

2.16. Знайти всі прості числа, які є одночасно сумами і різницями простих чисел.

2.17. Нехай p — просте число і $p \geq 5$. Довести, що $(p^2 - 1) : 24$.

2.18. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $x \in \mathbb{N}$, що $px + 1$ є складене.

2.19. Знайти натуральне число n , якщо:

а) $n = 2^\alpha$, $n + 1 = 3^\beta$, де α , β — деякі натуральні числа;

б) $n = 3^\alpha$, $n + 1 = 2^\beta$, де α , β — деякі натуральні числа.

2.20. Довести, що між натуральними числами n і $n!$, де $n > 2$, міститься, принаймні, одне просте число.

2.21. Знайти n послідовних складених натуральних чисел, якщо:

а) $n = 10$; б) $n = 12$; в) $n = 100$; г) $n = 1000$; д) $n = k$.

2.22. Довести нескінченість множини простих чисел виду:

а) $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$; г) $p = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$;

б) $p = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$; д) $p = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$;

в) $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$; е) $p = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$.

§ 3. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне та способи знаходження їх. Взаємно прості числа

Література

- [1] — § 5, с. 72—79;
- [2] — § 5, с. 69—76;
- [3] — гл. 11, § 2—3, с. 372—379;
- [4] — гл. II, § 5, с. 109—119;
- [8] — гл. 1, § 8, с. 59;
- [10] — гл. I, § 2, 3, с. 9—13;
- [11] — гл. 3, с. 38—48;
- [12] — гл. I, § 2, 3, с. 25—31;
- [14] — § 2, 3, 5, 6, с. 19—22, с. 24—28.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо кожне з цілих чисел a_1, a_2, \dots, a_n ділиться на ціле число d , то число d називають спільним дільником чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Найбільший із спільних дільників чисел a_1, a_2, \dots, a_n називається найбільшим спільним дільником (НСД) цих чисел і позначається символом (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Якщо найбільший спільний дільник чисел a_1, a_2, \dots, a_n дорівнює 1, то ці числа називають взаємно простими. Якщо кожне з чисел a_1, a_2, \dots, a_n взаємно просте з кожним з решти з них, то числа a_1, a_2, \dots, a_n називають попарно взаємно простими. Зрозуміло, що попарно взаємно прості числа завжди і взаємно прості (але не завжди навпаки). Для двох чисел поняття «попарно взаємно прості» збігається з поняттям «взаємно прості».

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — будь-які цілі числа, серед яких хоч одне відмінне від 0. Нехай $(a_1, a_2) = d_2$, $(d_2, a_3) = d_3, \dots, (d_{n-2}, a_{n-1}) = d_{n-1}$, $(d_{n-1}, a_n) = d_n$. Тоді $(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2), a_3, \dots)$. На основі цього факту можна дати інше означення найбільшого спільного дільника.

Найбільшим спільним дільником чисел a_1, a_2, \dots, a_n називають невід'ємний спільний дільник цих чисел, який ділиться на будь-який інший спільний дільник.

Якщо $a \mid b$, то $(a, b) = |b|$.

Якщо $a = bq + r$, де a, b, q, r — цілі числа, то $(a, b) = (b, r)$.

Якщо a, b, m — цілі числа, то $(am, bm) = (a, b) \cdot |m|$.

Якщо a, b — цілі числа, а k — який-небудь їхній спільний дільник, то

$$\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{(a, b)}{|k|} \text{ (при цьому хоч одне з чисел } a \text{ чи } b \text{ відмінне від нуля).}$$

Якщо $(a, b) = d$, то $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Якщо $d \mid a, d \mid b$ і $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, то $|d| = (a, b)$.

Для знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел користуються способом послідовного ділення, який називають алгоритмом Евкліда. Розглянемо цей спосіб. Якщо a і b натуральні числа, то за теоремою про ділення з остачею послідовно дістамо:

$$a = bq_1 + r_1, \quad \text{де} \quad 0 < r_1 < b,$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad \text{де} \quad 0 < r_2 < r_1,$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \text{де} \quad 0 < r_3 < r_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad \text{де} \quad 0 < r_n < r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}, \quad \text{де} \quad r_{n+1} = 0.$$

Остання відмінна від нуля остача r_n є найбільшим спільним дільником чисел a і b .

Згідно з алгоритмом Евкліда, якщо $(a, b) = d$, то існують такі цілі числа x і y , що $d = ax + by$, і навпаки (лінійне зображення найбільшого спільного дільника).

