
1	12	17	—	16	7	—	8	3	—	6
2	5	—	10	13	—	2	9			

18.5. а) $x \equiv 13 \pmod{17}$; б) $x \equiv 8 \pmod{27}$. Використати відповідь до задачі 18.2; в) $x \equiv 31 \pmod{37}$;

г) $x \equiv 30 \pmod{73}$; д) $x \equiv 32 \pmod{79}$;

е) $x \equiv 74 \pmod{79}$; е) $x \equiv 44 \pmod{83}$;

ж) $x \equiv 51 \pmod{97}$; з) $x \equiv 30 \pmod{221}$.

Оскільки $221 = 13 \cdot 17$, то слід розглянути систему конгруенцій

$$\begin{cases} 37x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 37x \equiv 5 \pmod{17}. \end{cases}$$

Таблиця 66

<i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	17	4	20	19	14	16	26
1	22	2	10	23	7	8				
2										

18.6. а) $x \equiv 7, 10 \pmod{17}$; б) $x \equiv 8, 19 \pmod{27}$. Використати відповідь до задачі 18.2; в) $x \equiv 10, 43 \pmod{53}$;

г) $x \equiv 27, 34 \pmod{61}$; д) $x \equiv 27, 40 \pmod{67}$;

е) $x \equiv 21, 46 \pmod{67}$; є) $x \equiv 14, 57 \pmod{71}$;

ж) $x \equiv 17, 66 \pmod{83}$; з) $x \equiv 2, 7 \pmod{11}$;

к) $x \equiv 5, 20 \pmod{43}$; л) $x \equiv 3, 31 \pmod{47}$;

м) $x \equiv 1634, 1847 \pmod{59^2}$; н) $x \equiv 253, 4076 \pmod{73^2}$.

18.8. а) 3; б) 4; в) 0; г) 1; д) 0; е) 10; є) 0; ж) 7; з) 3; к) 1; л) 0.

18.9. а) $x \equiv 4, 33 \pmod{37}$; б) $x \equiv 17 \pmod{41}$;

в) розв'язків немає; г) $x \equiv 2, 18, 23, 39 \pmod{41}$;

д) $x \equiv 7 \pmod{43}$; е) розв'язків немає;

є) $x \equiv 17 \pmod{67}$; ж) $x \equiv 8, 28, 31, 36, 39, 59 \pmod{67}$;

з) $x \equiv 30, 53 \pmod{83}$; к) розв'язків немає.

18.10. а) $x \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$; б) $x \equiv 2, 3, 10, 11 \pmod{13}$;

в) $x \equiv 10, 13 \pmod{23}$; г) розв'язків немає;

д) $x \equiv 11, 27, 36 \pmod{37}$; е) $x \equiv 25, 30, 31, 36 \pmod{61}$;

є) $x \equiv 17 \pmod{73}$; ж) $x \equiv 12, 23, 35, 38, 50, 61 \pmod{73}$;

з) $x \equiv 17, 63, 66 \pmod{73}$; к) $x \equiv 3, 24, 46 \pmod{73}$;

л) $x \equiv 6, 14, 20, 59, 65, 73 \pmod{79}$.

18.11. а) $x \equiv 10 \pmod{29}$; б) $x \equiv 29 \pmod{31}$;

в) $x \equiv 24 \pmod{37}$; г) $x \equiv 14 \pmod{41}$;

д) $x \equiv 24 \pmod{47}$; е) $x \equiv 34 \pmod{53}$;

є) $x \equiv 47 \pmod{71}$.

18.12. а) 4; б) 16; в) не існує; г) 29; д) 30; е) 17; є) 2; ж) 16; з) не існує; к) 23; л) 2; м) не існує.

18.13. а) Розв'язків немає; б) $x \equiv 27 \pmod{30}$;

в) $x \equiv 11 \pmod{28}$; г) $x \equiv 27 \pmod{30}$;

д) $x \equiv 2, 5, 8, \dots, 56, 59 \pmod{60}$; е) $x \equiv 3, 7, 11, \dots, 55, 59 \pmod{60}$.

18.14. а) $x \equiv 36 \pmod{66}$; б) $x \equiv 3 \pmod{72}$; в) $x \equiv 3, 16, 29, 42, 55, 68 \pmod{78}$; г) $x \equiv 5, 46 \pmod{82}$.

18.15. а) 2; б) 11; в) 7; г) 5; д) 23; е) 13; є) 138. Оскільки $1739 \equiv 37 \cdot 47$, то $P_{1739}(10) = [P_{37}(10), P_{47}(10)] = [3, 46] \equiv 138$; ж) 84. Оскільки $4331 \equiv 61 \cdot 71$, то $P_{4331}(32) = [P_{61}(32), P_{71}(32)] = [12, 7] \equiv 84$.

18.16. а) 26; б) 62; в) 7; г) 16.

18.17. а), в), г), є), є) — е; б), д), ж) — не е.

18.18. а) $x \equiv 7, 57 \pmod{100}$; б) розв'язків немає.

18.19. а) 15, 17; 19; 20; б) 15; 18; 19; в) 15; 17; 19; г) 18; д) жодне; е) 15, 19.

18.20. а) 7; 37; б) 3; 5; 12; 18; 19; 20; 26; 28; 29; 30; 33; 34; в) 3; 27; 41; 52; г) 2; 6; 7; 10; 17; 18; 26; 30; 31; 35; 43; 44; 51; 54; 55; 59.

§ 19

19.1. а) Ті і тільки ті цілі числа, в яких остання цифра парна; б), є) ті і тільки ті цілі числа, в яких сума цифр ділиться на 3 (на 9); в), к), м) ті і тільки ті цілі числа, в яких на 4 (на 25, на 50) ділиться двоцифрове число, утворене їхніми останніми двома цифрами; г) ті і тільки ті цілі числа, які закінчуються 0 або 5; д), ж), з) ті і тільки ті цілі числа, в яких різниця між числом, записаним останніми трьома цифрами, і числом, записаним рештою цифр заданого числа (або навпаки), ділиться на 7 (на 11, на 13); е) ті і тільки ті цілі числа, які закінчуються 0; л) ті і тільки ті цілі числа, в яких сума трицифрових

чисел, утворених відповідними гранями заданого числа при його розбитті справа наліво, ділиться на 37.

19.4. а) Ні; б) так; в) так; г) так; д) так; е) ні; є) так; ж) так; з) так.

19.5. а) $3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 2999$; б) $7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 257$; в) $x = 8$, $y = 0$, $z = 6$; г) $x = 1$, $y = 2$; д) $29 \cdot 31 \cdot 101$; е) $17^2 \cdot 19 \cdot 557$; є) 18095 і 68090.

19.6. а) 3; б) 33; в) 22; г) 53; д) 3; (використати задачу 19.3, б)).

19.7. а) 4; б) 24; в) 1; г) 23; д) 8; е) 8; є) 60; ж) 147; з) 48; к) 127; л) 5.

19.8. а) 19; б) 30; в) 20; г) 1; д) 12; е) 10; є) 6; ж) 70.

19.11. а), б), в), г), д), е) — помилки не виявлено; є) обчислення виконано неправильно.

19.12. а) Помилки не виявлено, хоч насправді обчислення виконано неправильно; б) помилки не виявлено; в) за модулем 9 помилки не виявлено, за модулем 11 — виявлено.

19.13. а) 16; б) 18; в) 28; г) 3; д) 21; е) 58; є) 33; ж) 8; з) 44; к) 96.

19.14. а) 6; б) 2; в) 6; г) 42; д) 16; є) 6; є) 6; ж) 16; з) 48; к) 176; л) 754;

м) 104. Конгруенція $10^x \equiv 1 \pmod{53 \cdot 73}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} 10^x \equiv 1 \pmod{53}, \\ 10^x \equiv 1 \pmod{73}. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожну з цих конгруенцій індексуванням, дістаємо

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{13}, \\ x \equiv 0 \pmod{8}. \end{cases}$$

Звідси $x \equiv 0 \pmod{104}$. Отже, $P_{53 \cdot 73}(10) = 104$.

19.15. а) 2; 6; б) 2; 2; в) 2; 1; г) 4; 2; д) 2; 1; е) 2; 2; є) 1; 18; ж) 4; 16; з) 2; 18; к) 2; 22; л) 4; 48; м) 3; 13.

19.16. а) $b = 11, 33$ або 99 ; б) $b = 27, 37, 111, 333$ або 999 .

19.17. а) 0, (736842105263157894); б) 0, (748251). Використати рівність $\frac{107}{143} = \frac{4}{11} + \frac{5}{13}$; в) 63; 22.

