

- е)  $(a, a+b) = (a+b, 2a+b) = (a, 2a+b) = 1$ , якщо  $(a, b) = 1$ ;
- ж)  $(ac, b) = (c, b)$ , зокрема,  $c : (ac, b)$ , якщо  $(a, b) = 1$ ;
- з)  $(a+b, a-b) = 1$  або  $2$ , якщо  $(a, b) = 1$ ;
- к)  $(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$ , якщо  $(a, b) = 1$ ;
- л)  $(11a+2b, 18a+5b) = 1$  або  $19$ , якщо  $(a, b) = 1$ ;
- м)  $\left( \frac{[a, b]}{a}, \frac{[a, b]}{b} \right) = 1$ ;

н)  $(a^3 + 2a, a^4 + 3a^2 + 1) = 1$ .

**3.10.** Знайти найбільший спільний дільник чисел:

- а)  $a^n - 1$  і  $a^m - 1$ , якщо  $a$  — ціле, а  $m$  і  $n$  — натуральні числа;
- б)  $a^2 + 1$  і  $2a + 3$ , якщо  $a$  — ціле число;
- в)  $2^6 - 1$  і  $2^{15} - 1$ .

**3.11.** Довести, що з п'яти послідовних цілих чисел завжди можна вибрати одне, взаємно просте з усіма іншими.

**3.12.** Довести, що:

- а)  $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n : 1897$ , якщо  $n$  — натуральне число;
- б)  $n(n+1)(n+2) : 504$ , якщо  $n+1$  є кубом деякого натурального числа;
- в)  $a^{4n+1} - a : 30$ , якщо  $a$  — ціле, а  $n$  — невід'ємне ціле число;
- г)  $a^3 - b^3 : 2^n$  тоді і тільки тоді, коли  $a - b : 2^n$ , де  $a, b$  — цілі непарні числа,  $n$  — натуральне число;
- д)  $(a+1, a^{2k}+1) = 1$ , якщо  $a$  — парне натуральне число, а  $k$  — довільне натуральне число.

## § 4. Числові функції. Число і сума натуральних дільників. Ціла і дробова частини дійсного числа. Функція Ейлера

### Література

- [1] — § 7, с. 93—95, § 16, с. 169—174;
- [2] — § 7, с. 92—93, § 16, с. 173—178;
- [3] — гл. II, § 1, с. 368—369, гл. II, § 3, с. 406—408;
- [4] — гл. II, § 8, с. 134—146;
- [5] — гл. II, с. 25—32;
- [6] — гл. II, с. 92—95; гл. III, с. 315—322;
- [7] — гл. II, § 4, с. 52—56; гл. VIII, с. 229—246;
- [8] — § 11—14, с. 49—63.

### ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функцію  $f(x)$  називають числововою, якщо вона визначена при всіх натуральних значеннях аргументу  $x$ .

Через  $\tau(n)$  позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа  $n$  дорівнює числу всіх його натуральних дільників.

Через  $\sigma(n)$  позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа  $n$  дорівнює сумі всіх його натуральних дільників.

Через  $\varphi(n)$  позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа  $n$  дорівнює кількості натуральних (цілих невід'ємних) чисел, взаємно простих з  $n$ , які не перевищують (відповідно менших)  $n$ . Функцію  $\varphi(n)$  називають функцією Ейлера.

Через  $[x]$  (читається «антєє від  $x$ ») позначають числову функцію, значення якої для будь-якого дійсного числа  $x$  дорівнює найбільшому цілому числу, яке не перевищує  $x$ . Функцію  $[x]$  називають цілою частиною від  $x$ .

Через  $\{x\}$  позначають числову функцію, значення якої для будь-якого дійсного числа  $x$  дорівнює різниці  $x - [x]$ . Функція  $\{x\}$  називається дробовою частиною від  $x$ .

Числові функції  $f(n)$  називаються мультиплікативними, якщо для кожного  $n$  функція  $f(n) \neq 0$  і для будь-яких взаємно простих натуральних чисел  $n$  і  $m$  виконується рівність  $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ .

Мультиплікативні функції мають такі властивості:

$$1^{\circ}. f(1) = 1;$$

2<sup>o</sup>. Добуток мультиплікативних функцій є мультиплікативна функція;

3<sup>o</sup>. Якщо числа  $n_1, n_2, \dots, n_k$  попарно взаємно прості, то  $f(n_1 \cdot n_2 \cdots n_k) = f(n_1) f(n_2) \cdots f(n_k)$ .

