

- г) не більші від 2311 і не діляться на жодне з чисел 5, 7, 13, 17;
 д) не більші від 12 317 і взаємно прості з 1575;
 е) не більші від 1000 і не взаємно прості з 363?

4.25. Турист перебував у дорозі ціле число днів і проїжджав кожен день стільки кілометрів, скільки днів він подорожував. Якби він проїжджав щодня по 20 км і зупинявся на один день через кожні 40 км, то час його подорожування збільшився б на 37 днів. Скільки днів подорожував турист?

§ 5. Ланцюгові дроби. Підхідні дроби ланцюгового дробу

Література

- [1] — § 9, с. 99—111;
- [2] — § 9, с. 98—111;
- [3] — гл. 11, § 3, с. 379—385;
- [4] — гл. IV, § 14, 15, с. 260—278;
- [10] — гл. I, § 6, с. 18—22;
- [11] — гл. 5, § 1, 2, с. 58—66;
- [12] — гл. III, § 3, с. 69—79;
- [14] — § 7—9, с. 31—41.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай α — довільне дійсне число. Позначимо через q_1 найбільше ціле число, яке не перевищує α . При дробовому α маємо $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, де $\alpha_1 > 1$. Analogічно при дробових $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ маємо

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{s-1} &= q_{s-1} + \frac{1}{\alpha_s}, \quad \alpha_s > 1, \end{aligned}$$

і тому дістаємо розклад в елементарний ланцюговий, або елементарний неперевний, дріб:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{\alpha_s}}}}. \quad (1)$$

Якщо α — ірраціональне, то $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — ірраціональні (якщо α_s — раціональне, то згідно з розкладом (1) число α теж раціональне), і через це зазначений процес можна нескінченно продовжити, і в результаті дістанемо нескінчений ланцюговий дріб.

Якщо α — раціональне, то існує такий раціональний нескоротний дріб $\frac{a}{b}$, що $\alpha = \frac{a}{b}$, $b > 0$. Тоді зазначений процес скінчений і його можна здійснити за допомогою алгоритму Евкліда. Справді, для чисел a і b маємо:

$$\begin{aligned}
 a &= bq_0 + r_1, & \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{1}{\frac{r_1}{b}} \\
 b &= r_1 q_1 + r_2, & \frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}} \\
 &\dots & &\dots \\
 r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, & \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_n}{r_{n-1}}} \\
 r_{n-1} &= r_n q_n, & \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n,
 \end{aligned}$$

(2)

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Числа q_0, q_1, \dots , які містяться в розкладі числа a в ланцюговий дріб, називають неповними частками або елементами цього ланцюгового дробу. Скорочено довільний ланцюговий дріб записують так:

$$a = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, \dots].$$

Число q_0 є цілою частиною числа a , а $[0; q_1, q_2, \dots]$ — дробовою частиною числа a . Правильні дроби $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots$ називаються відповідно першою, другою і т. д. ланкою ланцюгового дробу.

Будь-яке раціональне число a можна подати у вигляді деякого скінченного ланцюгового дробу:

$$a = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n].$$

Якщо $q_n > 1$ при $n > 0$, то такий розклад єдиний.

Будь-яке іrrаціональне число можна подати у вигляді деякого нескінченного ланцюгового дробу, причому цей розклад єдиний.

Нескінчений ланцюговий дріб називається чистим періодичним, якщо його неповні частки періодично повторюються в тій самій послідовності, починаючи з q_0 , тобто, якщо дріб має вигляд

$$[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots]$$

або

$$[(q_0; q_1, q_2, \dots, q_n)].$$

Ланцюговий дріб називається мішаним періодичним, якщо період ланцюгового дробу розпочинається не з q_0 , тобто якщо дріб має вигляд $[q_0; q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_n, p_0, \dots, p_n, \dots]$, або $[q_0; q_1, \dots, q_m, (p_0, \dots, p_n)]$.

Будь-який нескінчений періодичний ланцюговий дріб (чистий чи мішаний) є дійсним коренем квадратного рівняння в цілими коефіцієнтами, тобто є так званою квадратичною іrrаціональністю.