19.18. а) Показати, що $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2 - 1}{n(n^2 - 1)}$, і розглянути випадки, коли n — парне, n — непарне; в) конгруенція $10^x \equiv 1 \pmod{pq}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} 10^x \equiv 1 \pmod{p}, \\ 10^x \equiv 1 \pmod{q} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p-1}, \\ x \pmod{q} \equiv 0 \pmod{q-1}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{d}}, \\ x \equiv 0 \pmod{\frac{q-1}{\delta}}. \end{cases}$$

Звідси

$$x \equiv 0 \pmod{\left[\frac{p-1}{d}, \frac{q-1}{\delta} \right]} \quad \text{і} \quad P_{pq}(10) = \left[\frac{p-1}{d}, \frac{q-1}{\delta} \right];$$

г) Розглянемо будь-який період, який містить цифри z_1, z_2, \dots, z_k і утворюється при перетворенні дробу $\frac{n}{m}$ у десятковий, а також систему r_0, r_1, \dots, r_{k-1} усіх остач, що утворюються при нумерації їх по порядку, починаючи з $n = r_0$. Оскільки при діленні r_1 на m дістанемо в частці z_2 і остачу r_2 і т. д., то періоди дробів $\frac{r_0}{m}, \frac{r_1}{m}, \dots, \frac{r_{k-1}}{m}$ відрізнятимуться один від одного круговою перестановкою цифр; період для другого дробу почнеться з z_2 , для третього — з z_3 і т. д. Якщо 10 — первісний корінь за модулем m , то $k = \varphi(m)$ і числа r_i вичер-

кують усю зведену систему лишків за модулем m . Тоді періоди всіх нескоротних дробів із знаменником m знаходять як результат кругових перестановок тієї самої системи $k = \varphi(m)$ цифр z_1, z_2, \dots, z_k .

19.19. а) $\frac{36}{11}$; б) $\frac{3527}{9900}$; в) $\frac{110119}{9999}$; г) $\frac{51487}{9900}$.

Розділ IV

§ 20

20.1. а) $f(x) = -x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 4x^2 + x + 10$;

б) $f(x) = x^3 + \bar{2}$;

в) $f(x) = \bar{4}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$.

20.2. а) $f_1(x) = f_3(x)$, $f_2(x) = f_4(x)$;

б) $f_1(x) = f_2(x)$.

20.4. Застосувати формулу бінома Ньютона і наслідок з теореми Ферма про те, що $a^p \equiv a \pmod{p}$.

20.5. а) $a = -5$, $b = -1$, $c = 6$;

б) $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$.

20.6. а) $a = 6$, $g_1(x) = x^2 + 3x + 1$, $g_2(x) = -x^2 - 3x - 1$;

б) $a = 3$, $g_1(x) = \bar{2}x + \bar{2}$, $g_2(x) = \bar{3}x + \bar{3}$; $a = 2$, $g_1(x) = \bar{2}x + \bar{3}$, $g_2(x) = \bar{3}x + \bar{2}$;

в) $a = 4$, $g_1(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $g_2(x) = -3x^2 + 2x - 2$.

20.7. $a = 6$, $b = 2$.

20.8. $a = -8$, $b = 18$, $g_1(x) = x^2 - 4x + 1$, $g_2(x) = -x^2 + 4x - 1$; $a = 8$, $b = 14$, $g_1(x) = x^2 + 4x - 1$, $g_2(x) = -x^2 - 4x + 1$.

20.9. Так, якщо $a \in \mathbb{Z}$. Тоді $g(x) = 2x^2 - 3ax + a^2$.

20.10. $a^2 = 4b + 4(c + 1)$.

20.11. $a = 3$, $b = -7$, $c = 4$.

20.12. Ні.

20.14. а) $f(x) = (x^2 + 3)^2 + (2x)^2$;

б) $f(x) = (x^2 + 6x - 13)^2 + (2x - 14)^2$.

20.15. а) Так; б) ні; в) так; г) так; д) ні; е) ні.

20.16. в) Застосувати наслідок з теореми Ферма та показати, що $g(x)$ є нуль-многочленом і $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, де $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

20.22. а) 0; б) -1 ; в) $\bar{1}$.

20.23. $2^{k-1} \cdot 5^k$.

20.24. Показати, що многочлен $f(x)$ не зміниться при заміні x на $-x$.

20.25. Розглянути многочлен $h(x) = (1 + 5x^2 + x^3)^k$, коефіцієнти якого при парних степенях змінної x дорівнюють відповідним коефіцієнтам многочлена $f(x)$.

20.26. а) $a \in \{8, 12\}$; б) $a = 1$.

§ 21

21.1. а) У кільці $\mathbb{Z}[x]$ многочлен $f(x)$ не ділиться на $g(x)$, а в кільці $\mathbb{Q}[x]$ — ділиться; б) ділиться; в) ні.

21.3. $f(x) = (x + \bar{2})(x^2 + x + \bar{1})$.

21.4. а) $a = -1$; б) $a \in \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$.

21.5. Взяти до уваги, що $x^2 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

21.6. а) $b = -1 - a^2$, $a = c$;

б) $b = 1$, $c = 0$;

в) якщо $a = 0$, то $b = c + 1$ і $c \in \mathbb{Z}$; якщо $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то $b = 2 - a^2$ і $c = 1$.

21.8. Твердження хибне.

21.11. а) $r = 1 - i$; б) $r = 7$; в) $r(x) = x + 2$;

г) $r(x) = (2 + i)x + (1 - i)$; д) $r(x) = -7x + 11$.

21.12. а) $f(x) = g(x) \left(2x^3 + 5x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{79}{4} \right) + \frac{361}{4}x - \frac{95}{4}$;

- б) $f(x) = g(x)(3 + 2i)x + (2 - 7i)x + (-2 + i)$;
 в) $f(x) = g(x)(2x^2 + 3x) + \bar{1}$;
 г) $s(x) = 5x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6$, $r(x) = 4x + 5$;
 е) $s(x) = 3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$, $r(x) = 3x + 3$;
 е) $s(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{64}x - \frac{71}{64}$, $r(x) = \frac{449}{512}x^2 - \frac{71}{512}x + \frac{7}{64}$;
 ж) $s(x) = ix$, $r(x) = 2x + 1 - i$.
 21.13. Ні.
 21.15. $a = 1$, $b = 0$.
 21.16. $r_1(x) = (3x^2 - 4x + 1)^2$.
 21.17. $r = 3$.
 21.18. $r(x) = 2x^2$.
 21.19. $r = -11 + 13i$.
 21.20. а) $I = \{(3x - 5)f(x) \mid f(x) \in Z[x]\}$; б) $I = Z[x]$;
 в) $I = \{(x - 1)f(x) \mid f(x) \in Z[x]\}$.
 21.23. $I = \{nf(x) \mid f(x) \in Z[x]\}$.
 21.24. Ні.

§ 22

- 22.1. а) $s(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 6$, $r(x) = 16$;
 б) $s(x) = 2ix^3 + (3 - i)x - 2$, $r(x) = 2 + i$;
 в) $s(x) = 0,5x^3 + 3x - 1$, $r(x) = 2,5x - 1,5$;
 г) $s(x) = 5x^3 + 2x^2 + \bar{1}$, $r(x) = 2x^2 - 2x + \bar{1}$;
 д) $s(x) = (1 - 2i)x^3 + 2x^2 - ix + 2i$, $r(x) = 2x + 1$.
 22.2. а) $s(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$, $r(x) = 5$;
 б) $s(x) = 4x^3 - (3 + 4i)x^2 + (-1 + 7i)x + 8 - 6i$, $r(x) = -14 + 2i$;
 в) $s(x) = 6x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + \bar{2}$, $r(x) = \bar{2}$;
 г) $s(x) = (1 + \sqrt{2})x^3 - x^2 + x + 1 - \sqrt{2}$, $r(x) = 4 - 2\sqrt{2}$.
 22.3. а) 136; б) $-1 - 46i$; в) $\bar{2}$; г) $9 - 5\sqrt{2}$.
 22.4. $a = 1$, $b = -1$.
 22.7. $r(x) = -x + 3$.
 22.8. $r(x) = 3,5x^2 + 1,5x - 2$.
 22.9. $r(x) = (0,5 + i)x^2 + x + 0,5 - i$.
 22.10. а) 1; б) 1.
 22.17. $\bar{3}$.
 22.18. $\bar{1}$.
 22.19. Застосувати задачу 22.6, в) і теорему Безу.
 22.21. $a = 3$, $b = -4$.
 22.22. а) $f(x) = (x - 1)^4 + 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 - (x - 1) - 2$;
 б) $f(x) = \bar{2}(x - \bar{1})^4 + (x - \bar{1})^2 + (x - \bar{1})$;
 в) $f(x) = (x + i)^5 - 5i(x + i)^4 - (3i + 10)(x + i)^3 + (-13 + 10i)(x + i)^2 + (22i + 5)(x + i) + 11 - i$.
 22.23. а) $f(x) = (x^2 - 1)^3 - 4(x + 1)(x^2 - 1)^2 - (7x + 9)(x^2 - 1) - 4x - 5$;
 б) $f(x) = x(x^3 + \bar{2})^2 + x(x^3 + \bar{2}) + 4x$;
 в) $f(x) = (x^3 + i)^2 - 2i(x^3 + i) - 2x + i - 1$.

§ 23

- 23.2. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
 23.3. а) $(f, g) = x + 1$; б) $(f, g) = 1$; в) $(f, g) = 1$; г) $(f, g) = 2x + 1$.
 23.5. а) $(f, g) = x - 3$; б) $(f, g) = x^2 - x + 1$; в) $(f, g) = 1$;
 г) $(f, g) = x + \bar{3}$; д) $(f, g) = x^2 + (1 + i)x + i$.
 23.6. а) $[f, g] = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x - 2$;
 б) $[f, g] = (2x^3 + 7x^2 + 4x - 3)(x - 1)$;
 в) $[f, g] = (x^3 + 6x^2 + 4x + \bar{1})(x^3 + x^2 + 3x - \bar{4}) : (x + \bar{2})$;
 г) $[f, g] = (x^3 - x^2 + 3x - 3)(x^4 + 2x^3 + 2x - 1)$;
 д) $[f, g] = x^5 + 2ix^4 - 2x^3 - 2ix^2 + x$.
 23.7. а) $u(x) = 1$, $v(x) = -x + 1$;

б) $u(x) = -x - \bar{1}$, $v(x) = x + \bar{2}$;

в) $u(x) = -\frac{x-1}{3}$, $v(x) = \frac{2x^2-2x-3}{2}$;

г) $u(x) = -\frac{1}{9}(3x^2 + 10ix - 17)$, $v(x) = \frac{1}{28}(18x^3 + 57ix^2 - 158x - 78i)$.