Числові функції  $\tau(n)$ ,  $\sigma(n)$ ,  $\varphi(n)$  мультиплікативні. Якщо  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$  — канонічний розклад натурального числа  $n$ , то

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_m + 1),$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1},$$

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Зрозуміло, що  $\tau(1) = \sigma(1) = \varphi(1) = 1$ , згідно з означенням цих функцій.

Сума значень функції Ейлера для всіх дільників  $d_i$  числа  $n$  дорівнює  $n$ :

$$\sum_i \varphi(d_i) = n \quad (\text{формула Гаусса}).$$

Якщо  $x$  — дійсне додатне число, а  $n$  — натуральне число, то  $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ .

Показник  $a$  простого числа  $p$ , яке входить до канонічного розкладу натурального числа  $n!$ , обчислюється за формулою

$$a = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \cdots + \left[ \frac{n}{p^s} \right], \quad \text{де } p^s < n < p^{s+1}.$$

### ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти суму дільників, число дільників і дільники числа 680.  
Розв'язання. Знаходимо канонічний розклад числа 680:

$680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 17$ . Тоді

$$\tau(680) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16,$$

$$\sigma(680) = \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{17^{1+1} - 1}{17 - 1} = 1620.$$

Дільники числа 680 дістанемо, коли розкриємо дужки у виразі

$$(1 + 2 + 4 + 8) \cdot (1 + 5) \cdot (1 + 17).$$

Матимемо:

$$1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 17, 34, 68, 136, 85, 170, 340, 680.$$

2. Знайти натуральне число  $x$ , якщо воно має тільки два різних простих дільники і  $\tau(x) = 6$ ,  $\sigma(x) = 28$ .

Розв'язання. Оскільки число  $x$  має тільки два різних простих дільники (nehaj це числа  $p$  і  $q$ ), то канонічний розклад числа  $x$  має вид:  $x = p^y q^z$ , де  $y$  і  $z$  — деякі натуральні числа. Тоді

$$\tau(x) = (y + 1)(z + 1), \quad \sigma(x) = \frac{p^{y+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{z+1} - 1}{q - 1}.$$

Оскільки  $\tau(x) = 6$ , то  $(y+1)(z+1) = 6$ . Внаслідок того що числа  $y$  і  $z$  натуральні,  $y = 1$ ,  $z = 2$  або навпаки. Тоді  $x = pq^2$  і  $\sigma(x) = (p+1)(q^2+q+1)$ . Оскільки  $\sigma(x) = 28$ , то  $(p+1)(q^2+q+1) = 28$ .

Через те що  $p$  і  $q$  — різні прості числа, слід розглянути такі можливі випадки:  $p+1 = 4$ ,  $q^2+q+1 = 7$  або навпаки. Якщо  $p+1 = 4$ ,  $q^2+q+1 = 7$ , то  $p = 3$ , а  $q = 2$ . Тоді  $x = 3^1 \cdot 2^2 = 12$ . Якщо  $p+1 = 7$ ,  $q^2+q+1 = 4$ , то  $p = -6$ , що суперечить вибору числа  $p$ . Отже, єдиним числом, яке задовільняє умову задачі, є число  $x = 12$ .

3. Знайти натуральне число  $n$ , якщо  $\varphi(n) = 600$  і  $n = 3^\alpha \cdot 5^\beta$ , де  $\alpha, \beta$  — натуральні числа.

Розв'язання. Оскільки

$$\varphi(n) = \varphi(3^\alpha 5^\beta) = 3^\alpha 5^\beta \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 3^\alpha 5^\beta \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5},$$

то

$$600 = 3^\alpha 5^\beta \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}.$$

Звідси

$$3^{253} = 3^{\alpha} 5^{\beta}.$$

Ця рівність можлива тільки при  $\alpha = 2$  і  $\beta = 3$ . Тоді  $n = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$ .

4. Знайти кількість нулів, якими закінчується число 295!