Будь-який іrrаціональний корінь довільного квадратного рівняння в цілими коефіцієнтами розкладається в нескінчений періодичний ланцюговий дріб (чистий чи мішаний).

Дроби

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= q_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \dots \\ \frac{P_k}{Q_k} &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_k}}, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

називаються підхідними дробами. При цьому $\frac{P_k}{Q_k}$ називається підхідним дробом k -го порядку. Якщо k — парне (непарне), то дріб $\frac{P_k}{Q_k}$ називається підхідним дробом парного (непарного) порядку. Зрозуміло, що для скінченного ланцюгового дробу порядку n виконується рівність

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b},$$

звідси $\frac{a}{b} = \alpha$, а α — раціональне число, для якого будувався ланцюговий дріб.

Правило утворення підхідних дробів (скінчених і нескінчених):

$$P_s = q_s P_{s-1} + P_{s-2}, \quad Q_s = q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}, \quad s > 1. \quad (4)$$

Звідси $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$. Шоб формула (4) виконувалася і при $s = 1$, покладають $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$. Усі обчислення зручно виконувати за такою схемою (табл. 1).

Таблиця 1

k	-1	0	1	2	...	n
q_k	—	q_0	q_1	q_2		q_n
P_k	1	q_0	$P_1 = q_1 P_0 + P_{-1}$	$P_2 = q_2 P_1 + P_0$		$P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	0	1	$Q_1 = q_1 Q_0 + Q_{-1}$	$Q_2 = q_2 Q_1 + Q_0$		$Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Щоб обчислити P_s , $s = 1, 2, \dots, n$, треба число q_s , яке стоїть над P_s , помножити на число P_{s-1} , яке передує P_s з цього самого ряду, і до добутку додати число P_{s-2} , яке стоїть в тому самому рядку і передує P_{s-1} . Аналогічно обчислюють і Q_s .

Справедливі такі властивості підхідних дробів для скінченного ланцюгового дробу:

$$1^{\circ}. \quad P_s Q_{s-1} - P_{s-1} Q_s = (-1)^{s-1}, \quad s > 1;$$

2^o. Кожен підхідний дріб нескоротний;

$$3^{\circ}. P_s Q_{s-2} - P_{s-2} Q_s = (-1)^s q_s, \quad s > 2;$$

4°. Підхідні дроби парного порядку даного ланцюгового дробу утворюють зростаючу послідовність, а підхідні дроби непарного порядку — спадну послідовність;

5°. Кожен підхідний дріб парного порядку даного ланцюгового дробу менший за будь-який підхідний дріб непарного порядку цього ланцюгового дробу.

Якщо дійсне число α розкладено в ланцюговий дріб (скінчений чи нескінчений)

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots]$$

і $\frac{P_k}{Q_k}$ є значенням k -го підхідного дробу, то

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^2}$$

(оцінка похибки наближення числа α підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$).

Якщо α — дійсне число, $\frac{P_k}{Q_k}$ — k -й підхідний дріб розкладу α у ланцюговий дріб, $\frac{x}{y}$ — довільний раціональний дріб із знаменником y , меншим від Q_k , то виконується нерівність $\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|$ (теорема про найкраще наближення).

Ланцюгові дроби знаходять широке застосування. Сформулюємо теорему, за якою знаходить загальний розв'язок у цілих числах лінійного рівняння з двома невідомими, коефіцієнти і вільний член якого є цілі числа (так звані невизначені рівняння).

Загальний розв'язок у цілих числах рівняння $ax + by = c$, де a, b, c — цілі числа, а $(a, b) = 1$, можна подати у вигляді

$$x = (-1)^{n-1} cQ_{n-1} + bt, \quad y = (-1)^n cP_{n-1} - at,$$

де t — довільне ціле число, а P_{n-1} і Q_{n-1} — чисельник і знаменник передостаннього підхідного дробу розкладу числа $\frac{a}{b}$ у ланцюговий дріб. Оскільки тут t — довільне ціле число, то можна користуватися формулами $x = (-1)^{n-1} cQ_{n-1} - bt$, $y = (-1)^n cP_{n-1} + at$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розкласти в ланцюговий дріб число $-\frac{602}{367}$ і знайти всі підхідні дроби.