23.8. Використати те, що

$$I = \{f(x)u(x) + g(x)v(x) \mid u(x), v(x) \in P[x]\}.$$

23.9. Ідеал I породжується многочленом $[f, g]$.

23.10. Ідеал I породжується найбільшим спільним дільником многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

23.11. Многочлен $h(x)$ має ділитися на найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

23.12. а) $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1) + (x-1)s(x)$, $v(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x + 1) - (x+1)s(x)$, де $s(x) \in Q[x]$;

б) $u(x) = \frac{x^2 + \bar{4}x}{3} + (x + \bar{2})s(x)$, $v(x) = \frac{\bar{4}x + \bar{1}}{3}(x^2 + \bar{4}x) - (x^2 + x + \bar{1})s(x)$,

де $s(x) \in Z_5[x]$;

в) рівняння розв'язків не має;

г) $u(x) = x + 1 + s(x)$, $v(x) = -x^4 + (i-1)x^3 + (i-1)x^2 + ix + i + 1 - (x-i)^2(x+i)s(x)$, де $s(x) \in C[x]$.

23.13. а) $(f, g, h) = x + 1$; б) $(f, g, h) = \bar{1}$; в) $(f, g, h) = x^2 + (i+1)x + i$.

23.14. а) Рівняння розв'язків не має, оскільки многочлен $s(x)$ не ділиться на многочлен (f, g, h) ; б) рівняння має розв'язок, $s(x)$ ділиться на многочлен (f, g, h) .

§ 24

24.2. $f_1(x) = x^2 + \bar{1}$, $f_2(x) = x^2 + x + \bar{2}$, $f_3(x) = x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$.

24.5. Так (наприклад, $f(x) = x^2 + \bar{2}$).

24.8. $f(x) = (2x + \bar{3})(x + \bar{1})(x + \bar{4})$.

24.9. а) $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2-2)(2x-1)$;

б) $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)(3x+1)$.

24.10. $f(x) = (x^2+1)(x^2-2)(2x-1) = (x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(2x-1) = (x-i)(x+i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(2x-1)$.

24.15. а) $f(x) = (x+\bar{1})(x+\bar{2})(x+\bar{3})(x+\bar{4})$; б) незвідний;

в) $f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$; г) звідний.

24.16. а) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)(x^2 + 5x + 7)$;

б) $f(x) = \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$;

в) $f(x) = (2x^2 + x + 3)^2$;

г) $f(x) = (x^2 - 6x + 1)(x^2 + x - 3)$;

д) $f(x) = \left(x - \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right) \times \left(x - \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right)$;

е) $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$;

е) $f(x) = \left(x - \frac{-7 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{-7 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$;

ж) $f(x) = (x^2 + 5ax + 5a^2)^2$;

з) $f(x) = (x^2 + 12x + 26)(x^2 + 12x + 12)$;

и) $f(x) = (x^2 - 18)(x^2 + 8)$;

к) $f(x) = (x + \bar{1})^2(x + \bar{2})^2$;

л) незвідний;

$$\text{м) } f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1);$$

$$\text{н) } f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1);$$

$$\text{о) } f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^8+x^4+1);$$

$$\text{п) } f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right) \times$$

$$\times \left(x + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right);$$

$$\text{р) } f(x) = x(x-\bar{1})(x-\bar{2})(x-\bar{3})(x-\bar{4}).$$

$$24.17. \text{ а) } (f, g) = x^2 - x - 2, [f, g] = (x-1)^2(x^2+1)(x^2-5x+6);$$

$$\text{б) } (f, g) = x-1, [f, g] = (x^2-2x+3)^2(x+6)^2(x-1)^2(x-2)^2(x-6)^2(x^2+1);$$

$$\text{в) } (f, g) = (x+1)^2, [f, g] = (x+1)^3(x-1)(x-2);$$

$$\text{г) } (f, g) = (x-i)(x+1), [f, g] = (x+1)^3(x^2+1)(x-1)(x-i);$$

$$\text{д) } (f, g) = x+2, [f, g] = x(x+1)(x+3)(x+4)(x^2+x+1)^2;$$

$$\text{е) } (f, g) = x-1, [f, g] = (x^2-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1).$$

24.18. Ні.

$$24.19. A^{-1} = \{-x + (x^2+1)s(x) \mid s(x) \in Q[x]\}.$$

$$24.20. A^{-1} = \{1 + (-x+1)s(x) \mid s(x) \in Q[x]\} = A.$$

24.21. а) Оберненого елемента не існує;

$$\text{б) } A^{-1} = \left\{\frac{1}{3} + (x^2+4)s(x) \mid s(x) \in Q[x]\right\}.$$

24.22. Ізоморфізмом є відображення

$$f(\{(g(x) + x^2 + 1)s(x) \mid s(x) \in R[x]\}) = g(t).$$

§ 25

$$25.1. \text{ а) } f'(x) = 27(x^2+x-1)^2(2x+1)(x^3-2) + 27x^2(x^2+x-1)^2;$$

$$\text{б) } f'(x) = 6i(3ix^2-1)((t+1)x^2-i) + 4x(-1+i)(ix^3-3x);$$

$$\text{в) } f'(x) = x(x+\bar{3}) + \bar{3}x^2.$$

$$25.2. \text{ а) } \bar{4}; \text{ б) } \bar{9}.$$

$$25.6. f(x) = \bar{2}x^5 + x^3 + x^2 + x + \bar{2}.$$

$$25.7. f(x) = 4x^3 + x^2 - x + 1.$$

25.8. 2.

$$25.10. \text{ Усі, крім } f_1(x) = \bar{1}, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^2 + \bar{1}, f_4(x) = x^3 + x^2 + x.$$

25.11. 54.

$$25.12. \text{ а) } f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) - 2, f'(1) = -1,$$

$$f''(1) = 6, f'''(1) = 12, f^{IV}(1) = 24;$$

$$\text{б) } f(x) = (x+i)^5 - 5i(x+i)^4 - (3i+10)(x+i)^3 + (10i-13)(x+i)^2 + (5+22i)(x+i) + 11-i, f'(-i) = 22i+5, f''(-i) = 20i-26, f'''(-i) = -60-$$

$$-18i, f^{IV}(-i) = -120i, f^V(-i) = 120;$$

$$\text{в) } f(x) = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 - 9(x+1)^2 + 36(x+1) + 1, f'(-1) = 36, f'' \times$$

$$\times (-1) = -18, f'''(-1) = -24, f^{IV}(-1) = 24;$$

$$\text{г) } f(x) = \bar{4}(x-\bar{3})^5 + \bar{5}(x-\bar{3})^4 + \bar{7}(x-\bar{3})^3 + \bar{4}(x-\bar{3})^2 + \bar{8}(x-\bar{3}) + \bar{9}, f' \times$$

$$\times \bar{3} = \bar{8}, f''(\bar{3}) = \bar{8}, f'''(\bar{3}) = \bar{9}, f^{IV}(\bar{3}) = \bar{10}, f^V(\bar{3}) = \bar{7};$$

$$\text{д) } f(x) = 2(x-\bar{1})^4 + (x-\bar{1})^3 + (x-\bar{1}), f'(\bar{1}) = \bar{1}, f''(\bar{1}) = \bar{2}, f'''(\bar{1}) = \bar{0}, f^{IV}(\bar{1}) = \bar{0}.$$

$$25.13. f(x) = 2i(x^4 + (5i-2)x^3 + (9i-9)x^2 + (14-4i)x + (6i-2)).$$

$$25.15. \text{ а) } 2; \text{ б) } 1; \text{ в) } 0; \text{ г) } 5.$$

25.16. 1.

$$25.17. \text{ а) } a = -5; \text{ б) } a \in \left\{-\frac{14}{27}, 18\right\}; \text{ в) } a = 0.$$

$$25.18. \text{ Якщо } a = 4, \text{ то } f(x) = (x+2)^2(x+1). \text{ Якщо } a = \frac{102}{27}, \text{ то } f(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 \left(x + \frac{7}{3}\right).$$

- 25.19. а) $4a^3 + 27b^3 = 0$; б) $27a^4 = 256b^3$;
 в) $256a^6 + 3125b^4 = 0$; г) $3125b^2 + 108a^6 = 0$.
 25.20. а) Не має; б) має; в) має; г) має; д) має.
 25.21. а) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$; б) $f(x) = (x+(1-2i))^4$;
 в) $f(x) = (x^2+x+1)^2(x+2)$; г) $f(x) = (x+i)^3(x-2i)^2$;
 д) $f(x) = (x+2)^3(x^2-x-i)$; е) $f(x) = (x-i)^3(x+3i)^2(x-1)$.

§ 26

26.1. Існує єдиний многочлен першого степеня $f(x) = x$, який задовольняє умову задачі. Кожен многочлен $f(x) = (4c-1)x^2 - (6+3c)x - 7c$ при $c \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ також задовольняє умову задачі.