Розв'язання. Щоб розв'язати цю задачу, треба знайти канонічний розклад заданого числа. Справді, якщо  $n! = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$ , то кількість нулів, якими закінчується число, збігатиметься з числом  $m$ , де  $m$  — менше з чисел  $k$  і  $s$ , а  $k$  і  $s$  — показники чисел 2 і 5 відповідно в канонічному розкладі числа  $n!$ . Оскільки до канонічного розкладу числа  $n!$  просте число 5 входить з меншим показником, ніж просте число 2, то для розв'язання задачі досить знайти показник  $s$ , з яким просте число 5 входить до добутку  $n!$ . Як відомо,  $s$  знаходять за формулою

$$s = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

Оскільки  $\left[ \frac{n}{p^{t+1}} \right] = \left[ \frac{\left[ \frac{n}{p^t} \right]}{p} \right]$ , то для нашого прикладу маємо

$$s = \left[ \frac{295}{5} \right] + \left[ \frac{59}{5} \right] + \left[ \frac{11}{5} \right] = 59 + 11 + 2 = 72.$$

Отже, число 295! закінчується 72-ма нулями.

## Задачі

- 4.1. Знайти число і суму всіх натуральних дільників таких чисел: а) 60; б) 100; в) 360; г) 375; д) 720; е) 957; е) 988; ж) 990; з) 1000; к) 1200; л) 1542; м) 3500.

- 4.2. Знайти всі натуральні дільники чисел: а) 24; б) 50; в) 100; г) 360; д) 375.

- 4.3. Знайти натуральне число  $n$ , якщо:

- а)  $n$  ділиться тільки на два простих числа і  $\tau(n) = 6$ , а  $\sigma(n) = 42$ ;

- б)  $\tau(n) = 1, 2, 3, 4, 5$  або 6 відповідно;

- в)  $n$  має тільки два простих дільники,  $\tau(n) = 12$ ,  $\sigma(n) = 1240$ ;

- г)  $n$  має тільки два простих дільники,  $\tau(n) = 12$ ,  $\sigma(n) = 465$ ;

- д)  $n : 12$  і  $\tau(n) = 14$ ;

- е)  $n$  — найменше натуральне число, для якого  $\tau(n) = 14$ ;

- е)  $n$  — найменше натуральне число, для якого  $\tau(n) = 18$ ;  
 ж)  $n$  — найменше натуральне число, для якого  $\tau(n) = 100$ ;  
 з) добуток усіх його натуральних дільників дорівнює 5832;  
 к)  $n = 2^x 3^y 5^z$ ,  $\tau\left(\frac{1}{2}n\right) = \tau(n) - 30$ ,  $\tau\left(\frac{1}{3}n\right) = \tau(n) - 35$ ,  
 $\tau\left(\frac{1}{5}n\right) = \tau(n) - 42$ ;

- л)  $n$  — найменше натуральне число виду  $2^x p_1 p_2$ , де  $p_1$  і  $p_2$  — різні непарні прості числа і  $\sigma(n) = 3n$  (задача Ферма);  
 м) добуток усіх його натуральних дільників дорівнює  $3^{30} \cdot 5^{40}$ ;  
 н)  $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ,  $\tau(5n) = \tau(n) + 8$ ,  $\tau(7n) = \tau(n) + 12$ ,  $\tau(8n) = \tau(n) + 18$ .

4.4. Довести, що:

- а) існує нескінчна множина натуральних чисел  $m$ , для яких  $\sigma(m) = 2m - 1$ ;  
 б) множина всіх натуральних чисел, більших від одиниці, кожне з яких дорівнює добутку всіх своїх натуральних дільників, збігається з множиною всіх простих чисел;  
 в)  $\tau(n)$  непарне тоді і тільки тоді, коли  $n$  — квадрат натурального числа;

г) добуток усіх дільників числа  $n$  дорівнює  $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ ;

д)  $(n, \tau(m^n)) = 1$ , де  $n, m$  — натуральні числа;

е)  $\tau(m) \tau(n) > \tau(mn)$ , якщо  $(m, n) > 1$ ;

ж)  $\sigma(m) \sigma(n) > \sigma(mn)$ , якщо  $(m, n) > 1$ ;

ж)  $n = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_k}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_k}}$ , де  $d_1, d_2, \dots, d_k$  — усі дільники

числа  $n$ .

4.5. Нехай  $n$  — натуральне число. Знайти  $\tau(n^3)$ , якщо:

а)  $\tau(n^2) = 15$  і  $n$  має тільки два простих дільники;

б)  $\tau(n^2) = 81$  і  $n$  має тільки два простих дільники;

в)  $\tau(n^2) = 105$  і  $n$  має тільки три простих дільники.