Для взаємно простих чисел справедливі такі властивості:

1°. Цілі числа a і b взаємно прості тоді і тільки тоді, коли існують цілі числа u та v такі, що $au + bv = 1$;

2°. Якщо $(a, b) = 1$, то $(ac, b) = (c, b)$;

3°. Якщо $(a, b) = (a, c) = 1$, то $(a, bc) = 1$;

4°. Якщо $ab \mid c$, причому $(b, c) = 1$, то $a \mid c$;

5°. Якщо $a \mid b$ і $a \mid c$, причому $(b, c) = 1$, то $a \mid bc$;

6°. Якщо $(a, b) = 1$, то $(a^n, b^m) = 1$ для будь-яких цілих невід'ємних чисел n і m ;

7°. Якщо для деяких двох натуральних чисел $n \neq m$ $(a^n, b^m) = 1$, то $(a, b) = 1$;

8°. Якщо p_1, p_2 — різні прості числа, то $(p_1^n, p_2^m) = 1$ для будь-яких цілих невід'ємних $n \neq m$.

Нехай a_1, a_2, \dots, a_n — відмінні від нуля цілі числа. Ціле число k , яке ділиться на всі ці числа a_1, a_2, \dots, a_n , називають спільним кратним цих чисел.

Найменше з додатних спільних кратних чисел a_1, a_2, \dots, a_n називають найменшим спільним кратним (НСК) цих чисел і позначають символом $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Відомо, що $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$, де a, b — довільні цілі числа, з яких хоча б одне відмінне від нуля. Ця формула лежить в основі першого способу знаходження найменшого спільного кратного двох чисел. Зокрема, найменше спільне кратне взаємно простих чисел дорівнює їхньому добутку.

Нехай $[a_1, a_2] = m_2, [m_2, a_3] = m_3, \dots, [m_{n-2}, a_{n-1}] = m_{n-1}, [m_{n-1}, a_n] = m_n$. Тоді $[a_1, a_2, \dots, a_n] = m_n$. Це дає змогу звести питання знаходження НСК кількох чисел до питання знаходження НСК двох чисел: $[a_1, a_2, \dots, a_n] = [\dots [[a_1, a_2], a_3], \dots]$.

Наведемо інше означення найменшого спільного кратного.

Найменшим спільним кратним цілих чисел a_1, a_2, \dots, a_n називають не-від'ємне спільне кратне цих чисел, на яке ділиться будь-яке їхнє спільне кратне.

Другий спосіб знаходження НСД і НСК цілих чисел a_1, a_2, \dots, a_n заснову-

туються на канонічному зображені цих чисел. Нехай числа a і b мають такі канонічні розклади:

$$a = r_1^{l_1} r_2^{l_2} \dots r_m^{l_m}, \quad b = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_t^{s_t}.$$

Позначимо символами p_1, p_2, \dots, p_n усі різні прості множники, кожен з яких входить до розкладу хоч одного з чисел a і b . Якщо при цьому простий множник p_i не міститься в розкладі якого-небудь з чисел a і b , то вважатимемо, що він входить до цього розкладу в нульовому степені. За цієї умови канонічні розклади a і b можна записати так: $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$ (це узагальнені канонічні форми запису чисел a і b), де кожен з показників k_i і m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, є ціле невід'ємне число. Тоді справедливі такі рівності:

$$(a, b) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_n^{d_n}, \text{ де } d_i = \min(k_i, m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$[a, b] = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n}, \text{ де } l_i = \max(k_i, m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 1917 і 1985.

Розв'язання. I способ. Скористаємося алгориттом Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника.

- 1) Ділимо 1985 на 1917, дістаємо частку 1 і першу остачу 68;
- 2) ділимо 1917 на 68, дістаємо частку 28 і другу остачу 13;
- 3) ділимо 68 на 13, дістаємо частку 5 і третю остачу 3;
- 4) ділимо 13 на 3, дістаємо частку 4 і четверту остачу 1;
- 5) ділимо 3 на 1, дістаємо частку 3 і п'яту остачу 0.

Остання відмінна від нуля остача 1. Отже, $(1985, 1917) = 1$.

Наведені обчислення записують так:

$$\begin{array}{r|rr} & 1985 & 1917 \\ \hline & 1917 & 1 \\ - & 1917 & \\ \hline & 68 & \\ - & 68 & \\ \hline & 28 & \\ - & 28 & \\ \hline & 557 & \\ - & 557 & \\ \hline & 544 & \\ - & 544 & \\ \hline & 13 & \\ - & 13 & \\ \hline & 13 & \\ - & 13 & \\ \hline & 3 & \\ - & 3 & \\ \hline & 1 & \\ - & 1 & \\ \hline & 3 & \\ - & 3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Отже, числа 1985 і 1917 взаємно прості. Найменше спільне кратне цих чисел дорівнює їхньому добутку, тобто $[1985, 1917] = 1985 \cdot 1917 = 3805245$.