26.2. Ні.

26.4. Якщо $\deg f = n$, то слід розглянути множину, що містить $n+1$ різних раціональних чисел і застосувати інтерполяційну формулу Лагранжа.

26.6. а) $f(x) = 2x^2 - x + 1$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{3}$; в) $f(x) = 2x$.

26.7. а) $f(x) = 2x^2 - x + 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3) + x + 1$;

в) $f(x) = 1 + 2x + \frac{2^2x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{2^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

26.8. а) $f(x) = 3x^2 - 1$;

б) $f(x) = -x + 5$;

в) $f(x) = i(x^2-1)(x-i) - (x-1)(x-i) - x + 1 - i$, $f(2i) = 8$, $f(0) = 0$;

г) $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{48}(x-1)(x-4) + \frac{1}{720}(x-1)(x-4)(x-9)$,

$f(3) = 1\frac{87}{120} = 1,725$, $(\sqrt{3} = 1,732\dots)$, $f(2) = 1\frac{142}{360} = 1,394$, $(\sqrt{2} = 1,4142\dots)$.

26.9. $f(x) = \bar{3}(x + \bar{3})^2x(x + \bar{1})$.

26.10. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \bar{2}x$, $f_3(x) = \bar{2}x + \bar{1}$, $f_4(x) = x + \bar{1}$, $f_5(x) = \bar{2}x + \bar{2}$,
 $f_6(x) = x + \bar{2}$.

26.12. а) $\frac{x-1}{x-2}$; б) $\frac{3x+2}{(x^2+x+1)(x^3+1)}$;

в) $(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$; г) заданий дріб нескоротний.

26.13. а) Так; б) ні; в) так; г) так; д) ні; е) ні.

26.14. а) $\frac{-5}{(2x-1)} + \frac{3}{x}$;

б) заданий дріб неправильний;

в) $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$;

г) $\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}$; д) $\frac{1}{x^2+x+2} - \frac{x-2}{(x^2+x+2)^2}$;

е) $\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}$; е) $\frac{6}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$;

ж) $\frac{x}{8(x^2+2x+2)} - \frac{x-4}{8(x^2-2x+2)}$;

з) $\frac{1}{8(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + \frac{1}{2(x^2+2)}$.

26.15. а) $\frac{1}{3(x-i)} - \frac{1}{3(x+2i)}$;

$$\begin{aligned}
& \text{б) } \frac{1}{x-1} - \frac{1+i}{2(x-i)} + \frac{i-1}{2(x+i)}; \\
& \text{в) } \frac{1}{4(x-1+i)} - \frac{1}{4(x-1-i)} + \frac{i}{2(x-1+i)^2}; \\
& \text{г) } \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x-\sqrt{2}i)} - \frac{1}{8(x+\sqrt{2}i)}; \\
& \text{26.16. а) } -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x^3-2)}; \text{ б) } \frac{1}{2(x^2-2)} + \frac{1}{2(x^2+2)}; \\
& \text{в) } \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}; \\
& \text{26.17. а) } \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+3}; \\
& \text{б) } \frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{4(x+3)} + \frac{1}{4(x+4)}; \\
& \text{в) } \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{4}{x+4} + \frac{3}{(x+4)^2}; \\
& \text{26.18. } \sum_{\bar{a}=0}^{\bar{p}-1} \frac{1}{(\bar{p}-1)(x+\bar{a})}.
\end{aligned}$$

Розділ V

§ 27

$$\begin{aligned}
& \text{27.1. а) } f(x, y) = x^5 + x^4y - 2x^3y^2 - xy^4 + 2y^5 + x^2 - 1; \\
& \text{б) } f(x, y, z) = x^3y^2z + y^3z^2x + zx^2y - xy^2z^3 - yz^2x^3 - zx^2y^3.
\end{aligned}$$

27.3. а) Від одного до трьох членів; б) від одного до шести членів; в) від одного до чотирьох членів; г) від одного до 10 членів.

$$\text{27.6. а) } 63; \text{ б) } 728.$$

27.7. Однорідний многочлен другого степеня від трьох змінних у загальному вигляді містить 6 членів. Кожен з шести коефіцієнтів цих членів може набувати одне із значень $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p}-1$, і всі можливі варіанти повністю вичерпуються елементами множини Z_p^6 . Множина Z_p^6 містить p^6 елементів. Якщо всі коефіцієнти дорівнюють 0, то матимемо нуль-многочлен. Отже, число всіх однорідних многочленів другого степеня від трьох змінних дорівнює $p^6 - 1$.

$$\text{27.9. а) } \text{вищий член } -3y^2x^4; \text{ б) } \text{вищий член } 2xz^2; \text{ в) } \text{вищий член } xz.$$

$$\text{27.10. а) } \text{наприклад, } f_1(x, y) = x + y + \bar{1} \text{ і } f_2(x, y) = x^2 + y^2 + \bar{1};$$

$$\text{б) } f_1(x, y) = x^2 + x + y + \bar{1} \text{ і } f_2(x, y) = x^2 + y^2 + x + \bar{1}.$$

$$\text{27.16. Зробити заміну } x = ty.$$

$$\text{27.17. а) } f(x, y) = (3x^2 - 7xy - 4y^2)(3x^2 + 3xy + 4y^2);$$

$$\text{б) } f(x, y) = (2x^2 - xy + 3y^2)^2;$$

$$\text{в) } f(x, y) = (x - y)^2;$$

$$\text{г) } f(x, y) = (x - y)(x + y)(x + \bar{2}y)(x + \bar{3}y);$$

$$\text{д) } f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2).$$

$$\text{27.18. а) } f(x, y, z) = 3(x + y)(x + z)(y + z);$$

$$\text{б) } f(a, b, c) = -(a - b)(b - c)(c - a);$$

$$\text{в) } f(a, b, c) = 3(a - b)(b - c)(c - a);$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x);$$

$$\text{д) } f(x, y, z) = 12xyz(x + y + z);$$

$$\text{е) } f(a, b, c) = 2(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c);$$

$$\text{ж) } f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)(xy + yz + xz).$$

$$\text{з) } f(a, b, c) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc);$$

$$\text{и) } f(x, y, z) = 5(x + y)(x + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz);$$

$$\text{і) } f(x, y, z) = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

27.19. Використати розклад многочлена $g(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ на незвідні множники (див. задачу 27.18, а).

§ 28

28.1. а) Ні; б) так; в) так; г) ні; д) так.

28.2. а) Додати $x_2^2 + 2x_1$; б) додати $x_2^3, x_3^3 + 2x_1x_3$; в) додати $x_2^2 + 2x_2x_3$.

28.3. а) $5x_1^4x_2^2x_3$; б) $-3x_1^2x_2^2x_3^2$.

28.4. а) $f(x, y) = \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 - 4\sigma_2$;

б) $f(x, y) = 2\sigma_1^2\sigma_2 - 6\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1\sigma_2$.

28.9. а) $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - \sigma_1$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4\sigma_3 - 4\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_3^2 + 2\sigma_3$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2 + \frac{28}{3}\sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3 + \frac{10}{3}\sigma_1\sigma_2\sigma_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 2\sigma_1^2 - 6\sigma_2$.

д) $f(x_1, x_2, x_3) = -5\sigma_1^3 + 36\sigma_1\sigma_2 + 132\sigma_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3$.

28.10. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{5}{3}$.

28.11. а) $\circ(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2 - \frac{7}{3}\sigma_2^2$.

б) $\circ(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_2$;

в) $\circ(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

§ 29

29.1. а) $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$; б) $(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$;
в) $(x, y) \in \{(5, 3), (3, 5), (-3, -5), (-5, -3)\}$; г) $(x, y) \in \{(3, -2), (-2, 3)\}$;
д) $(x, y, z) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$; е) $(x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (1, -2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (-2, 2, 1), (-2, 1, 2)\}$;
е) $(x, y, z) \in \{(1, -2, 3), (1, -3, 2), (2, -1, 3), (2, -3, 1), (3, -1, 2), (3, -2, 1)\}$.

29.2. а) $(x, y) \in \{(1, 64), (64, 1)\}$;

б) $(x, y) \in \{(16, 81), (81, 16), (-16, -81), (-81, -16)\}$.

29.3. а) $\{1, 4\}$; б) $\{3, 4, 6 \pm \sqrt{29}\}$; в) $\{2, 11\}$;

г) $\{-8, -73\}$; д) $x = 0$.

29.4. а) $f(x, y) = (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y)$;

б) $f(x, y) = (2x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y)(3x - y)$;

в) $f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)(2x^2 + xy + 2y^2)$;

г) $f(x, y) = (x - 3y)(3x - y)(2x + 3y)(3x + 2y)$.

29.5. а) $f(x, y, z) = \sigma_1\sigma_2 = (x + y + z)(xy + xz + yz)$;

б) $f(x, y, z) = (xy + xz + yz)(x^2 + y^2 + z^2)$;

в) $f(x, y, z) = 2((x + y + z)^2 - 3xy - 3xz - 3yz)^2$;

г) $f(x, y, z) = (xy + xz + yz)^2$.

29.6. $\frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{1}{x + y + z}$.

29.7. $x^2 - 12x + 27 = 0$.