4.6. Натуральне число  $n$  називається досконалим<sup>1</sup>, якщо  $\sigma(n) = 2n$ . Довести, що:

а) 6, 28, 496, 8128 — досконалі числа;

б) парне число  $n$  є досконалим тоді і тільки тоді, коли  $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ , де  $k \geq 2$ , а  $p = 2^k - 1$  — просте число<sup>2</sup> (теорема Евкліда — Ейлера);

в) довільне натуральне число з одним простим дільником не є досконалим;

г) непарне натуральне число з двома простими дільниками не є досконалим.

4.7. Два натуральні числа  $m$  і  $n$  називаються дружніми<sup>3</sup>,

<sup>1</sup> Нині відомо 27 досконалих чисел. Усі вони — парні числа. Ще невідомо, чи існують непарні досконалі числа і чи скінчена множина досконалих чисел.

<sup>2</sup> Так зване просте число Мерсенна (див. § 2). Зрозуміло, що кожне просте число Мерсенна дає нам деяке досконале число.

<sup>3</sup> Найбільшої пари дружніх чисел ще не знайдено.

якщо  $\sigma(m) = m + n$ . Довести, що дружніми є такі пари чисел:

а) 220 і 284; б) 1184 і 1210; в) 2620 і 2924.

4.8. Побудувати графіки функцій  $y = \tau(x)$  і  $y = \sigma(x)$ , де  $1 < x < 20$ .

4.9. Знайти функцію Ейлера для чисел: а) 17; б) 31; в) 100; г) 200; д) 375; е) 625; ж) 720; ж) 1000; з) 1200.

4.10. Знайти кількість натуральних чисел, які менші від числа  $n$  і мають з ним найбільший спільний дільник  $d$ , якщо:

а)  $n = 300$ ,  $d = 20$ ;

б)  $n = 1476$ ,  $d = 41$ ;

в)  $n = 1665$ ,  $d = 37$ ;

г)  $n = 975$ ,  $d = 13$ ;

д)  $n = 1072$ ,  $d = 8$ ;

е)  $n = 2500$ ,  $d = 50$ ;

ж)  $n = 2476$ ,  $d = 619$ .

4.11. Довести, що:

а)  $\varphi(n)$  — парне число при  $n > 3$ ;

б)  $\varphi(4n) = 2\varphi(2n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

в)  $\varphi(4n+2) = \varphi(2n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

г)  $S = \frac{1}{2}n\varphi(n)$ , де  $S$  — сума натуральних чисел, які взаємно прості з числом  $n$  і менші від  $n$ ;

д)  $\varphi(5n) \neq \varphi(7n)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ;

е) якщо рівняння  $\varphi(x) = a$  має корінь  $x = m$ , де  $m$  не : 2, то воно має також корінь  $x = 2m$ ;

ж)  $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{(m, n)}{\varphi((m, n))}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ;

ж)  $\varphi(mn) = \varphi((m, n)) \varphi([m, n])$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ;

з)  $\varphi(mn) > \varphi(m)\varphi(n)$ , якщо  $(m, n) > 1$ .

4.12. Розв'язати рівняння:

а)  $\varphi(x) = 8$ ;

е)  $\varphi(x) = \frac{x}{3}$ ;

б)  $\varphi(x) = 12$ ;

ж)  $\varphi(x) = \frac{x}{4}$ ;

в)  $\varphi(x) = 14$ ;

з)  $\varphi(x) = \frac{4x}{5}$ ;

г)  $\varphi(x) = p - 1$ ,  $p$  — просте число;

к)  $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$ ;

д)  $\varphi(x) = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;

л)  $\varphi(2x) = \varphi(3x)$ ;

е)  $\varphi(x) = \frac{x}{2}$ ;

м)  $\varphi(6x) = 72$ .

4.13. Знайти натуральне число  $n$ , якщо:

а)  $n = 3^k 5^l 7^s$ ,  $k, l, s \in \mathbb{N}$  і  $\varphi(n) = 3600$ ;

б)  $n = pq$ , де  $p$  і  $q$  — різні прості числа такі, що  $p - q = 2$  і  $\varphi(n) = 120$ ;

в)  $n = p^2q^2$ , де  $p$  і  $q$  — різні прості числа і  $\varphi(n) = 11424$ ;

г)  $n = p^k q^l \dots s^m$ , де  $p, q, \dots, s$  — різні прості числа,  $k, l, \dots, m$  — натуральні числа, більші від 1 і  $\varphi(n) = 462000$ ;

д)  $n = 7^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  і  $\varphi(n) = 294$ ;

е)  $n = 5^k 7^l 11$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$  і  $\varphi(n) = 42000$ ;

ж)  $n = p^k q^l$ , де  $p, q$  — різні прості числа,  $k, l \in \mathbb{N}$  і  $\varphi(n) = 120$ ;

ж)  $n = p^k$ , де  $p$  — просте число,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n) = 6p^{k-2}$ .

