

- з) $16^x \equiv 11 \pmod{53}$; л) $44^x \equiv 19 \pmod{71}$;
 к) $2^x \equiv 7 \pmod{67}$; м) $18^x \equiv 53 \pmod{79}$.

18.13. Розв'язати двочленні показникові конгруенції:

- а) $3 \cdot 8^x \equiv 7 \pmod{23}$; г) $15 \cdot 7^{2x} \equiv 8 \cdot 3^{3x} \pmod{31}$;
 б) $12^{7x} \equiv 15 \pmod{31}$; д) $25^{5x} \equiv 47 \pmod{61}$;
 в) $21^{3x} \equiv 21^5 \pmod{29}$; е) $6 \cdot 11^x \equiv 56 \pmod{61}$.

18.14. Розв'язати конгруенції:

- а) $13 \cdot 7^{5x} + 1 \equiv 0 \pmod{67}$;
 б) $7 \cdot 5^x + 1 \equiv 0 \pmod{73}$;
 в) $11 \cdot 5^{3x} + 70 \equiv 0 \pmod{79}$;
 г) $8 \cdot 7^x + 4 \equiv 0 \pmod{83}$.

18.15. Знайти порядок числа a за модулем m , якщо:

- а) $a = 6, m = 7$; д) $a = 27, m = 47$;
 б) $a = 6, m = 23$; е) $a = 13, m = 53$;
 в) $a = 7, m = 29$; є) $a = 10, m = 1739$.
 г) $a = 18, m = 41$; ж) $a = 32, m = 4331$.

18.16. Знаючи, що за простим модулем p $\text{ind}_g(a) \equiv b \pmod{p-1}$), знайти за цим модулем $\text{ind}_g a$, якщо:

- а) $p = 47, g = 5, a = 34, b = 34, t = 10$;
 б) $p = 73, g = 5, a = 54, b = 26, t = 11$;
 в) $p = 71, g = 7, a = 66, b = 63, t = 13$;
 г) $p = 71, g = 7, a = 56, b = 19, t = 11$.

18.17. Чи є первісними коренями за модулем 59 такі числа:

- а) 2; б) 3; в) 6; г) 8; д) 12; е) 13; є) 14; ж) 19?

18.18. Знаючи, що 2 є первісний корінь за модулями 101 і 163, розв'язати конгруенції:

- а) $3 \cdot 5^x \equiv 4 \cdot 3^{2x+1} \pmod{101}$;
 б) $2^x \equiv 3 \cdot 5^{3x} \pmod{163}$.

18.19. Користуючись критерієм Ейлера та застосовуючи властивості індексів, з'ясувати, які з чисел 15, 16, 17, 18, 19, 20 є квадратичними лишками за такими модулями: а) 23; б) 29; в) 41; г) 59; д) 79; е) 89.

18.20. Серед чисел зведененої системи лишків за модулем p знайти ті, порядок яких дорівнює числу r , якщо:

- а) $p = 43, r = 6$; в) $p = 61, r = 10$;
 б) $p = 43, r = 42$; г) $p = 61, r = 60$.

§ 19. Арифметичні застосування теорії конгруенцій

Література

- [1] — § 20, с. 205—210;
- [2] — § 20, с. 207—213;
- [3] — гл. 12, § 6, с. 421—429;
- [10] — гл. ХХІІІ, с. 201—209;
- [12] — гл. V, с. 147—160;
- [14] — § 33—36, с. 154—169.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорія конгруенцій має ряд арифметичних застосувань. Основними з них є:
 1) виведення ознак подільності;
 2) обчислення остач при діленні;

- 3) перевірка результатів арифметичних дій;
 4) визначення довжини періоду при перетворенні звичайного дробу в десятковий.

Нехай в g -ковій системі числення число N має вигляд

$$N = a_0 + a_1 g^1 + \dots + a_n g^n.$$

Позначимо через r_k абсолютно найменші лишки числа g^k за модулем m , тобто $g^k \equiv r_k \pmod{m}$, $k = 0, 1, \dots, n$ і $r_0 = 1$. Тоді $N \equiv R_m \pmod{m}$, де $R_m \equiv a_0 r_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n \pmod{m}$ (ознака подільності Паскаля).