29.8. Застосувавши рекурентну формулу задачі 28.5 і метод математичної індукції, довести, що $x^n + y^n$ є цілим числом. Далі, показати, що $s_n = -s_{n-3} + 5(7s_{n-2} - s_{n-3})$ для всіх $n > 3$. Подільність на 5 числа s_n приведе до подільності на 5 одного з чисел s_1, s_2 або s_3 , що неможливо.

29.9. $t^3 - 2t^2 - 47t - 144 = 0$.

§ 30

30.1. а) 162; б) -128; в) 0; г) -3564; д) 1768; е) 41; є) 10; ж) 651; з) 44;
к) -7; л) 136; м) 59.

30.3. а) $\lambda = 1$; б) $\lambda = 2$; г) $\lambda = 2$; д) $\lambda = -1$.

30.4. а) -103 ; б) 0 ; в) -27036 ; г) 144 ; д) 0 ; е) 725 ; є) 50000 ;

ж) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$.

30.8. а) $\lambda = 3$; б) $\lambda \in \{0, \pm 2\}$; в) $\lambda = 2 + 4i$.

30.9. а) $(x, y) \in \left\{ (3, 2), (-3, -2), \left(2\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right), \left(-2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$;

б) $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (2, -1) \}$;

в) $(x, y) \in \left\{ (1, 0), (2, 1), \left(\frac{-19 - \sqrt{177}}{2}, \frac{9 + \sqrt{177}}{2} \right) \right\}$;

г) $(x, y) = (-1, 3)$;

д) $(x, y) \in \{(0, 0), (2, -1), (1, 2), (1, 68), (2, 52)\}$;

е) $(x, y) = (1, 2)$.

Розділ VI

§ 31

31.3. Ні.

31.4. $Q(\sqrt{5})$.

31.5. $Q[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$.

31.6. Можна, наприклад, встановити ізоморфізм між полем $R[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ і полем комплексних чисел \mathbb{C} .

31.7. Ні (наприклад, рівняння $x^2 + 2 = 0$ не має коренів у цьому полі).

31.8. а) $m = 9$; б) $m = 13$; в) $m = 4$; г) $m = 1 + \sqrt{13}$.

31.9. а) Ні; б) так.

31.10. а) $f(x) = 5 \left(x + \frac{1-7i}{5} \right) \left(x + \frac{1+7i}{5} \right)$;

б) $f(x) = (x-1)(x-i)$;

в) $f(x) = \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^2$;

г) $f(x) = (x-3+2i)(x+3-2i)(x-3-2i)(x+3+2i)$;

д) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$;

е) $f(x) = (x-i)(x+i) \left(x + \frac{4+\sqrt{17}}{2} \right) \left(x + \frac{4-\sqrt{17}}{2} \right)$.

31.11. а) $f(x) = x^3 - (1+i)x^2 + (1+2i)x + 1 - i$;

б) $f(x) = x^5 - (10+2i)x^4 + (14+20i)x^3 - (64+28i)x^2 + (40+128i)x - 80i$;

в) $f(x) = x^4 + (3+6i)x^3 + (-12+18i)x^2 - (36+8i)x - 24i$.

31.12. 23.

31.13. 7.

31.15. а) $y^3 + 2y^2 + 25 = 0$; б) $y^3 - 6y^2 - \frac{2}{9}y - \frac{2}{3} = 0$.

31.16. Знайти суму квадратів коренів многочлена.

31.17. а) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 6$; $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{7}$;

б) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 68x + 24$; $x_1 = 6$, $x_{2,3} = 6 \pm 2\sqrt{10}$.

31.18. Якщо $r = 8$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$; якщо $r = 20$, то $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 10$; якщо $r = 28 - 12\sqrt{2}$, то $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$, $x_3 = 7 - 3\sqrt{2}$; якщо $r = 28 + 12\sqrt{2}$, то $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 7 + 3\sqrt{2}$.

31.19. $f(x) = x^5 - \frac{5}{4}(3+i)x^4 + \frac{10}{3}(1+5i)x^3 - 10(1+3i)x^2 - 40(1-i)x - \frac{605}{12} + \frac{305}{12}i$.

31.21. $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

$$31.22. x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}.$$

$$31.23. x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \text{ та } p = 11 \text{ і } q = -6.$$

§ 32

$$32.1. \text{ а) } x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}, x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \text{ б) } x_{1,2} = -1 \pm i, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2};$$

$$\text{ в) } x_{1,2} = 2 \pm i, x_3 = -4, x_4 = 1; \text{ г) } x_{1,2} = 2 \pm i, x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{2}i.$$

$$32.2. a = -20, b = -50, x_2 = -3 - i, x_3 = 5.$$

$$32.5. \text{ а) Так; б) ні; в) так; г) ні.}$$

$$32.6. a = -243, x_{1,2} = \pm 9i, x_3 = -1, x_4 = 3.$$

$$32.10. \text{ а) } f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 1)(x + 5);$$

$$\text{ б) } f(x) = \left(x^2 + x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x^2 + x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right);$$

$$\text{ в) } f(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2)(2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2);$$

$$\text{ г) } f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + x + 1);$$

$$\text{ д) } f(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1).$$

$$32.11. \text{ а) Ні; б) так.}$$

$$32.12. \text{ Ні.}$$

§ 33

$$33.1. \text{ а) } 31; \text{ б) } -\frac{229}{108}; \text{ в) } \frac{i}{27}; \text{ г) } -\frac{175}{2916}; \text{ д) } 0; \text{ е) } 4 + i.$$

$$33.2. \text{ а) } x_1 = -2, x_{2,3} = 1;$$

$$\text{ б) } x_1 = i, x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i, x_3 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}i;$$

$$\text{ в) } x_1 = \sqrt[3]{28 + \sqrt{272}} + \sqrt[3]{28 - \sqrt{272}},$$

$$x_{2,3} = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{272}} - \sqrt[3]{28 - \sqrt{272}}}{2} \sqrt{3}i;$$

$$\text{ г) } x_1 = -\frac{1}{2}, x_{2,3} = 1;$$

$$\text{ д) } x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{139}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{139}{108}}} + 2, x_{2,3} = -\frac{x_1 + 2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \times$$

$$\times \left(\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{139}{108}}} - \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{139}{108}}} \right);$$

$$\text{ е) } x_1 = \sqrt[3]{\frac{79}{54} + \frac{\sqrt{77}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{79}{54} - \frac{\sqrt{77}}{3}};$$

$$x_{2,3} = -\frac{3x_1 - 2}{6} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\sqrt[3]{\frac{79}{54} + \frac{\sqrt{77}}{3}} - \sqrt[3]{\frac{79}{54} - \frac{\sqrt{77}}{3}} \right) + \frac{2}{3};$$

$$\text{ е) } x_{1,2,3} = 2\sqrt[3]{-2 - 2i};$$

$$\text{ ж) } x_1 = (1 + \sqrt{6})i, x_{2,3} = -\frac{1 + \sqrt{6}}{2}i \pm \frac{1 - \sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$33.3. a \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[.$$

33.4. Якщо $a = 1$, то $x = 0$. Якщо $a = \frac{4}{31}$, то $x = -\frac{3}{2}$.

33.5. $D = -\frac{3}{4}a^6$.

33.6. Якщо $a \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]3; +\infty[$, то рівняння має один дійсний і два комплексних корені; якщо $a \in \{-1, 0, 3\}$, то рівняння має три дійсних корені, два з яких дорівнюють один одному; якщо $a \in]0; 3[$, то рівняння має три різних дійсних корені.

33.9. Зробити заміну. Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях змінної в здобутому і шуканому рівняннях, матимемо $n = \frac{9a_0 - a_2 a_1}{2(a_2^2 - 3a_1)}$; $m = \sqrt{\frac{3n^2 + 2a_2 n + a_1}{3}}$, $a = m^3$ і $b = n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$.

33.10. а) $n = -3$, $m = 1$ і $y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0$;

б) $n = \frac{1}{2}$, $m = \frac{5}{6}\sqrt{3}$, $\frac{125}{72}\sqrt{3}y' + \frac{27}{4}y^2 - \frac{125}{24}\sqrt{3}y - \frac{9}{4} = 0$.

в) $n = -2$, $m = 1$, $y^3 - 2y^2 - 3y + \frac{2}{3} = 0$.

33.12. а) $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $y_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, $y_2 = -1$, $y_3 = \operatorname{tg}\frac{5}{2}\pi$; б) $\varphi = \frac{\pi}{6}$: $y_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $y_2 =$

$= \operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi$, $y_3 = \operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi$; в) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$: $y_1 = 1$, $y_2 = \operatorname{tg}\frac{11}{2}\pi$, $y_3 = \operatorname{tg}\frac{7}{2}\pi$; г) $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$y_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}$, $y_2 = \operatorname{tg}\frac{\varphi + 2\pi}{3}$, $y_3 = \operatorname{tg}\frac{\varphi + 4\pi}{3}$.

33.13. а) $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

33.17. а) $x = -\frac{3}{4}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; г) $x = -3$; д) $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx -0,4$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

33.18. а) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$;

б) $x_{1,2} = \sqrt{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$;

в) $x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{29}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{3}$;

г) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{6}$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$;

д) $x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}}{4}$, $x_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}}{4}$.

33.20. а) $x_{1,2} = -1 \pm 2i$, $x_{3,4} = -1 \pm i$; б) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$

33.22. а) $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} - 1 \pm i\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} + 1 \pm i\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{2}$;

б) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.