II способ. Знайдемо канонічні розклади чисел 1917 і 1985:

$$1917 = 3^3 \cdot 71, \quad 1985 = 5 \cdot 397.$$

Запишемо ці числа в узагальнених канонічних формах:

$$1917 = 3^3 \cdot 5^0 \cdot 71^1 \cdot 397^0, \quad 1985 = 3^0 \cdot 5^1 \cdot 71^0 \cdot 397^1.$$

Тоді $(1917, 1985) = 3^0 \cdot 5^0 \cdot 71^0 \cdot 397^0 = 1$, а

$$[1917, 1985] = 3^3 \cdot 5^1 \cdot 71^1 \cdot 397^1 = 3805245.$$

Зauważenня. Цей спосіб доцільно застосовувати в тих задачах, де треба знайти НСД і НСК в канонічній формі.

2. Знайти найбільший спільний дільник d чисел 1917 і 1985, а також цілі числа x і y , за допомогою яких число d лінійно виражається через числа 1917 і 1985, тобто $d = 1917x + 1985y$.

Розв'язання. Скористаємося попереднім прикладом. Маємо:

$$1985 = 1 \cdot 1917 + 68,$$

$$1917 = 28 \cdot 68 + 13,$$

$$68 = 5 \cdot 13 + 3,$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1,$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0.$$

Починаючи з передостанньої рівності, знаходимо остаті:

$$d = 1 = 13 - 4 \cdot 3, \quad (1)$$

$$3 = 68 - 5 \cdot 13, \quad (2)$$

$$13 = 1917 - 28 \cdot 68, \quad (3)$$

$$68 = 1985 - 1 \cdot 1917. \quad (4)$$

Замінююватимемо послідовно остаті в цих рівностях, поки не залишаться числа 1917 і 1985. Остату 3 у виразі (1) замінюємо виразом (2) і зводимо подібні члени (13 і 68):

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 4 \cdot (68 - 5 \cdot 13) = 21 \cdot 13 - 4 \cdot 68.$$

У цій рівності замість множника 13 підставляємо вираз (3) і знову зводимо подібні члени (68 і 1917):

$$1 = 21 \cdot 13 - 4 \cdot 68 = 21(1917 - 28 \cdot 68) - 4 \cdot 68 = -592 \cdot 68 + 21 \cdot 1917.$$

У знайденому виразі замість множника 68 підставляємо вираз (4) і знову зводимо подібні члени (1917 і 1985):

$$\begin{aligned} 1 &= -592 \cdot 68 + 21 \cdot 1917 = -592(1985 - 1 \cdot 1917) + 21 \cdot 1917 = \\ &= 613 \cdot 1917 - 592 \cdot 1985. \end{aligned}$$

Отже, $1 = 613 \cdot 1917 - 592 \cdot 1985$, звідси $x = 613$, $y = -592$.

Зауваження

1. Може трапитись, що у виразах для остаті (особливо на проміжних етапах, в процесі знаходження лінійного виразу для НСД) деякі неповні частки збігаються з якоюсь остаті. Тоді слід пильно стежити, щоб замість таких часток не було підставлено вираз для остаті.

2. Часто лінійне зображення НСД чисел a і b є громіздким і тому, щоб не робити довну перевірку, можна обмежитися тим, що ліва і права частини рівності $ax + by = d$ повинні мати однакові останні цифри. Так, у розглянутому прикладі права частина виразу $1 = 613 \cdot 1917 - 592 \cdot 1985$ закінчується цифрою 1, а ліва частина е 1.

3. Довести, що $(a, b) = (ba + 3b, 13a + 8b)$ для довільних цілих чисел a і b .
Розв'язання. Введемо позначення $(a, b) = d_1$, $(ba + 3b, 13a + 8b) = d_2$. Доведемо, що $d_1 = d_2$. Оскільки d_1 і d_2 — натуральні числа, то досить показати, що $d_1 | d_2$ і $d_2 | d_1$.

З означення d_1 маємо: $d_1 | a$ і $d_1 | b$. Тоді $d_1 | 5a + 3b$ і $d_1 | 13a + 8b$. Згідно з означенням числа d_2 , $d_1 | d_2$.