4.14. Побудувати графік функції  $y = \varphi(x)$ , де  $1 < x < 20$ .

**4.15. Знайти:**

- а)  $[e]$ ;      е)  $\left[ \sqrt[4]{580} + 1 \right]$ ;  
 б)  $[-e]$ ;      ж)  $\left[ 4 + \cos \frac{101\pi}{204} \right]$ ;  
 в)  $[1 - \sqrt{2}]$ ;      з)  $[2 - \lg 2512]$ ;  
 г)  $[\lg 128]$ ;      к)  $[1 - \ln 50]$ ;  
 д)  $\left[ \frac{1 + \sqrt{52}}{2} \right]$ ;      л)  $\left[ \frac{10}{3 + \sqrt{3}} \right]$ .

**4.16. Знайти:**

- а)  $\{\pi\}$ ;      д)  $\left\{ 1,5 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right\}$ ;  
 б)  $\{-\pi\}$ ;      е)  $\left\{ 1,3 + \cos \frac{\pi}{6} \right\}$ ;  
 в)  $\left\{ 1 + \sin \frac{\pi}{6} \right\}$ ;      е)  $\{-2,6\}$ ;  
 г)  $\left\{ 2,1 + \cos \frac{\pi}{3} \right\}$ ;      ж)  $\left\{ -\frac{23}{7} \right\}$ .

**4.17. Розв'язати рівняння:**

- а)  $[2,3x] = 3$ ;      е)  $[3x^2 - x] = x + 1$ ;  
 б)  $[3,2x] - 3 = 2$ ;      е)  $[x] = \frac{3}{4}x$ ;  
 в)  $[ax] = m$ ,  
     де  $a \neq 0$  і  $x$  — дійсне число;      ж)  $[x^2] = x$ ;  
 г)  $[12,4x] = 86$ ;      з)  $[12,4x] = 87$ ;  
 д)  $[x^2] = 2$ ;      к)  $\left[ \frac{x}{m} \right] = \left[ \frac{x}{m-1} \right]$ ,       $m \geq 2$ .

**4.18. Довести, що:**

а)  $[x+y] \geq [x] + [y]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , узагальнити цей результат для більшої кількості доданків;

- б)  $[r] + \left[ r + \frac{1}{2} \right] = [2r]$ , де  $r \in \mathbb{R}$  і  $0 \leq r < 1$ ;  
 в)  $[\pi]^{(e)} + [e] = [e]^{(\pi)} + [\pi]$ ;  
 г)  $\left[ \frac{p}{4} \right] = \frac{p-1}{4}$  або  $\frac{p-3}{4}$ , де  $p$  — просте непарне число;  
 д)  $\left[ \frac{a}{m} \right] = \frac{a-r}{m}$ , де  $r$  — остача від ділення цілого числа  $a$  на натуральне число  $m$ ;  
 е)  $\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  
 ж)  $\left[ \frac{x+y}{n} \right] = \left[ \frac{x}{n} \right] + \left[ \frac{y}{n} \right]$  або  $\left[ \frac{x}{n} \right] + \left[ \frac{y}{n} \right] + 1$ ;  
 ж)  $\left[ \frac{m}{2} \right] = \frac{m-1}{2}$ , якщо  $m$  — непарне натуральне число;

- з)  $[nx] \geq n[x]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- к)  $\left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{2m}{4}\right] + \left[\frac{3m}{4}\right] = \frac{3(m-1)}{2}$ , якщо  $(m, 4) = 1$ ;
- л)  $\left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{2m}{k}\right] + \dots + \left[\frac{(k-1)m}{k}\right] = \frac{(k-1)(m-1)}{2}$ , якщо  $(m, k) = 1$ ,  $m \geq 2$  і  $k \geq 2$ ;
- м)  $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$  для будь-якого дійсного  $x$  і  $n \geq 2$ ;
- н)  $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = 0$  або  $1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**4.19.** Знайти показник степеня простого числа  $p$ , яке міститься в добутку  $n!$ , якщо:

- а)  $p = 3$ ,  $n = 100$ ;      в)  $p = 13$ ,  $n = 10\,000$ ;
- б)  $p = 11$ ,  $n = 1000$ ;      г)  $p = 7$ ,  $n = 81\,561$ .