Розв'язання. Якщо $\frac{a}{b}$ — додатний дріб, то застосовуємо алгоритм Евкліда. Якщо $\frac{a}{b} < 0$, то спочатку подаємо його у вигляді $\frac{a}{b} = -k + \frac{a_1}{b_1}$, де k — натуральне число, а $\frac{a_1}{b_1}$ — правильний дріб. Отже, маємо

$$-\frac{602}{367} = -2 + \frac{132}{367}.$$

Далі, за алгоритмом Евкліда дістаємо

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c|cc}
 367 & 132 \\
 -264 & 2 \\
 \hline
 132 & 103 \\
 -103 & 1 \\
 \hline
 29 & 87 \\
 -87 & 3 \\
 \hline
 16 & 29 \\
 -16 & 1 \\
 \hline
 13 & 16 \\
 -13 & 1 \\
 \hline
 3 & 12 \\
 -12 & 4 \\
 \hline
 1 & 3 \\
 -3 & 3 \\
 \hline
 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Отже, $-\frac{602}{367} = [-2; 2, 1, 3, 1, 1, 4, 3]$, зокрема, $q_0 = -2$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = 3$, $q_4 = 1$, $q_5 = 1$, $q_6 = 4$, $q_7 = 3$. Для обчислення підхідних дробів складаємо таблицю (табл. 2).

Таблиця 2

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
q_k	-	-2	2	1	3	1	1	4	3
P_k	1	-2	-3	-5	-18	-23	-41	-187	-602
Q_k	0	1	2	3	11	14	25	114	367

Звідси

$$\begin{aligned}
 \frac{P_0}{Q_0} &= -2; \quad \frac{P_1}{Q_1} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = -\frac{5}{3}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = -\frac{18}{11}; \\
 \frac{P_4}{Q_4} &= -\frac{23}{14}; \quad \frac{P_5}{Q_5} = -\frac{41}{25}; \quad \frac{P_6}{Q_6} = -\frac{187}{114}; \quad \frac{P_7}{Q_7} = -\frac{602}{367}.
 \end{aligned}$$

Зauważення

- Оскільки $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$, то нижні дві клітинки останнього стовпчика в таблиці для обчислення підхідних дробів є своєрідною перевіркою правильності виконання всіх обчислень.
- Якщо звичайний дріб $\frac{a}{b}$ розкладти в ланцюговий, то останній підхідний дріб $\frac{P_n}{Q_n}$ буде нескоротний, ланцюговий дріб дає змогу водночас скорочувати дріб $\frac{a}{b}$.

3. Обчисливши всі підхідні дроби за даним ланцюговим дробом $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$, можна дістати нескоротний дріб $\frac{a}{b}$, що відповідає йому.

2. Іrrациональне число $\sqrt{14}$ розкласти в ланцюговий дріб і обчислити з точністю до 0,0001 значення $\sqrt{14}$.

Розв'язання. Щоб розкласти дійсне число a в ланцюговий дріб, використовують алгоритм Ейлера — алгоритм виділення цілої частини.

$$a = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \text{ де } q_0 = [a] \text{ і } \alpha_1 > 1;$$

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ де } q_1 = [\alpha_1] \text{ і } \alpha_2 > 1;$$

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}, \text{ де } q_2 = [\alpha_2] \text{ і } \alpha_3 > 1;$$

.....

Про послідовність q_0, q_1, q_2, \dots , кажуть, що її побудовано з числа a за допомогою алгоритму виділення цілої частини. Всі члени цієї послідовності — цілі числа, причому $q_i > 1$ для $i = 1, 2, \dots$

Процес побудови цієї послідовності закінчується тоді, коли деяке α_n буде цілим числом (тобто тоді, коли $\alpha_{n+1} = 1$).