Покажемо, що $d_2 | d_1$. Виразимо числа $5a + 3b$ і $13a + 8b$ через d_2 . Дістанемо $5a + 3b = d_2x$, $13a + 8b = d_2y$, де x і y — деякі цілі числа. Домноживши першу рівність на 8, а другу на 3 і віднявши від першої рівності другу, знайдемо $a = d_2(8x - 3y)$. Аналогічно дістаємо $b = d_2(5y - 13x)$. Отже, $d_2 | a$ і $d_2 | b$. З означення числа d_1 випливає, що $d_2 | d_1$, що й треба було довести.

Зауваження. З доведення цього твердження випливає, що $(a, b) = (m_1a + m_2b, n_1a + n_2b)$, якщо $|m_1n_2 - m_2n_1| = 1$, де m_1, m_2, n_1, n_2 — цілі числа.

4. Знайти натуральні числа m і n , якщо їхня сума дорівнює 168, а найбільший спільний дільник 24.

Розв'язання. Використаємо факт: якщо $(a, b) = d \mid a = da_1, b = db_1$, то $(a_1, b_1) = 1$.

У цьому разі $(m, n) = 24$. Тоді $m = 24m_1$, $n = 24n_1$, де $(m_1, n_1) = 1$. Оскільки $m + n = 168$, то $24m_1 + 24n_1 = 168$, тобто $m_1 + n_1 = 7$. Оскільки натуральні числа m_1 і n_1 взаємно прості, то розглядаючи всі можливі випадки, дістаемо, що m_1 і n_1 набувають таких значень: 1 і 6, 2 і 5, 3 і 4, і навпаки. Отже, числа m і n дорівнюють 24 і 144, 48 і 120, 72 і 96, і навпаки.

Задачі

3.1. Знайти найбільший спільний дільник чисел:

- | | |
|---|--|
| а) 0 i 0;
б) 0 i -7;
в) -231 i 546;
г) 1001 i 6253;
д) 1066 i 1970;
е) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; | ж) 2091 i 1681;
з) 3763 i 3337;
к) 6791400 i 178500; |
|---|--|

л) / та H , де I — ваш поштовий індекс, а H — ваш рік народження;

м) T та H , де T — номер телефону деканату, а H — рік заснування факультету:

н) двох послідовних цілих чисел n і $n+1$.

3.2. Знайти найбільший спільний дільник таких чисел

л) років народження всіх членів вашої сім'ї;

м) трьох послідовних підихів чисел n , $n+1$ і $n+2$

3.3. Знайти найменше спільне кратне чисел

3.4. Знайти найменше спільне кратне чисел:

- a) 126, 420 i 525; г) n , $n+1$ i $n+2$, де $n \in \mathbb{Z}$;
 б) 91, 252 i 462; д) 1058, 1403 i 3266;
 в) 84, 147 i 245; е) 356, 1068 i 1424.

3.5. Знайти лінійне зображення найбільшого спільного дільника чисел:

- a) 21 i 51; e) 1786 i 705;
 б) -26 i 174; е) 822 i 1734;
 в) 899 i 493; ж) 4373 i -826;
 г) 1445 i 629; з) -3791 i 3281
 д) 903 i 731;

3.6. Довести, що для довільних котирольних чисел a і b

- 3.6. Довести, що для довільних

 - $(a, b) = (a+b, a+2b)$;
 - $(a, b) = (2a+3b, 3a+4b)$;
 - $(a, b) = (7a+5b, 4a+3b)$;
 - $(a, b) = (3a+5b, 8a+13b)$.

д) $(a, b) = (4a+3b, 5a+4b)$;

е) $(a, b) = (ma+nb, ka+lb)$, де m, n, k, l — натуральні числа, причому $|ml-nk|=1$.

3.7. Знайти натуральні числа a і b , якщо:

а) $\begin{cases} a+b=150, \\ (a, b)=30; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (a, b)=4, \\ [a, b]=24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a+b=144, \\ (a, b)=24; \end{cases}$ з) $\begin{cases} (a, b)=4, \\ [a, b]=12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ab=20, \\ [a, b]=10; \end{cases}$ к) $\begin{cases} (a, b)=24, \\ [a, b]=2496; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ab=8400, \\ (a, b)=20; \end{cases}$ л) $\begin{cases} a+b=667, \\ [a, b]=120(a, b); \end{cases}$

д) $\begin{cases} ab=720, \\ (a, b)=4; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \frac{a}{(a, b)} + \frac{b}{(a, b)} = 18, \\ [a, b]=975; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{11}{7}, \\ (a, b)=45; \end{cases}$ н) $\begin{cases} ab=168, \\ (a, b)=14. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5}{9}; \\ (a, b)=28; \end{cases}$

3.8. Довести, що для довільних натуральніх чисел a, b, c :

а) $(a, b) = (-a, b) = (a, a \pm b) = (a \pm b, b)$;