§ 34

34.1. а) $\frac{1}{8} < |x| < 8$; б) $\frac{7}{8} < |x| < 8$; в) $2 < |x| < 7$; г) $\frac{1}{55} < |x| < 28$.

34.2. а) $\frac{3}{2}$; б) 2; в) 2; г) 4, розглянути многочлен $\varphi(x) = -f(x)$.

34.3. а) 1; б) 1; в) $\frac{1}{2}$.

34.4. а) 6; б) 2; в) 3; г) 100.

34.5. а) Додатних коренів два або жодного, від'ємних — два або жодного; б) додатних коренів три або один, від'ємних — немає; в) додатних коренів два або жодного, від'ємних — п'ять або один; г) додатний корінь один, від'ємних — п'ять, три або один; д) додатний корінь один; від'ємних — два або жодного.

34.6. а)]-2; -1[,]1; 3[; б) $]-\frac{9}{2}; -1[$, $]-\frac{9}{2}; 1[$; в) $]-5; -\frac{1}{4}[$, $]-\frac{1}{4}; 5[$;

г) $]-\frac{5}{2}; -1[$, $]-\frac{1}{4}; \frac{5}{2}[$; д) $]-4; -\frac{1}{4}[$, $]-\frac{1}{4}; 4[$.

34.8. а) $x_1 \in]-2; -1[$, $x_2 \in]-1; 0[$, $x_3 \in]1; 2[$;

б) $x_1 \in]-2; -1[$, $x_2 \in]0; 1[$, $x_3 \in]1; 2[$;

в) один дійсний корінь: $x \in]0; 1[$;

г) два дійсних корені: $x_1 \in]0; 1[$, $x_2 \in]5; 6[$;

д) три дійсних корені: $x_1 \in]-3; -2[$, $x_2 \in]-1; 0[$; $x_3 = 1$;

е) два дійсних корені: $x_1 \in]0; 1[$, $x_2 \in]1; 2[$;

є) дійсних коренів многочлен не має.

Розділ VII

§ 35

35.1. а) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; б) $x_1 = -2$, $x_2, 3 = 2 \pm i$; в) $x_1 =$

$= -2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm 4$; г) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = 1 \pm i$; д) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{8}$;

е) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{2,3} = \frac{2 \pm i}{5}$; є) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$; ж) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = -3$;

з) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$; к) $x_1 = 2a$, $x_2 = a$, $x_3 = -1$; л) $x_1 = 1$, $x_2 = a$, $x_3 = 1 - a$; м) $x_1 = 1$, $x_2 = b - a$, $x_3 = b + a$.

35.2. а) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; б) рівняння раціональних коренів не має; в) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; г) $x = -3$; д) $x_{1,2} = 1$.

35.3. а) $f(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 1)$; б) $f(x) = (x - 1)(x^3 - 6x + 2)$;

в) $f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 13x + 6)$; г) $f(x) = (3x^2 - x + 4)(3x^2 - 4x + 4)$;

д) $f(x) = 2(x^2 + 8x + 23)(x + 3)(x + 5)$; е) $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x - 4)(x^3 + 3x^2 + 3x - 3)$.

35.4. а) Многочлен не має цілих коренів; б) застосувати критерій Ейзенштейна; в) зробити заміну $x = y + 1$ і застосувати критерій Ейзенштейна; г) многочлен не має цілих коренів і не розкладається у добуток двох квадратних тричленів з кільця $Q[x]$; е) зробити заміну $x = y + 1$ і застосувати критерій Ейзенштейна.

35.5. а) $f(x) = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - 3x + 1)$; б) незвідний; в) незвідний; г) зробити заміну $x = y - 1$ і довести, що $f(x)$ є незвідним.

35.7. а) Довести, що $f(x)$ не ділиться на многочлени $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x + 1$ і $\varphi_3(x) = x^2 + x + 1$ у кільці $Z_2[x]$ і застосувати задачу 35.6; г) многочлен не має раціональних коренів.

§ 36

36.1. а) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$; б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x - 1$; в) $f(x) = x^4 - 56x^2 + 4$; г) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$; д) $f(x) = x^6 - 15x^4 + 6x^3 + 75x^2 + 90x - 116$; е) $f(x) = x^6 - 4x^3 - 3$; є) $f(x) = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 6$; ж) $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

36.2. а) $Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$; б) $Q(\sqrt{3})$; в) $Q(\sqrt{5} + \sqrt{7})$; г) $Q(\sqrt{p} + \sqrt{q})$; д) $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; е) $Q(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt{5})$.

36.3. а) 1, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$; б) 1, $\sqrt{3}$; в) 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$; г) 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{35}$; д) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$.

§ 37

37.1. а) $-1 - \omega$; б) $\frac{1}{2}\omega(\omega^2 - \omega - 1)$; в) $\frac{1}{255}\omega(\omega^2 - 1)(64\omega^3 - 16\omega^2 + 4\omega - 257)$; г) $-\frac{1}{1509}\omega(64\omega^2 - 24\omega - 503)$; д) $\frac{1}{20}(\omega^2 + \omega)(\omega^2 + 5)$.

37.2. а) $-\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{4} + 3\sqrt[4]{2} + 1$; б) $\frac{1}{6}(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 4)$; в) $\frac{1}{93}(-2\sqrt[3]{4} + 17\sqrt[3]{2} - 5)$; г) $\frac{1}{33}(-\sqrt[3]{49} + 5\sqrt[3]{7} + 8)$; д) $-\frac{1}{567}(81\sqrt[4]{27} + 345\sqrt[4]{9} + 821\sqrt[4]{3} + 81)$.

37.3. а) $\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}$; б) $\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} + \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}$; в) $(\sqrt[8]{3} + \sqrt[8]{2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; г) $\frac{1}{8}(\sqrt[9]{5^8} - 9\sqrt[5]{5^7} \cdot 3 + \sqrt[9]{5^8} \cdot 3^2 - \dots + \sqrt[9]{3^8})$

37.4.
$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}) - (a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) - 5\sqrt{abc}}{2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$
 в)
$$\frac{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2}}{(a + b + c)^3 - 27abc}$$

37.5. а) $a + a^3 + b^3 - 3ab = 0$; б) $a^2p^3 + aq^3 + r^3 - 3apqr = 0$; в) $ab = 0$.

Додаток І
Таблиця простих чисел від 2 до 4057 та їхніх первісних коренів

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
2	1	179	2	419	2	661	2	947	2	1229	2	1523	2	1823	5
3	2	181	2	421	2	673	2	953	3	1231	3	1531	2	1831	3
5	2	191	5	431	7	677	5	967	6	1237	2	1543	2	1847	5
7	2	193	5	433	6	683	2	971	6	1249	7	1549	2	1861	2
11	2	197	5	439	3	691	3	977	3	1259	3	1553	3	1867	2
13	2	199	15	443	5	701	2	983	5	1277	19	1559	19	1871	14
17	2	199	2	443	2	709	2	991	6	1279	3	1567	3	1873	10
19	3	211	3	457	13	719	11	997	7	1283	2	1571	2	1877	6
23	2	223	2	461	2	727	5	1009	11	1289	6	1579	3	1879	3
29	2	227	6	463	3	733	6	1013	3	1291	2	1583	5	1889	2
31	3	233	3	467	3	739	3	1019	3	1297	10	1597	11	1901	2
37	3	239	7	479	13	743	5	1021	10	1301	2	1601	3	1907	2
41	6	241	7	487	3	751	3	1031	14	1303	6	1607	5	1913	3
43	3	251	6	491	2	757	3	1033	5	1307	2	1609	7	1933	5
47	3	257	3	499	7	761	6	1039	3	1319	13	1612	3	1939	2
53	2	263	5	503	5	769	11	1049	3	1321	13	1619	2	1949	2
59	2	269	2	509	2	773	2	1051	7	1327	3	1621	2	1951	3
61	2	271	6	521	3	787	2	1051	2	1361	1627	1627	3	1973	2
67	2	277	5	523	2	797	2	1063	3	1357	5	1637	2	1979	2
71	7	281	3	541	2	809	3	1069	6	1373	2	1657	11	1987	2
73	5	283	3	547	2	811	2	1087	3	1381	2	1657	3	1993	5
79	2	293	2	557	2	821	2	1091	2	1399	13	1667	2	1997	2
83	3	307	5	563	2	823	3	1093	5	1409	3	1669	2	1999	2
89	3	311	17	569	3	827	2	1097	3	1423	3	1693	2	2003	3
97	2	313	10	571	5	829	2	1103	5	1427	2	1697	2	2011	3
101	2	317	2	577	2	839	11	1109	2	1429	6	1699	3	2017	5
103	5	331	3	587	3	853	2	1117	2	1433	3	1709	3	2027	2
107	2	337	10	593	2	857	2	1123	2	1439	7	1721	3	2029	2
109	6	347	2	599	3	859	2	1129	11	1447	3	1723	2	2039	7
113	3	349	2	601	7	863	5	1151	17	1451	2	1733	3	2053	2
127	3	353	3	607	3	877	2	1153	5	1453	2	1741	2	2063	2
131	2	359	3	613	2	881	3	1163	5	1459	5	1747	2	2069	5
137	3	367	6	617	3	883	2	1171	2	1471	2	1753	7	2081	3
139	2	373	2	619	2	887	5	1181	7	1481	6	1759	6	2083	2
149	2	379	2	631	2	907	2	1187	7	1483	3	1777	5	2087	2
151	6	383	5	641	3	911	17	1187	2	1487	5	1783	10	2089	2
157	2	389	2	647	3	919	7	1193	11	1489	14	1787	2	2099	7
163	2	397	5	653	2	929	3	1213	2	1493	2	1789	6	2111	2
167	5	401	3	659	2	937	5	1217	3	1499	2	1801	11	2113	5
173	2	409	21	659	5	941	2	1223	5	1511	11	1811	6	2129	3