З конгруенції $N \equiv R_m \pmod{m}$ випливає, що при діленні на m числа N і R_m дають однакові остачі. Зокрема, число N ділиться на m тоді і тільки тоді, коли на m ділиться R_m . Покладаючи $g = 10$, $m = 2, 3, 4, 5, \dots$, дістаємо конкретні ознаки подільності. З метою обчислення остачі від ділення, крім ознаки Паскаля, використовують також теореми Ейлера і Ферма, властивості індексів тощо.

Якщо

$$N \equiv f(N_1, N_2, \dots, N_k), \quad (1)$$

де f — многочлен від цілих чисел N_1, N_2, \dots, N_k з цілими коефіцієнтами, то виконується конгруенція

$$N \equiv f(N'_1, N'_2, \dots, N'_k) \pmod{m}, \quad (2)$$

де m — будь-яке натуральне число, N'_i — остача від ділення N_i на m , $i = 1, 2, \dots, k$. Конгруенція (2) є умова, необхідна для рівності (1), але не достатня. Інакше кажучи, якщо (2) не виконується, то не виконується й (1); якщо (2) виконується, наприклад, для $m = 9$ або $m = 11$, то напевно помилки в обчислennях (1) не виявлено. Так, виконуючи перевірку для $m = 9$, помилку не виявили, оскільки: 1) не було взято до уваги нуль у доданку або множнику; 2) в результаті цифри записані не в тому порядку; 3) неповні добутки перевірюють не на своїх місцях; 4) взагалі, помилка становить число, кратне 9. Під час складних обчислень доцільно робити дві перевірки: одну за модулем 9, а другу — за модулем 11.

Нескоротний дріб виду $\frac{a}{2^\alpha \cdot 5^\beta c}$, де $c > 1$, $c \neq 2$ і $c \neq 5$, у скінченний десятковий дріб не перетворюється.

Якщо $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб і $(b, 10) = 1$, то цей дріб перетворюється у чистий періодичний десятковий дріб. При цьому число цифр у періоді дорівнює порядку $p_b(10)$ числа 10 за модулем b .

Якщо $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб і $b = 2^\alpha 5^\beta b_1$, де $(b_1, 10) = 1$, то цей дріб перетворюється в мішаний періодичний десятковий дріб. При цьому число цифр у періоді дорівнює γ , де γ — більше з чисел α і β ; число цифр у періоді дорівнює порядку $p_{b_1}(10)$ числа 10 за модулем b_1 .

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Вивести ознаку подільності на 11.

Розв'язання. Нехай $N = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$ — десятковий запис числа N . Оскільки $m = 11$, то $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ і тому $R_{11} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pmod{11}$, або $R_{11} \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$. Враховуючи, що цифри a_{2k} з парними індексами в числі N стоять на непарних місцях (починаючи справа наліво), то можна таким чином сформулювати ознаку подільності на 11:

Число N ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли різниця між сумою цифр, які стоять на непарних місцях, і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11.

Зауваження. Беручи до уваги, що $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, можна дістати іншу ознаку подільності числа N на $m = 11$. Маємо: $N = b_0 + b_1 10^2 + \dots + b_l (10^2)^l$, де $b_0 = a_1 a_0$ — цифра одиниць першого розряду, $b_1 = a_2 a_3$ — цифра одиниць другого розряду і т. д. Враховуючи, що $(10^2)^k \equiv 1 \pmod{11}$, $k = 1, 2, \dots, l$, дістаємо: $N \equiv R_{11} \equiv b_0 + b_1 + \dots + b_l \pmod{11}$. Інакше кажучи, число N ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли на 11 ділиться сума двоцифрових чисел, утворених відповідними гранями числа N при його розбитті справа наліво.

2. Знайти остатчу від ділення $N = 13^{37} \cdot 12^{41}$ на 35.

Розв'язання. Оскільки $35 = 5 \cdot 7$, то шукану остатчу знаходять як найменший невід'ємний розв'язок системи конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{5}, \\ x \equiv r_2 \pmod{7}, \end{cases}$$

де r_1 і r_2 — відповідні остатчі від ділення числа N на числа 5 і 7. Спочатку знайдемо остатчу від ділення N на 5:

$$r_1 \equiv 13^{37} \cdot 12^{41} \equiv 3^{37} \cdot 2^{41} \pmod{5}.$$

Беручи індекси в обох частинах конгруенції, маємо

$$\text{ind } r_1 \equiv 37 \text{ ind } 3 + 41 \text{ ind } 2 \equiv \text{ind } 3 + \text{ind } 2 \equiv 3 + 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Звідси $r \equiv 1 \pmod{5}$.

Аналогічно знаходимо остатчу від ділення N на 7:

$$r_2 \equiv 13^{37} \cdot 12^{41} \equiv (-1)^{37} \cdot (-2)^{41} \equiv 2^{41} \pmod{7};$$

$$\text{ind } r_2 \equiv 41 \text{ ind } 2 \equiv 41 \cdot 2 \equiv 82 \equiv 4 \pmod{6},$$

звідки $r_2 \equiv 4 \pmod{7}$.

Розв'язуємо систему конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$$

З першої конгруенції знаходимо $x = 5k + 1$, $k \in N$.

Підставляємо це значення в другу конгруенцію $5k + 1 \equiv 4 \pmod{7}$ і розв'язуємо її відносно k :

$$\begin{aligned} 5k &\equiv 3 \pmod{7}, \\ 5k &\equiv 10 \pmod{7}, \\ k &\equiv 2 \pmod{7}, \\ k &= 7s + 2, s \in N. \end{aligned}$$

Тоді $x = 5k + 1 = 5(7s + 2) + 1 = 35s + 11$, тобто $x \equiv 11 \pmod{35}$. Отже, шукана остатча дорівнює числу 11.

Зауваження. Зрозуміло, що цю остатчу можна було знайти, скориставшись лише теоремами Ейлера і Ферма, що значно скорочує обчислення. Справді, $\varphi(35) = 24$, $(13, 35) \equiv (12, 35) = 1$, тому $13^{24} \equiv 12^{24} \equiv 1 \pmod{35}$. Тоді

$$\begin{aligned} 13^{37} \cdot 12^{41} &\equiv (13 \cdot 12)^{37} \cdot 12^1 \equiv 16^{37} \cdot 2^1 \equiv 2^{80}(-32^4) \equiv \\ &\equiv 2^{80} \equiv 2^8 \equiv 2^5 \equiv -3 \cdot 8 \equiv 11 \pmod{35}. \end{aligned}$$

Отже, при діленні на 35 число $13^{37} \cdot 12^{41}$ дає остатчу 11.

3. Перевірити правильність виконання арифметичних дій над цілими числами:

a) $1042 \cdot 10182 + 42932 - 18265 = 10634311$,

b) $4325 \cdot 897 = 451425$.

Розв'язання. Замінimo рівності a) і b) конгруенціями за модулем 9:

a) $7 \cdot 12 + 20 - 22 \equiv 19 \pmod{9}$, або $1 \equiv 1 \pmod{9}$;

b) $14 \cdot 24 \equiv 21 \pmod{9}$. Застосуємо ще раз «правило дев'ятки»: $5 \cdot 6 \equiv 3 \pmod{9}$, або $3 \equiv 3 \pmod{9}$.

Отже, перевірка числом 9 не виявила помилок в обох обчисленнях. Щоб бути впевненим у правильності виконаних арифметичних дій, треба перевірити ці результати за модулем 11:

a) $(-3)(-4) + 10 + 6 \equiv -5 \pmod{11}$, або $6 \equiv 6 \pmod{11}$;

b) $2 \cdot 6 \not\equiv 7 \pmod{11}$.

Отже, у прикладі б) дії виконано неправильно, тоді як у виконанні арифметичних дій над цілими числами у прикладі а) помилки не виявлено.

Зауваження. На практиці розглянуті обчислення виконуються простіше: для кожного числа обчислюється остатча від ділення його на 9 (на 11); потім здобуті остатчі замінюються своїми остатчами і т. д. Це стосується і всіх проміжних обчислень.

4. Знайти число цифр до періоду і довжину періоду періодичного дробу, в який перетворюється дріб $\frac{13}{420}$.

Розв'язання. Знаменник цього дробу має канонічний розклад:

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Оскільки $\gamma = \max(\alpha, \beta) = 2$ — більший з показників степенів цифр 2 і 5, то періодичний десятковий дріб має дві цифри до періоду. Щоб знайти порядок $\delta = P_{21}(10)$ числа 10 за модулем 21, використаємо один загальний прийом. З конгруенції $10^\delta \equiv 1 \pmod{b}$ випливає, що $99\dots 9 \equiv$

$\overbrace{\dots}^{\delta \text{ раз}} \equiv 0 \pmod{b}$. Отже, δ можна знайти так: ділимо 9 на b , потім 99 на b і т. д., поки не дістанемо в остатчі нуль. Число дев'яток при цьому, а отже, й число цифр частки (якщо $b > 9$, то враховувати слід і нуль, який відповідає першій дев'ятці) дорівнюватимуть шуканому порядку $\delta = P_b(10)$ числа 10 за модулем b . У розглядуваному прикладі $b = 3 \cdot 7 = 21$. Виконаемо ділення:

$$\begin{array}{r} -99 | \quad 21 \\ -84 \quad | 047619 \\ \hline 159 \\ -147 \\ \hline 129 \\ -126 \\ \hline 39 \\ -21 \\ \hline 189 \\ -189 \\ \hline 0 \end{array}$$

У частці маємо 6 цифр, беручи до уваги також 0, який відповідає першій дев'ятці. Отже, $\delta = \delta_{21}(10) = 6$, тобто період дробу $\frac{13}{420}$ складається з шести цифр.

Задачі

19.1. Вивести ознаки подільності на: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 7; е) 9; ж) 11; з) 13; к) 25; л) 37; м) 50.

19.2. Довести, що:

а) число $a = 10a_1 + a_0$ ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли $(a_1 - 2a_0) : 7$;

б) на 11 діляться ті і тільки ті цілі числа, в яких різниця між числом, записаним всіма цифрами, крім останньої, і числом, записаним цією останньою цифрою, ділиться на 11;

в) на 11 діляться ті і тільки ті цілі числа, в яких сума двох чисел, одне з яких записане двома останніми цифрами, а друге — рештою цифр, ділиться на 11.

19.3. Довести, що в g -ковій системі числення:

а) число a ділиться на m , де $m | g + 1$, тоді і тільки тоді, коли різниця між сумами цифр числа a на парних і непарних місцях ділиться на m ;

б) число a ділиться на m , де $m | g - 1$, тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа a ділиться на m ;

в) число a ділиться на m , де $m \mid g^k$, тоді і тільки тоді, коли число, записане останніми k цифрами числа a , ділиться на m .

19.4. Користуючись ознаками подільності, встановити, чи ділиться число a на m , якщо:

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| а) $a = 56704$, $m = 7$; 11 або 13; | е) $a = 973126$, $m = 13$; |
| б) $a = 24829$, $m = 7$; | є) $a = 96736068$, $m = 11$; |
| в) $a = 454111$, $m = 7$; | ж) $a = 20794$, $m = 37$; |
| г) $a = 53746$, $m = 11$; | з) $a = 2575163$, $m = 37$. |
| д) $a = 63364$, $m = 7$; | |

19.5. Користуючись ознаками подільності:

- | | |
|--|--|
| а) знайти канонічний розклад числа 244943325; | |
| б) знайти канонічний розклад числа 282321246671737; | |
| в) знайти x, y, z , якщо $(13x+45z)_{10} : 792$; | |
| г) знайти x, y , якщо $(7x+36y+5)_{10} : 1375$; | |
| д) знайти канонічний розклад числа 90799; | |
| е) знайти канонічний розклад числа 3058487; | |
| е) записати п'ятизначні числа, які діляться на 55 і середні цифри яких становлять число 809; | |

ж) довести, що коли до будь-якого тризначного числа дописати справа це саме число, то утворене число ділиться на 7, 11, 13.

19.6. Не виконуючи ділення, знайти остаточу від ділення a на m , якщо:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| а) $a = 3989713$, $m = 37$; | г) $a = 125 \cdot 465$, $m = 61$; |
| б) $a = 27877165$, $m = 37$; | д) $a = 34521_7$, $m = 6_7$. |
| в) $a = 31127567$, $m = 37$; | |

19.7. Знайти остаточу від ділення:

- | | |
|------------------------|---|
| а) 763^{17} на 29; | е) 341^{245} на 89; |
| б) 342^{256} на 29; | ж) 175^{411} на 629; |
| в) 581^{3792} на 37; | з) 272^{1141} на 135; |
| г) 10^{10} на 67; | к) 35^{100} на 1242; |
| д) 244^{408} на 73; | л) 20^{6n+5} на 9, $n \in \mathbb{N}$. |
| е) 749^{193} на 79; | |

19.8. Знайти остаточу від ділення:

- | | |
|---|--|
| а) $53^{29} \cdot 43^{17}$ на 37; | |
| б) $378^{561} \cdot 427^{921}$ на 41; | |
| в) $37^{20} \cdot 23^{12}$ на 61; | |
| г) $3^{19} \cdot 37^{-1}$ на 19 · 37; | |
| д) $(5622 + 179 - 346) \cdot 923$ на 23; | |
| е) $(631^{57} + 250^{28}) \cdot 926$ на 12; | |
| е) $7^{161} - 3^{80}$ на 100; | |
| ж) $(12371^{56} + 34)^{28}$ на 111. | |

19.9. Довести, що

- | | |
|---|---|
| а) $14^{120} - 1 \equiv 45$; | д) $43^{23} + 23^{43} \equiv 66$; |
| б) $13^{176} - 1 \equiv 89$; | е) $222^{555} + 555^{222} \equiv 7$; |
| в) $372654^{500} + 72 \cdot 10^7 \equiv 18$; | е) $220^{119} + 69^{220} + 119^{69} \equiv 102$. |
| г) $2^{1093} - 2 \equiv 1093^2$; | |

19.10. Нехай m , $n \in \mathbb{N}$. Довести, що:

- | | |
|--|--|
| а) $n^7 + 6n \equiv 7$; | |
| б) $10^n(9n - 1) + 1 \equiv 9$; | |
| в) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 17$; | |

- г) $6^{2n+1} + 5^{n+2} : 31$;
 д) $20^m + 16^m - 3^n - 1 : 323$, якщо $m = 2n$;
 е) $mn (m^{60} - n^{60}) : 56\ 786\ 730$;
 є) $m^{96} - b^{96} : 144$, якщо $(m, 12) = (n, 12) = 1$.

19.11. За правилом «дев'ятки» перевірити правильність виконання арифметичних дій над цілими числами:

- а) $375\ 819 + 726\ 345 + 807\ 611 = 1\ 909\ 775$;
 б) $732 \cdot 421 = 308172$;
 в) $73416 \cdot 8539 = 626899224$;
 г) $24667 + 18265 = 42932$;
 д) $5433153 : 4371 = 1243$;
 е) $375426 \cdot 3846 = 1443888276$;
 є) $\sqrt{73818} = 271^2 + 377$.

19.12. Перевірити правильність виконання арифметичних дій числами 9 і 11:

- а) $387912 - 203756 = 185146$;
 б) $8740297 - 561245 = 8179052$;
 в) $5839131309 : 67377 = 85847$.

19.13. Знайти довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу із знаменником: а) 17; б) 19; в) 29; г) 37; д) 43; е) 59; є) 67; ж) 73; з) 89; к) 97.

19.14. Знайти довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу із знаменником: а) 21; б) 33; в) 39; г) 49; д) 51; е) 77; є) 91; ж) $11 \cdot 17$; з) $13 \cdot 17$; к) $17 \cdot 23$; л) $53 \cdot 59$; м) $53 \cdot 73$.

19.15. Знайти кількість цифр до періоду і довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу із знаменником: а) 140; б) 220; в) 450; г) 528; д) 540; е) 550; є) 665; ж) 816; з) 950; к) 1150; л) 2380; м) 26500.

19.16. Знайти знаменник дробу $\frac{1}{b}$, який перетворюється у десятковий чистий періодичний дріб:

- а) з двома цифрами в періоді;
 б) з трьома цифрами в періоді.

19.17. Знайти:

- а) $\frac{14}{19}$, знаючи, що $\frac{1}{19} = 0, (052\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421)$;
 б) $\frac{107}{143}$, якщо $\frac{1}{11} = 0, (09)$ і $\frac{1}{13} = 0, (076\ 923)$;
 в) a , якщо $\frac{a}{73} = 0, (86\ 301\ 369)$ і $\frac{1}{73} = 0, (01\ 369\ 863)$;
 г) a , якщо $\frac{a}{73} = 0, (30\ 136\ 986)$ і $\frac{1}{73} = 0, (01\ 369\ 863)$.

19.18. Довести, що

- а) сума $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, $n > 1$, перетворюється у мішаний десятковий періодичний дріб;
 б) коли p — просте число, $p \neq 2, p \neq 5$ і дріб $\frac{1}{p}$ перетворюєть-

ся в чистий періодичний дріб з парним числом δ цифр у періоді $\frac{1}{p} = 0, (a_1 a_2 \dots a_{\frac{\delta}{2}-1} a_{\frac{\delta}{2}} a_{\frac{\delta}{2}+1} \dots a_{\delta-1} a_\delta)$, то $a_{\frac{\delta}{2}+i} = 9 - a_i$, $i = 1, 2, \dots, \frac{\delta}{2}$. (Перевірити для числа $\frac{1}{7}$;

в) звичайний дріб $\frac{1}{pq}$, де p, q — прості числа, відмінні від 2 і 5, перетворюється в нескінчений періодичний дріб з довжиною періоду $\left[\frac{p-1}{d}, \frac{q-1}{\delta} \right]$, де

$$d = (\text{ind } 10, p-1), \delta = (\text{ind } 10, q-1)$$

(у першому випадку $\text{ind } 10$ беруть за модулем p , у другому — за модулем q);

г) коли 10 є первісним коренем за модулем m , то періоди всіх нескоротних дробів із знаменником m утворюються в результаті кругових перестановок тієї самої системи $k=\varphi(m)$ цифр. **19.19.** Перетворити у звичайні такі періодичні дроби: а) 3, (27); б) 0,35 (62); в) 11, 12 (31); г) 5, 1 (538).

Розділ IV. МНОГОЧЛЕНІ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 20. Кільце многочленів над областю цілісності.

Алгебраїчна і функціональна рівність многочленів

Література

- [1] — § 21, с. 211—227;
- [2] — § 21, с. 214—230;
- [3] — гл. 14, § 1, с. 459—468;
- [7] — § 7, с. 42—50;
- [6] — § 20, с. 130—133;
- [8] — гл. 5, § 2, с. 207—211.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай K — довільна область цілісності з одиницею і R — її підкільце з одиницею.

Елемент $x \in K$ називається алгебраїчним над кільцем R , якщо в R існують такі елементи $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, які не всі дорівнюють 0, що

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Елемент, який не є алгебраїчним над R , називається трансцендентним над R . Мінімальне розширення кільця R , яке містить трансцендентний над R елемент x , називається простим трансцендентним розширенням кільця R , або кільцем многочленів від однієї змінної над R , і позначається через $R[x]$. Елементи цього кільця називають многочленами від x над R і позначають символами $f(x), g(x)$ і т. д. Нуль кільця $R[x]$ називається нульовим многочленом або нуль-многочленом.

Будь-який ненульовий многочлен $f(x)$ над кільцем R можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ і $a_n \neq 0$.