Якщо a — раціональне число, тобто $a = \frac{a}{b}$, де $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, то, застосувуючи алгоритм Евкліда до a і до чисел a і b , дістанемо ту саму послідовність. Тоді матимемо скінченну послідовність $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ і розклад числа $a =$

$= \frac{a}{b}$ в скінченній ланцюговий дріб: $a = \frac{a}{b} = [q_0; q_1, \dots, q_n]$.

Якщо a — іrrациональне число, то, очевидно, послідовність q_0, q_1, q_2, \dots нескінчена (тоді всі $\alpha_i > 1$, $i = 1, 2, \dots$).

Використовуючи алгоритм виділення цілої частини для числа $\sqrt{14}$, маємо:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 3}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 2}{2} - 2} = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 2}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \sqrt{14} + 3 = 6 + \frac{1}{\alpha_5},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{14} + 3 - 6} = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}.$$

Оскільки $\alpha_5 = \alpha_1$, то

$$\sqrt{14} = [3; (1, 2, 1, 6)].$$

За наближене значення $\sqrt{14}$ можна взяти один з підхідних дробів побудованого ланцюгового дробу. Для обчислення підхідних дробів складемо таблицю (табл. 3).

Таблиця 3

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
q_k	-	3	1	2	1	6	1	2	1	...
P_k	1	3	4	11	15	101	116	333	449	...
Q_k	0	1	1	3	4	27	31	89	120	...

Як відомо, похибка наближення числа α підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$ не перевищує $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$ або $\frac{1}{Q_k^2}$.

Оскільки в даному разі $\frac{1}{Q_6 Q_7} = \frac{1}{89 \cdot 120} < 0,0001$, то за наближене значення $\sqrt{14}$ з точністю до 0,0001 можна взяти підхідний дріб $\frac{P_6}{Q_6}$, тобто $\frac{333}{89} \approx 3,7416$.

Зauważення. Будь-який наступний за $\frac{P_6}{Q_6}$ підхідний дріб буде точнішим раціональним наближенням до $\sqrt{14}$. Проте краще вибирати за наближення той з підхідних дробів, в якого знаменник найменший.

3. Знайти квадратичну ірраціональність α , якщо $\alpha = [4; 3, (2,1)]$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку нескінчений чистий періодичний ланцюговий дріб, який дістаємо із заданого ланцюгового дробу після того, як відкинемо цифри, що стоять до періоду:

$$y = [(2,1)] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

Маємо

$$y = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}},$$

звідки

$$y^2 - 2y - 2 = 0, \quad y_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Оскільки y — додатна квадратична ірраціональність, то $y = 1 + \sqrt{3}$. Тепер перетворимо в квадратичну ірраціональність заданий нескінчений мішаний періодичний ланцюговий дріб:

$$[4; 3, (2, 1)] = [4; 3, y] = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{3}}} =$$

$$= 4 + \frac{1 + \sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{17 + 13\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{49 - \sqrt{3}}{11}.$$

Отже,

$$[4; 3, (2, 1)] = \frac{49 - \sqrt{3}}{11}.$$

4. Розв'язати в цілих числах рівняння $-117x + 343y = 119$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння так:

$$117(-x) + 343y = 119. \quad (1)$$

Визначимо невідомі $-x$ та y . Загальний розв'язок у цілих числах рівняння $ax + by = c$, де a, b, c — цілі числа й $(a, b) = 1$, подамо у вигляді

$$x = (-1)^{n-1}cQ_{n-1} + bt, \quad (2)$$

$$y = (-1)^n cP_{n-1} - at,$$

де t — довільне ціле число, а P_{n-1} і Q_{n-1} — чисельник і знаменник передостаннього підхідного дробу розкладу $\frac{a}{b}$ у ланцюговий дріб.

У цьому разі $a = 117$, $b = 343$, $(117, 343) = 1$.

Розкладемо дріб $\frac{117}{343}$ в ланцюговий: $a = [0; 2, 1, 13, 1, 1, 1, 2]$.