Продовження додатка І

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
1823	5	2131	2	2437	2	2749	6	3083	2	3438	2	3733	5	4057	2
1831	3	2137	10	2441	2	2753	3	3089	3	3449	6	3739	7		2
1847	5	2141	2	2447	2	2767	3	3109	3	3457	3	3761	2		3
1861	2	2143	3	2459	3	2777	3	3119	7	3461	7	3767	2		5
1867	2	2153	3	2467	2	2789	2	3121	7	3463	3	3769	2		7
1871	14	2161	23	2473	3	2791	6	3127	3	3467	3	3779	2		2
1873	10	2179	5	2477	5	2797	2	3163	3	3469	2	3793	5		5
1877	6	2203	5	2503	2	2801	3	3167	5	3491	2	3797	2		2
1879	6	2207	5	2521	17	2803	3	3169	7	3499	2	3803	2		2
1889	3	2213	2	2531	2	2819	2	3181	7	3511	7	3821	3		3
1901	2	2221	2	2539	2	2833	2	3187	2	3517	2	3823	3		3
1907	2	2237	2	2543	2	2837	2	3191	11	3527	5	3833	3		3
1913	3	2239	3	2549	5	2843	2	3203	2	3529	17	3847	5		2
1931	2	2243	2	2551	2	2851	2	3209	3	3533	3	3851	2		2
1933	5	2251	7	2557	6	2857	2	3217	6	3539	2	3853	2		2
1949	2	2267	2	2579	11	2861	2	3221	10	3541	7	3863	5		5
1951	3	2269	2	2591	2	2879	2	3229	2	3547	2	3877	2		2
1973	3	2273	3	2593	7	2887	5	3251	6	3557	2	3881	2		13
1979	2	2281	7	2609	3	2887	3	3253	6	3559	6	3889	11		2
1987	2	2287	19	2617	5	2903	3	3257	3	3559	2	3907	2		2
1993	5	2293	2	2621	2	2909	5	3259	2	3581	2	3911	2		13
1997	2	2297	6	2633	2	2917	5	3271	3	3583	3	3917	2		2
1999	3	2309	2	2637	3	2927	2	3299	2	3593	3	3919	3		3
2003	3	2311	3	2647	3	2939	5	3301	6	3607	5	3923	2		2
2011	3	2333	2	2659	13	2953	2	3307	2	3613	2	3929	3		3
2017	5	2339	2	2663	2	2957	2	3313	10	3617	3	3931	2		2
2027	2	2341	7	2671	6	2963	2	3319	6	3623	5	3943	3		2
2029	2	2347	3	2677	3	2969	3	3323	6	3623	15	3947	2		6
2039	7	2351	13	2687	2	2971	10	3329	2	3631	2	3967	2		2
2053	2	2357	2	2689	2	2999	17	3331	3	3637	2	3989	2		2
2063	5	2371	2	2689	5	3001	14	3343	3	3643	2	4001	2		3
2069	2	2377	5	2693	19	3011	2	3347	5	3659	13	4003	2		2
2081	3	2381	3	2699	2	3019	2	3359	11	3671	5	4007	5		5
2083	5	2383	3	2707	2	3023	5	3361	22	3673	2	4013	2		2
2087	2	2389	5	2711	3	3037	2	3371	2	3677	2	4019	2		2
2089	7	2393	2	2713	3	3049	5	3373	5	3691	2	4021	2		2
2099	2	2399	11	2719	3	3049	11	3389	3	3697	5	4027	2		3
2111	7	2411	6	2729	3	3061	6	3391	6	3701	2	4049	2		2
2113	5	2417	3	2731	3	3067	2	3407	5	3709	7	4051	3		6
2129	3	2423	5	2741	5	3079	6	3413	2	3727	3	4057	2		5

ТАБЛИЦІ ПЕРВІСНИХ КОРЕНІВ ТА ІНДЕКСІВ

Просте число 3
Первісні корені: 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2								

Просте число 5
Первісні корені: 2, 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	3	2					

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	3						

Просте число 7
Первісні корені: 3, 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	1	4	5	3			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	2	6	4	5				

Просте число 11
Первісні корені: 2, 6, 7, 8

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	8	2	4	9	7	3	6
1	5									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

Просте число 13
Первісні корені: 2, 6, 7, 11

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	4	2	9	5	11	3	8
1	10	7	6							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
1	10	7								

Просте число 17
Первісні корені: 3, 5, 6, 7, 11, 12, 14.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	14	1	12	5	15	11	10	2
1	3	7	13	4	9	6	8			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14
1	8	7	4	12	2	6				

¹ Скрізь за основу таблиці індексів береться найменший первісний корінь.

Просте число 19

Первісні корені: 2, 3, 10, 14, 15

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	13	2	16	14	6	3	8
1	17	12	15	5	7	11	4	10	9	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18
1	17	15	11	3	6	12	5	10		

Просте число 23

Первісні корені: 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	16	4	1	18	19	6	10
1	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15
2	5	13	11							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	2	10	4	20	8	17	16	11
1	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7
2	12	14								

Просте число 29

Первісні корені: 2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	5	2	22	6	12	3	10
1	23	25	7	18	13	27	4	21	11	9
2	24	17	26	20	8	16	19	15	14	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19
1	9	18	7	14	28	27	25	21	13	26
2	23	17	5	10	20	11	22	15		

Просте число 31

Первісні корені: 3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	24	1	18	20	25	28	12	2
1	14	23	19	11	22	21	6	7	26	4
2	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9
3	15									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	19	26	16	17	20	29
1	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12
2	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21

Просте число 37

Первісні корені: 2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	26	2	23	27	32	3	16
1	24	30	28	11	33	13	4	7	17	35
2	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21
3	14	9	5	20	8	19	18			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	27	17	34	31
1	25	13	26	15	30	23	9	18	36	35
2	33	29	21	5	10	20	3	6	12	24
3	11	22	7	14	28	19				

Просте число 41

Первісні корені: 6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 34, 35

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	26	15	12	22	1	39	38	30	
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

Просте число 43

Первісні корені: 3, 5, 12, 18, 19, 20, 26, 28, 29, 30, 33, 34

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	27	1	12	25	28	35	39	2	
1	10	30	13	32	20	26	24	38	29	19
2	37	36	15	16	40	8	17	3	8	41
3	11	34	9	31	23	18	14	7	4	33
4	22	0	21							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	38	28	41	37	25	32
1	10	30	4	12	36	22	23	26	35	19
2	14	42	40	34	16	5	15	2	6	18
3	11	33	13	39	31	7	21	20	17	8
4	24	29								

Просте число 47

Первісні корені: 5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 39, 40, 41, 43, 44, 45

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	18	20	36	1	38	32	8	40	
1	19	7	10	11	4	21	26	16	12	45
2	37	6	25	5	28	2	29	14	22	35
3	39	3	44	27	34	33	30	42	17	31
4	9	15	24	13	43	41	23			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	31	14	23	21	11	8	40
1	12	13	18	43	27	41	17	38	2	10
2	3	15	28	46	42	22	16	33	24	26
3	36	39	7	35	34	29	4	20	6	30
4	9	45	37	44	32	19				

Просте число 53

Первісні корені: 2, 3, 5, 8, 12, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 41, 45, 48, 50, 51

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	17	2	47	18	14	3	34	
1	48	6	19	24	15	12	4	10	35	37
2	49	31	7	39	20	42	25	51	16	46
3	13	33	5	23	11	9	36	30	38	41
4	50	45	32	22	8	29	40	44	21	28
5	43	27	26							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	11	22	44	35
1	17	34	15	30	7	14	28	3	6	12
2	24	48	43	33	13	26	52	51	49	45
3	37	21	42	31	9	18	36	19	38	23
4	46	39	25	50	47	41	29	5	10	20
5	40	27								

Просте число 59

Первісні корені: 2, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 18, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 47, 50, 52, 54, 55, 56

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	50	2	6	51	18	3	42	
1	7	25	52	45	19	56	4	40	43	38
2	8	10	26	15	53	12	46	34	20	28
3	57	49	5	17	41	24	44	55	39	37
4	9	14	11	33	27	48	16	23	54	36
5	13	32	47	22	35	31	21	30	29	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	5	10	20	40
1	21	42	25	50	41	23	46	33	7	14
2	28	56	53	47	35	11	22	44	29	58
3	57	55	51	43	27	54	49	39	19	38
4	17	34	9	18	36	13	26	52	45	31
5	3	6	12	24	48	37	15	30		

Просте число 61

Первісні корені: 2, 6, 7, 10, 17, 18, 26, 30, 31, 35, 43, 44, 51, 54, 55, 59

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	6	2	22	7	49	3	12	
1	23	15	8	40	50	25	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	26	50	30	17	54	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31

Просте число 67

Первісні корені: 2, 7, 11, 12, 13, 18, 20, 28, 31, 32, 34, 41, 44, 46, 48, 50, 51, 57, 61, 63

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	39	2	15	40	23	3	12	
1	16	59	41	19	24	54	4	64	13	10
2	17	62	60	28	42	30	20	51	25	44
3	55	47	5	32	65	38	14	22	11	58
4	18	53	63	9	61	27	29	50	43	46
5	31	37	21	57	52	8	26	49	45	36
6	56	7	48	35	6	34	33			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	61	55	43
1	19	38	9	18	36	5	10	20	40	13
2	26	52	37	7	14	28	56	45	23	46
3	25	50	33	66	65	63	59	51	35	3
4	12	24	48	29	58	49	31	62	57	
5	47	27	54	41	15	30	60	53	39	11
6	22	44	21	42	17	34				

Просте число 71

Первісні корені: 7, 11, 13, 21, 22, 28, 31, 33, 35, 42, 44, 47, 52, 53, 55, 56, 59, 61, 62, 63, 65, 67, 68, 69

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	6	26	12	28	32	1	18	52	
1	34	31	38	39	7	54	24	49	58	16
2	40	27	37	15	44	56	45	8	13	68
3	60	11	30	57	55	29	64	20	22	65
4	46	25	33	48	43	10	21	9	50	2
5	62	5	51	23	14	59	19	42	4	3
6	66	69	17	53	36	67	63	47	61	41
7	35									

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	7	49	59	58	51	2	14	27	47
1	45	31	4	28	54	23	19	62	8	56
2	37	46	38	53	16	41	3	21	5	35
3	32	11	6	42	10	70	64	22	12	13
4	20	69	57	44	24	26	40	67	43	17
5	48	52	9	63	15	34	25	33	18	55
6	30	68	50	66	36	39	60	65	29	61

Просте число 73

Первісні корені: 5, 11, 13, 14, 15, 20, 26, 28, 29, 31, 33, 34, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 53, 58, 59, 60, 62, 68

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	8	6	16	1	14	33	24	12	
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	19	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	43	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44								

Просте число 79

Первісні корені: 3, 6, 7, 28, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 43, 47, 48, 53, 54, 59, 60, 63, 66, 68, 70, 74, 75, 77

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	4	1	8	62	5	53	12	2		
1	66	68	9	34	57	63	16	21	6	32	
2	70	54	72	26	13	46	38	3	61	11	
3	67	56	20	69	25	37	10	19	36	35	
4	74	75	58	49	76	64	30	59	17	28	
5	5	50	22	42	77	7	52	65	33	15	31
6	71	45	60	55	24	18	73	48	29	27	
7	41	51	14	44	23	47	40	43	39		

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	1	36	29	8	24	72	58	16	48	65	37
1	32	17	51	74	64	34	23	69	49	64	
2	46	59	19	67	13	39	38	35	26	78	
3	79	70	52	77	73	61	25	75	67	43	
4	5	50	71	55	7	21	63	31	14	42	47
5	62	28	5	15	45	56	10	30	11	33	
6	20	60	22	66	40	41	44	53			

Просте число 83

Первісні корені: 2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 34, 35, 39, 42, 43, 45, 46, 47, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 66, 67, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 80

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	72	2	27	73	8	3	62	
1	28	24	74	77	9	17	4	56	63	47
2	29	80	25	60	75	54	78	52	10	12
3	18	38	5	14	57	35	64	29	48	67
4	30	40	81	71	26	7	61	23	76	16
5	55	46	79	59	53	51	11	37	13	34
6	19	66	39	70	6	22	15	45	58	50
7	36	33	65	69	21	44	49	32	68	43
8	31	42	41							

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	45	7	14
1	28	56	29	58	33	66	49	15	30	60
2	37	74	65	47	11	22	44	5	10	20
3	40	80	77	71	59	35	70	57	31	62
4	41	82	81	79	75	67	51	19	38	76
5	69	55	27	54	25	50	17	34	68	53
6	23	46	9	18	36	72	61	39	78	73
7	63	43	3	6	12	24	48	13	26	52
8	21	42								

Просте число 89

Первісні корені: 3, 6, 7, 13, 14, 15, 19, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 41, 43, 46, 48, 51, 54, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 70, 74, 75, 76, 82, 83, 86

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	16	1	32	70	17	81	48	2	
1	86	84	33	23	9	71	64	6	18	35
2	14	82	12	57	49	52	39	3	25	59
3	87	31	80	85	22	63	34	11	51	24
4	30	21	10	29	22	73	54	65	74	
5	68	7	55	78	19	66	41	36	75	43
6	15	69	47	83	8	5	13	56	38	58
7	79	62	50	20	27	53	67	77	40	42
8	46	4	37	61	26	76	45	60	44	

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	81	65	17	51	64	14
1	42	37	22	66	20	60	2	6	18	54
2	73	41	34	13	39	28	84	74	44	43
3	40	31	4	12	36	19	57	82	68	26
4	78	56	79	59	88	86	80	62	9	24
5	72	38	25	75	47	52	67	23	69	29
6	87	83	71	35	16	48	55	76	50	61
7	5	15	45	46	49	58	85	77	53	70
8	32	7	21	63	11	33	10	30		

Просте число 97

Первісні корені: 5, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 21, 23, 26, 29, 37, 38, 39, 40, 41, 56, 57, 58, 59, 60, 68, 71, 74, 76, 80, 82, 83, 84, 87, 90, 92

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	34	70	68	1	8	31	6	44	
1	35	86	42	25	65	71	40	89	78	81
2	69	5	24	77	76	2	59	18	3	13
3	9	46	74	60	27	32	16	91	19	95
4	7	85	39	4	58	45	15	84	14	62
5	36	63	93	10	52	87	37	55	47	67
6	43	64	80	75	12	26	94	57	61	51
7	66	11	50	28	29	72	53	21	33	30
8	41	88	23	17	73	90	38	83	92	54
9	79	56	49	20	22	82	48			

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	28	43	21	8	40	6	30
1	53	71	64	82	22	13	65	34	73	74
2	93	77	94	82	22	10	50	56	86	42
3	79	7	35	78	2	10	60	58	96	92
4	16	80	12	60	9	45	31	58	96	92
5	72	69	54	76	89	57	91	67	44	26
6	33	68	49	51	61	14	70	59	4	20
7	3	15	75	84	32	63	24	23	18	90
8	62	19	95	87	47	41	11	55	81	17
9	85	37	88	52	66	39				

Таблиця квадратів натуральних чисел від 1 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Завало С. Т. та ін. Алгебра і теорія чисел.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1976.— Ч. 2.— 384 с.
2. Завало С. Т. и др. Алгебра и теория чисел.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1980.— Ч. 2.— 402 с.
3. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел.— М.: Высш. шк., 1979.— 559 с.
4. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел.— М.: Просвещение, 1974.— Ч. 1.— 383 с.
5. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел.— М.: Просвещение, 1978.— Ч. 2.— 448 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1971.— 432 с.
7. Окунев Л. Я. Высшая алгебра.— М.: Просвещение, 1966.— 336 с.
8. Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— 496 с.
9. Проскураков И. В. Числа и многочлены.— М.: Просвещение, 1965.— 284 с.
10. Виноградов И. М. Основы теории чисел.— М.: Наука, 1981.— 176 с.
11. Бухштаб А. А. Теория чисел.— М.: Просвещение, 1966.— 384 с.
12. Михелович Ш. Х. Теория чисел.— М.: Высш. шк., 1967.— 336 с.
13. Грибанов В. У., Титов П. И. Сборник упражнений по теории чисел.— М.: Просвещение, 1964.— 143 с.
14. Бородин О. І. Теорія чисел.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1970.— 274 с.
15. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Наука, 1977.— 288 с.
16. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел.— М.: Просвещение, 1970.— 128 с.
17. Оре О. Приглашение в теорию чисел.— М.: Наука, 1980.— 128 с.
18. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре.— М.: Наука, 1984.— 416 с.
19. Алгебра и теория чисел / Н. А. Казачек, Г. Н. Перлатов, Н. Я. Виленкин, А. И. Бородин.— М.: Просвещение, 1974.— 200 с.
20. Яковкин М. В. Вычислительные действия над многочленами.— М.: Учпедгиз, 1961.— 80 с.
21. Давыдов А. К. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям.— М.: Учпедгиз, 1959.— 150 с.
22. Ляпин С. Е. и др. Сборник задач по элементарной алгебре.— М.: Просвещение, 1973.— 351 с.
23. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Просвещение, 1964.— 185 с.
24. Алгебра і теорія чисел: Практикум: В 2-х ч. / С. Т. Завало, С. С. Левіщенко, В. В. Пилаев, І. О. Рокицький.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1983.— Ч. 1.— 232 с.
25. Проскураков И. В. Сборник задач по линейной алгебре.— М.: Наука, 1974.— 384 с.
26. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1972.— 495 с.
27. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру.— М.: Наука, 1973.— 448 с.
28. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Мир, 1977.— 623 с.
29. Постников М. М. Теория Галуа.— М.: Физматгиз, 1963.— 220 с.
30. Постников М. М. Введение в теорию алгебраических чисел.— М.: Наука, 1982.— 239 с.
31. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма.— М.: Мир, 1980.— 484 с.
32. Хинчин А. Я. Цепные дроби.— М.: Наука, 1978.— 112 с.
33. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа.— М.: Наука, 1973.— 144 с.
34. Скорняков Л. А. Элементы алгебры.— М.: Наука, 1980.— 240 с.
35. Хассе Г. Лекции по теории чисел.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 528 с.