б) $(ab, bc, ca) : (a, b, c)^2$;

в) $(a, b) = (a+b, [a, b])$, якщо $(a, b) \neq 0$;

г) $(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2} \right)$, якщо a, b, c — непарні числа;

д) $[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)}$;

е) $(a, b)(a, c)(b, c)[a, b][a, c][b, c] = a^2b^2c^2$;

ж) $abc = [a, b, c] \cdot (ab, ac, bc)$;

з) $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$;

и) $[a, (b, c)] = ([a, b], (a, c))$;

к) $(aa_1, bb_1, ab_1, a_1b) = dd_1$, якщо $d = (a, b)$, $d_1 = (a_1, b_1)$;

л) $([a, b], (a, b)) = (a, b)$;

м) $([a, b], ab) = [a, b]$.

3.9. Довести, що для довільних натуральніх чисел a, b, c :

а) $(a, a+1) = (a+1, 2a+1) = (a, 2a+1) = 1$;

б) $(a, 2a+1) = (a, 2a-1) = 1$;

в) $\left(2a+1, \frac{a(a+1)}{2} \right) = 1$;

г) $(14a+3, 21a+4) = 1$;

д) $(b-a, b) = 1$, якщо $(a, b) = 1$;

е) $(a+b, ab) = 1$, якщо $(a, b) = 1$;

- е) $(a, a+b) = (a+b, 2a+b) = (a, 2a+b) = 1$, якщо $(a, b) = 1$;
- ж) $(ac, b) = (c, b)$, зокрема, $c : (ac, b)$, якщо $(a, b) = 1$;
- з) $(a+b, a-b) = 1$ або 2 , якщо $(a, b) = 1$;
- к) $(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$, якщо $(a, b) = 1$;
- л) $(11a+2b, 18a+5b) = 1$ або 19 , якщо $(a, b) = 1$;
- м) $\left(\frac{[a, b]}{a}, \frac{[a, b]}{b} \right) = 1$;

н) $(a^3 + 2a, a^4 + 3a^2 + 1) = 1$.

3.10. Знайти найбільший спільний дільник чисел:

- а) $a^n - 1$ і $a^m - 1$, якщо a — ціле, а m і n — натуральні числа;
- б) $a^2 + 1$ і $2a + 3$, якщо a — ціле число;
- в) $2^6 - 1$ і $2^{15} - 1$.

3.11. Довести, що з п'яти послідовних цілих чисел завжди можна вибрати одне, взаємно просте з усіма іншими.

3.12. Довести, що:

- а) $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n : 1897$, якщо n — натуральне число;
- б) $n(n+1)(n+2) : 504$, якщо $n+1$ є кубом деякого натурального числа;
- в) $a^{4n+1} - a : 30$, якщо a — ціле, а n — невід'ємне ціле число;
- г) $a^3 - b^3 : 2^n$ тоді і тільки тоді, коли $a - b : 2^n$, де a, b — цілі непарні числа, n — натуральне число;
- д) $(a+1, a^{2k}+1) = 1$, якщо a — парне натуральне число, а k — довільне натуральне число.

§ 4. Числові функції. Число і сума натуральних дільників. Ціла і дробова частини дійсного числа. Функція Ейлера

Література

- [1] — § 7, с. 93—95, § 16, с. 169—174;
- [2] — § 7, с. 92—93, § 16, с. 173—178;
- [3] — гл. II, § 1, с. 368—369, гл. II, § 3, с. 406—408;
- [4] — гл. II, § 8, с. 134—146;
- [5] — гл. II, с. 25—32;
- [6] — гл. II, с. 92—95; гл. III, с. 315—322;
- [7] — гл. II, § 4, с. 52—56; гл. VIII, с. 229—246;
- [8] — § 11—14, с. 49—63.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функцію $f(x)$ називають числововою, якщо вона визначена при всіх натуральних значеннях аргументу x .

Через $\tau(n)$ позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа n дорівнює числу всіх його натуральних дільників.

Через $\sigma(n)$ позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа n дорівнює сумі всіх його натуральних дільників.

Через $\varphi(n)$ позначають числову функцію, значення якої для будь-якого натурального числа n дорівнює кількості натуральних (цілих невід'ємних) чисел, взаємно простих з n , які не перевищують (відповідно менших) n . Функцію $\varphi(n)$ називають функцією Ейлера.

Через $[x]$ (читається «антєє від x ») позначають числову функцію, значення якої для будь-якого дійсного числа x дорівнює найбільшому цілому числу, яке не перевищує x . Функцію $[x]$ називають цілою частиною від x .