Отже, $n = 7$. Обчислимо $P_{n-1} = P_6 = 44$ і $Q_{n-1} = Q_6 = 129$. Маємо $P_6 = 44$, $Q_6 = 129$. Тоді одним з окремих розв'язків є

$$-x_0 = (-1)^6 \cdot 119 \cdot 129 = 15351, \quad y_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 44 = -5236.$$

Згідно з формулами (2), загальний розв'язок запишемо як

$$-x = 15351 + 343t, \quad y = -5236 - 117t,$$

або

$$x = -15351 - 343t, \quad y = -5236 - 117t.$$

Маємо порівняно великі за абсолютною величиною окремі значення для x_0 і y_0 , проте із загального розв'язку можна дістати інші окремі значення для x і y , які будуть найменші за абсолютною величиною. Нехай $t = -45$. Тоді $x_1 = 84$, $y_1 = 29$ і загальний розв'язок рівняння (1) є

$$x = 84 + 343k, \quad y = 29 + 117k \quad (\text{тут замінено } -t \text{ на } k).$$

Зауваження.

1. У розглянутому прикладі значення x і y можна було визначити відразу.

Справді, розкладаючи $\frac{117}{343}$ в ланцюговий дріб, дістаємо

$$-\frac{117}{343} = [-1; 1, 1, 1, 13, 1, 1, 1, 2].$$

Тоді $n = 8$, $a = -117$, $b = 343$, $c = 119$, $P_{n-1} = P_7 = -44$, $Q_{n-1} = Q_7 = 129$. Згідно з формулами (2), $x_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 129 = -15351$, $y_0 = (-1)^8 \cdot 119 \cdot (-44) = -44 \cdot 119 = -5236$.

Отже, $x = -15351 + 343t$, $y = 5236 + 117t$.

При $t = 45$ маємо той самий результат, що й раніше:

$$x = 84 + 343t, \quad y = 29 + 117t.$$

2. Часто при розв'язуванні аналогічних задач треба обчислити тільки підхідний дріб $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Проте доцільно заповнювати всю таблицю для підхідних

дробів, оскільки, обчисливши дріб $\frac{P_n}{Q_n}$, можна перевірити розв'язання.

Задачі

5.1. Розкласти в ланцюгові дроби і обчислити їхні підхідні дроби для раціональних чисел:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $\frac{23}{18}$; | е) $\frac{521}{143}$; |
| б) $\frac{36}{19}$; | ж) $-\frac{83}{217}$; |
| в) 2,55; | з) $-\frac{99}{170}$; |
| г) $-1,425$; | |
| д) $-\frac{602}{367}$; | к) 0,375; |
| е) $-5\frac{28}{57}$; | л) $-0,4$ (51). |

5.2. За допомогою розкладу в ланцюгові дроби скротити дроби:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| а) $\frac{1180}{1829}$; | д) $\frac{1241}{6059}$; | з) $-\frac{1872}{1560}$; |
| б) $\frac{2227}{9911}$; | е) $\frac{6821}{2147}$; | к) $-\frac{3523}{1300}$; |
| в) $\frac{1043}{3427}$; | е) $\frac{32\ 671}{10\ 027}$; | л) $\frac{309\ 672}{464\ 508}$; |
| г) $\frac{1857}{9153}$; | ж) $\frac{70\ 757}{491\ 209}$; | |

5.3. Знайти звичайні нескоротні дроби, що відповідають ланцюговим дробам:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| а) [2; 1, 3, 4, 2]; | е) [-3; 1, 2, 1, 1, 5]; |
| б) [2; 1, 19, 1, 3]; | ж) [-5; 2, 1, 1, 3, 2]; |
| в) [2; 1, 1, 3, 1, 2]; | з) [1; 3, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 5]; |
| г) [1; 1, 2, 3, 4]; | к) [a; a, a, a, a]; |
| д) [0; 4, 1, 2, 5, 6]; | л) [a; b, a, b, a]. |
| е) [-2; 1, 3, 1, 1, 5]; | |

5.4. Нехай $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — передостанній підхідний дріб у розкладі раціонального числа $\frac{a}{b}$ в ланцюговий дріб. Довести, що $(a, b) = (-1)^n Q_{n-1}a + (-1)^{n-1} P_{n-1}b$.

5.5. Користуючись результатом задачі 5.4, розв'язати задачу 5.3.

5.6. Розкласти звичайний дріб $\frac{a}{b}$ в ланцюговий, замінити його підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$, знайти похибку заміни, замінити наближену рівність із зазначенням похибки, якщо:

- | | |
|--|--|
| а) $\frac{a}{b} = \frac{29}{37}$, $k = 4$; | б) $\frac{a}{b} = \frac{648}{385}$, $k = 4$; |
| в) $\frac{a}{b} = \frac{571}{359}$, $k = 5$. | |

5.7. За допомогою підхідних дробів знайти наближення до дробу $\frac{13891}{5065}$ з точністю до: а) 0,001; б) 0,0001.

5.8. Розв'язати рівняння:

а) $[x; 2, 3, 4] = \frac{73}{30}$; б) $[2; 1, 2, x] = \frac{19}{7}$.

5.9. Знайти ланцюговий дріб $[q_0; q_1, \dots, q_n]$, якщо $q_n = 3$,

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{14}{9}.$$

5.10. Нехай для деякого скінченного ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ маємо $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{10}{3}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{33}{10}$. Знайти q_2 .

5.11. Треба побудувати зубчасту передачу за допомогою двох валів з кількістю зубців, що дорівнює відношенню 587 : 113. Чи можна замінити це відношення відношенням з меншими чисельниками і знаменниками, але похибкою, яка не перевищує 0,001? Як зміниться відповідь, коли: а) початкове відношення 355 : 118, а похибка 0,002; б) початкове відношення 12 532 : 3921, а похибка 0,00005?

5.12. Розв'язати в цілих числах рівняння:

а) $38x + 117y = 209$;	е) $37x + 23y = 15$;
б) $119x - 68y = 84$;	е) $53x + 17y = 25$;
в) $41x + 114y = 5$;	ж) $64x - 39y = 15$;
г) $49x + 9y = 400$;	з) $3827x + 3298y = 1869$;
д) $12x + 31y = 170$;	к) $571x + 359y = -10$.

5.13. Розв'язати в натуральних числах рівняння:

а) $8x + 13y = 15$;	е) $23x - 42y = 72$;
б) $15x + 28y = 185$.	

5.14. Розкласти число 100 на суму таких двох натуральних чисел, щоб одне з них ділилось на 7, а друге — на 11.

5.15. Для настилання підлоги завширшки 3 м є дошки завширшки 11 і 13 см. Скільки треба взяти дошок різної ширини, якщо довжина кімнати 1 довжина дошок однакові, а дошки кладуть вздовж кімнати?

5.16. Для перевезення зерна є мішки по 60 і 80 кг. Скільки треба таких мішків для перевезення 440 кг зерна?

5.17. Скільки білетів вартістю 30 і 50 коп. можна купити на 14 крб. 90 коп?

5.18. Купили 30 птахів за 30 монет однієї вартості; причому за кожних трьох горобців заплатили 1 монету, за кожні дві

горлиці також 1 монету і за кожного голуба — по 2 монети. Скільки купили птахів кожного виду?

5.19. 26 студентів посадили разом 88 дерев, причому кожен студент I, II і III курсу повинен був посадити відповідно 6, 4 і 2 дерева. Скільки було студентів I, II і III курсу?

5.20. Розкладти в ланцюгові дроби такі квадратичні ірраціональності: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$; д) $\sqrt{7}$; е) $\sqrt{8}$; ж) $\sqrt{11}$; з) $\sqrt{12}$; к) $\sqrt{13}$; л) $\sqrt{28}$; м) $\sqrt{30}$; н) $\sqrt{59}$.

5.21. Розкладти в ланцюгові дроби такі квадратичні ірраціональності:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| а) $1 + \sqrt{2}$; | ж) $1 - \sqrt{31}$; |
| б) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$; | з) $\frac{1 + \sqrt{31}}{2}$; |
| в) $\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$; | к) $\frac{6 - \sqrt{3}}{2}$; |
| г) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; | л) $\frac{3 - \sqrt{7}}{3}$; |
| д) $\frac{2 + \sqrt{7}}{2}$; | м) $\frac{7 - \sqrt{5}}{3}$; |
| е) $\frac{3 + \sqrt{10}}{3}$; | н) $\frac{76 + \sqrt{285}}{94}$. |
| ж) $5 - \sqrt{15}$; | |

5.22. Знайти квадратичні ірраціональності, якщо відомі їхні розклади у нескінченій періодичні ланцюгові дроби:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| а) $[(1, 2)]$; | ж) $[0; (1, 3)]$; |
| б) $[1; (3)]$; | з) $[0; (2, 1)]$; |
| в) $[2; (5)]$; | к) $[0; (1, 4)]$; |
| г) $[0; (4)]$; | л) $[2; (1, 2)]$; |
| д) $[0; (7)]$; | м) $[1; (3, 2)]$; |
| е) $[(2, 3)]$; | н) $[1; (3, 1)]$. |
| ж) $[3; (4, 11)]$; | |

5.23. Знайти квадратичні ірраціональності, якщо відомі їхні розклади у нескінченій періодичні ланцюгові дроби:

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| а) $[0; (1, 3, 2)]$; | ж) $[2; (3, 2, 1, 2)]$; |
| б) $[1; (2, 3, 12)]$; | з) $[4; 3, (2, 1, 3, 1)]$; |
| в) $[1; (1, 2, 11)]$; | к) $[3; 2, 1, (3, 1)]$; |
| г) $[2; (3, 1, 4)]$; | л) $[1; 1, 2, 1, 1, (4)]$; |
| д) $[1; (1, 2, 3)]$; | м) $[(1, 2, 4, 6)]$; |
| е) $[2; (3, 1, 2)]$; | н) $[1; (1, 1, 1, 1, 2, 5)]$. |
| ж) $[3; (1, 1, 6)]$; | |

5.24. Знайти квадратні рівняння з цілими коефіцієнтами, корені яких розкладаються в такі нескінченій періодичні ланцюгові дроби:

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| а) $[10; (10, 20)]$; | д) $[(2, 4, 1, 3)]$; |
| б) $[9; (1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18)]$; | е) $[2; 1, 2, (1, 1, 3)]$; |
| в) $[2; (1, 1, 3)]$; | ж) $[1; 2, (3, 4)]$. |
| г) $[1; (1, 2, 2, 1)]$; | |

5.25. Знайти квадратичну ірраціональність x , якщо:

- а) $x = [q; (2q)]$, $q \in \mathbb{N}$;
 б) $x = [q; [q; (q, 2q)]]$, $q \in \mathbb{N}$.

5.26. Розкласти в ланцюговий дріб:

- а) $\sqrt{q^2 + 1}$, $q \in \mathbb{N}$; в) $\sqrt{(q+1)^2 - 2}$, $q \in \mathbb{N}$;
 б) $\sqrt{q^4 + 2q}$, $q \in \mathbb{N}$; г) $\sqrt{q^6 + 2q}$, $q \in \mathbb{N}$.

5.27. Замінити числа підхідними дробами третього порядку і оцінити похибку:

- а) $\frac{587}{103}$; б) 3, 14159; в) $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$.

5.28. За допомогою ланцюгових дробів обчислити з точністю до 0,0001 обидва корені квадратних рівнянь з цілими коефіцієнтами:

- а) $2x^2 - 15x + 26 = 0$; г) $x^2 - 5x + 2 = 0$;
 б) $x^2 + 9x + 6 = 0$; д) $4x^2 + 20x + 23 = 0$.
 в) $2x^2 - 3x - 6 = 0$;

5.29. Знайти підхідні drobi $\frac{P_k}{Q_k}$ у розкладі $\sqrt[3]{2}$, якщо $0 < k < 3$.

5.30. Знайти другий підхідний дріб у розкладі кореня рівняння $2^x = 5$.

5.31. Розкласти в нескінчений ланцюговий дріб і обчислити з точністю до 0,0001:

- а) $\sqrt{30}$; б) $\sqrt{59}$; в) $\frac{3 + \sqrt{7}}{2}$; г) $\frac{1 + \sqrt{11}}{4}$.

5.32. Довести, що:

а) $[(a, b)] \cdot \frac{1}{[(b, a)]} = \frac{a}{b}$;

б) $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2a+1}{2}$ при розкладі ірраціональності $\sqrt{a^2 + a + 1}$ в ланцюговий дріб;

в) дріб $\frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a}$, $a \in \mathbb{N}$ є нескоротним;

г) $(P_n, P_{n-1}) = (Q_n, Q_{n-1}) = 1$;

д) $P_{n-1} = Q_n$ для дробу $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$, в якому $q_0 = q_n$, $q_1 = q_{n-1}$, $q_2 = q_{n-2}$, ...;

е) $\left(\frac{P_{n+2}}{P_n}\right)\left(1 - \frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}\right) = \left(\frac{Q_{n+2}}{Q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}}\right)$;

ж) $\underbrace{[2; 2, 2, \dots, 2]}_{n} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}$;

ж) $Q_n > 2^{\frac{n-1}{2}}$, якщо $n > 2$;

з) $\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{2Q_k^2}$ або $\left| \alpha - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right| < \frac{1}{2Q_{k-1}^2}$

для заданого дійсного додатного числа α і натурального числа k , $k > 1$;

к) $\frac{p}{q}$ є підхідним дробом розкладу дійсного додатного числа α у ланцюговий дріб, якщо $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ і $\alpha \neq \frac{p}{q}$, $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$;

л) $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}$, де вівши, що $\frac{P_n}{Q_n}$ і $\frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}$ лежать по один бік від α ;

м) підхідний дріб n -го порядку збільшується (зменшується), якщо неповну частку q_n збільшити на кілька одиниць, де n — парне (непарне) натуральне число.

5.33. Довести, що:

а) додатний корінь тричлена $bx^2 - abx - a$, де a, b — натуральні числа, розкладається в нескінченний чистий періодичний ланцюговий дріб, довжина періоду якого дорівнює 2;

б) квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами має другий корінь $\frac{1}{\{(b, a)\}}$, якщо перший його корінь є число $\{(a, b)\}$;

в) квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами має корінь $a = \{(c, b)\}$, якщо перший його корінь є $x = \{(a, b, c)\}$;

г) числа $\alpha = [a; b, c]$ і $\beta = [c; b, a]$ пропорційні числам $x = \{(a, b, c)\}$ і $y = \{(c, b, a)\}$;

д) ірраціональність виду $\sqrt[m]{t}$, $t \in \mathbb{N}$ розкладається в ланцюговий дріб, період якого починається з другої неповної частки.

5.34. Знайти ірраціональність α , якщо:

а) $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{10}{3}$, $\alpha_{k+1} = \sqrt[3]{2}$;

б) $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{37}{13}$, $\alpha_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

5.35. Знайти загальний вигляд квадратичних ірраціональностей, які розкладаються в ланцюговий дріб з однаковими неповними частками.

§ 6. Системні числа, операції над ними; переведення з однієї системи в іншу

Література

[1] — § 6, с. 79—88;

[2] — § 6, с. 76—86;

[3] — гл. II, § 4, с. 385—389;

[4] — гл. II, § 3, с. 88—104.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Той чи інший спосіб найменування та записування чисел називають **нумерацією** (від лат. numerus — лічба) або **системою числення**.

Розрізняють **усну** й **письмову** нумерації. Усна нумерація — це спосіб називання чисел за допомогою слів. Письмовою нумерацією називають спосіб записування чисел за допомогою знаків (символів), які називаються цифрами.

Розрізняють **позиційні** і **непозиційні** системи числення.