**4.20.** Знайти канонічний розклад чисел: а)  $11!$ ; б)  $18!$ ; в)  $40!$ ;

г)  $75!$ ; д)  $\frac{20!}{10!10!}$ .

**4.21.** Скількома нулями закінчується число  $n!$ , якщо: а)  $n = 50$ ; б)  $n = 123$ ; в)  $n = 1985$ .

**4.22.** Побудувати графіки функцій:

- а)  $y = [x]$ ;      ж)  $y = [x] + x$ ;
- б)  $y = 2[x]$ ;      з)  $y = \frac{1}{[x]}$ ;
- в)  $y = |2x|$ ;
- г)  $y = \left[\frac{1}{2}x\right]$ ;      к)  $y = \frac{x^2}{[x]}$ ;
- д)  $y = \frac{1}{2}[x]$ ;      л)  $y = \frac{x}{[x]}$ ;
- е)  $y = 2\left[\frac{1}{2}x\right]$ ;      м)  $y = \frac{[x]}{x}$ ;
- н)  $y = \frac{1}{2}|2x|$ ;      н)  $y = \{x\}$ .

**4.23.** Довести, що:

- а)  $288! : (16!)^{18}$ ;
- б)  $288! : (18!)^{16}$ ;
- в)  $C_{10000}^{5000} : 7$ ;
- г)  $n! : (a! b! \dots k!)$ , якщо  $a + b + \dots + k \leq n$ ;
- д)  $(k+1)(k+2)\dots(k+n) : n!$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ ;
- е)  $(n!)! : (n!)^{(n-1)!}$ ;
- ж)  $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots = n$ .

**4.24.** Скільки є натуральних чисел, які:

- а) кратні 786 і містяться між  $10^6$  і  $10^7$ ;
- б) менші від числа 1000 і не діляться ні на 5, ні на 7;
- в) не більші від 100 і взаємно прості з 36;

- г) не більші від 2311 і не діляться на жодне з чисел 5, 7, 13, 17;  
 д) не більші від 12 317 і взаємно прості з 1575;  
 е) не більші від 1000 і не взаємно прості з 363?

4.25. Турист перебував у дорозі ціле число днів і проїжджав кожен день стільки кілометрів, скільки днів він подорожував. Якби він проїжджав щодня по 20 км і зупинявся на один день через кожні 40 км, то час його подорожування збільшився б на 37 днів. Скільки днів подорожував турист?

## § 5. Ланцюгові дроби. Підхідні дроби ланцюгового дробу

### Література

- [1] — § 9, с. 99—111;
- [2] — § 9, с. 98—111;
- [3] — гл. 11, § 3, с. 379—385;
- [4] — гл. IV, § 14, 15, с. 260—278;
- [10] — гл. I, § 6, с. 18—22;
- [11] — гл. 5, § 1, 2, с. 58—66;
- [12] — гл. III, § 3, с. 69—79;
- [14] — § 7—9, с. 31—41.

### ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай  $\alpha$  — довільне дійсне число. Позначимо через  $q_1$  найбільше ціле число, яке не перевищує  $\alpha$ . При дробовому  $\alpha$  маємо  $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ , де  $\alpha_1 > 1$ . Analogічно при дробових  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$  маємо

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{s-1} &= q_{s-1} + \frac{1}{\alpha_s}, \quad \alpha_s > 1, \end{aligned}$$

і тому дістаємо розклад в елементарний ланцюговий, або елементарний неперевний, дріб:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{\alpha_s}}}}. \quad (1)$$

Якщо  $\alpha$  — ірраціональне, то  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  — ірраціональні (якщо  $\alpha_s$  — раціональне, то згідно з розкладом (1) число  $\alpha$  теж раціональне), і через це зазначений процес можна нескінченно продовжити, і в результаті дістанемо нескінчений ланцюговий дріб.

Якщо  $\alpha$  — раціональне, то існує такий раціональний нескоротний дріб  $\frac{a}{b}$ , що  $\alpha = \frac{a}{b}$ ,  $b > 0$ . Тоді зазначений процес скінчений і його можна здійснити за допомогою алгоритму Евкліда. Справді, для чисел  $a$  і  $b$  маємо: