

14.24. Для перевезення зерна є мішки по 60 і 80 кг. Скільки таких мішків потрібно для перевезення 440 кг зерна?

14.25. На будівництво газопроводу на трасу завдовжки 283 м було доставлено труби, довжина яких 5 і 7 м. Скільки труб доставили?

14.26. Скільки квитків по 30 і 50 коп. можна купити на 14 крб. 90 коп.?

§ 15. Конгруенції вищих степенів з одним невідомим

Література

- [1] — § 18, с. 180—184;
- [2] — § 18, с. 183—187;
- [3] — гл. 12, § 4, с. 411—413;
- [5] — гл. VIII, § 4, с. 297—316;
- [10] — гл. IV, § 4, 5, с. 58—63;
- [11] — гл. 15, § 1, гл. 16, с. 126—131, с. 135—139;
- [12] — гл. III, § 6, 7, с. 87—101;
- [14] — § 24, 25, с. 94—105.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо m_1, m_2, \dots, m_s — попарно взаємно прості числа, то конгруенція

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \pmod{m_1m_2 \dots m_s} \quad (1)$$

еквівалентна системі конгруенцій

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\equiv 0 \pmod{m_1}, \\ f(x) &\equiv 0 \pmod{m_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ f(x) &\equiv 0 \pmod{m_s}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Число розв'язків конгруенції (1) дорівнює $k_1k_2 \dots k_s$, де k_1, k_2, \dots, k_s дорівнює відповідно числу розв'язків кожної з конгруенцій (2). Отже, треба розв'язати конгруенцію виду

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^a}, \quad (3)$$

де p — просте число, $a \in \mathbb{N}$.

Будь-який розв'язок

$$x \equiv a \pmod{p} \quad (4)$$

конгруенції

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (5)$$

при умові, що $f'(a) \neq p$, є одним з розв'язків конгруенції (3).

Якщо $f'(a) \equiv p$, то розв'язок (4) або не дає жодного розв'язку для (3), або дає кілька розв'язків.

Нехай $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ — розв'язок конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$. Тоді число $x = a + p^{k-1}t$, $t \in \mathbb{Z}$, є розв'язком конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли відповідне значення t задоволяє конгруенцію

$$f'(a)t \equiv -\frac{f(a)}{p^{k-1}} \pmod{p}. \quad (6)$$

Якщо конгруенція (6) не має розв'язків, то в класі розв'язків $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ немає жодного розв'язку конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Якщо конгруенція (6) має розв'язки і $f'(a) \neq p$, то будь-яке ціле число t задовольняє конгруенцію (6), а тому $t \equiv 0, 1, \dots, p-1 \pmod{p}$ є розв'язками (6). Тоді клас розв'язків $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ дає p розв'язків конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$, а саме: $x \equiv a, a + p^{k-1}, a + 2p^{k-1}, \dots, a + (p-1)p^{k-1} \pmod{p^k}$.

Якщо конгруенція (6) має розв'язки і $f'(a) \neq 1 \pmod{p}$ не ділиться на p , то це є єдиний розв'язок $t \equiv t_0 \pmod{p}$. Тоді з класу розв'язків $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ дістаємо єдиний розв'язок $x \equiv a + p^{k-1}t_0 \pmod{p^k}$ конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Конгруенцію (5) завжди можна замінити еквівалентною конгруенцією того самого степеня із старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Для цього слід обидві частини конгруенції (5) домножити на число b , яке задовольняє конгруенцію $a_0 b \equiv 1 \pmod{p}$. Це число визначається однозначно, оскільки $(a_0, p) = 1$.

Конгруенцію (5) можна замінити еквівалентною її конгруенцією степеня не вище $p-1$ за тим самим модулем (згідно з теоремою про пониження степеня конгруенції). Для цього треба в конгруенції (5) замінити вираз $f(x)$ на $r(x)$, де $r(x)$ — остача від ділення $f(x)$ на $x^p - x$. Ділення $f(x)$ на $x^p - x$ можна фактично й не виконувати, а просто замінювати кожне x^s у лівій частині (5) на x^r , де r — остача від ділення s на $p-1$ при умові, що остачу 0 замінююмо числом $p-1$.

Якщо a_0 не ділиться на p , то конгруенція (5) степеня $n < p$ має не більш ніж p різних розв'язків.

Конгруенція (5) має більш як p розв'язків тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти в лівій частині (5) діляться на p , тобто коли конгруенція тотожна.

Конгруенція (5) степеня $n < p$, в якій $a_0 = 1$, $(a_n, p) = 1$, має p розв'язків тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти остачі від ділення $x^p - x$ на $f(x)$ діляться на p .

Теорема Вільсона. Натуральне число $n > 1$ поділ тільки тоді є простим, коли $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Якщо p — просте число, то конгруенція

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

має точно $p-1$ розв'язок.

Якщо p — просте число і d — натуральний дільник числа $p-1$, то конгруенція

$$x^d \equiv 1 \pmod{p}$$

має точно d розв'язків.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розв'язати конгруенцію $f(x) \equiv x^{17} + 2x^{11} + 3x^8 - 4x^7 + 2x - 3 \equiv 0 \pmod{5}$.

Розв'язання. Замінимо цю конгруенцію еквівалентною її конгруенцією степеня не вище 4 за тим самим модулем 5. Поділимо $f(x)$ на $x^5 - x$. Дістанемо

$$f(x) = (x^5 - x)(x^{12} + x^8 + 2x^6 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1) + 3x^4 - 2x^3 + 3x - 3.$$

Замінивши всі коефіцієнти остачі найменшими лишками за модулем 5, дістанемо, що задана конгруенція еквівалентна конгруенції

$$r(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}. \quad (1)$$

Замінимо цю конгруенцію еквівалентною її конгруенцією із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1. Спочатку розв'яжемо конгруенцію

$$3y \equiv 1 \pmod{5}.$$

Додамо до правої частини модуль:

$$3y \equiv 6 \pmod{5}.$$

Поділимо обидві частини на 3:

$$y \equiv 2 \pmod{5}.$$

Домножимо конгруенцію (1) на 2:

$$6x^4 + 6x^3 + 6x + 4 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Замінимо останню конгруенцію еквівалентною їй:

$$x^4 + x^3 + x - 1 \equiv 0 \pmod{5}. \quad (2)$$

Оскільки $x \not\equiv 0 \pmod{5}$, то $(x, 5) = 1$, а тому $x^{5-1} \equiv 1 \pmod{5}$. Тоді конгруенція (2) матиме вигляд

$$x^3 + x \equiv 0 \pmod{5}. \quad (3)$$

Оскільки $(x, 5) = 1$, то обидві частини конгруенції (3) можна скоротити на x :

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}. \quad (4)$$

Конгруенція (4) має такі очевидні розв'язки: $x \equiv 2 \pmod{5}$ і $x \equiv 3 \pmod{5}$. Отже, конгруенція (1) має два розв'язки: $x \equiv 2; 3 \pmod{5}$.

Зауваження. Замість того щоб ділити $f(x)$ на $x^5 - x$, можна було б замінити x^5 на x' , де r — остача від ділення s на $5 - 1 = 4$, причому, якщо s ділиться на 4, то покладемо $r = 4$. Тоді

$$\begin{aligned} x^{17} &\equiv x \pmod{5}, \\ 2x^{11} &\equiv 2x^3 \pmod{5}, \\ 3x^8 &\equiv 3x^4 \pmod{5}, \\ -4x^7 &\equiv x^3 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) \equiv 3x^4 + 3x^3 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

2. Розв'язати конгруенцію

$$f(x) \equiv x^5 + 10x^3 + x + 6 \equiv 0 \pmod{108}. \quad (1)$$

Розв'язання. Оскільки $108 = 2^2 \cdot 3^3$, то задана конгруенція еквівалентна системі

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \pmod{4}, \\ f(x) \equiv 0 \pmod{27}. \end{cases} \quad (2)$$

Перша з цих конгруенцій після спрощення матиме вигляд

$$x^5 + 2x^3 + x + 2 \equiv 0 \pmod{4}. \quad (3)$$

Випробовуючи лишки 0, $\pm 1, 2$ за модулем 4, впевнююмося, що конгруенція (3) має єдиний розв'язок

$$x \equiv 2 \pmod{4}. \quad (4)$$

Щоб розв'язати другу конгруенцію системи (2), треба спочатку розв'язати конгруенцію

$$f(x) \equiv 0 \pmod{3}, \quad (5)$$

або після спрощення

$$x^5 + x^3 + x \equiv 0 \pmod{3}. \quad (6)$$

Оскільки

$$x^5 \equiv x^1 \pmod{3},$$

$$x^3 \equiv x^1 \pmod{3},$$

то конгруенція (6) еквівалентна конгруенції

$$3x \equiv 0 \pmod{3},$$

тобто $0 \equiv 0 \pmod{3}$.

Отже, конгруенція (5) виконується при будь-якому значенні x . Це означає, що вона має такі розв'язки:

$$x \equiv 0; 1; 2 \pmod{3}.$$

Використовуючи ці класи чисел за модулем 3, розв'яжемо конгруенцію

$$x^5 + 10x^3 + x + 6 \equiv 0 \pmod{9},$$

або еквівалентну їй конгруенцію

$$x^5 + x^3 + x + 6 \equiv 0 \pmod{9}. \quad (7)$$

Нехай

$$g(x) = x^5 + x^3 + x + 6.$$

Випробуємо тепер кожен клас за модулем 3.

У класі $x \equiv 0 \pmod{3}$ беремо числа $x = 3t$, де t задовільняє співвідношення $g'(0) \cdot t \equiv -\frac{g(0)}{3} \pmod{3}$.

Оскільки $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$, $g'(0) = 1$ і $g(0) = 6$, то $t \equiv -2 \pmod{3}$, тобто $t \equiv 1 \pmod{3}$, або $t = 3s + 1$, $s \in \mathbb{Z}$.

Дістаємо $x = 3t = 3(3s + 1) = 9s + 3$. Ці числа утворюють один клас розв'язків конгруенції (7):

$$x \equiv 3 \pmod{9}. \quad (8)$$

У класі $x \equiv 1 \pmod{3}$ беремо числа $x = 1 + 3t$, де t задовільняє співвідношення

$$g'(1) \cdot t \equiv -\frac{g(1)}{3} \pmod{3}.$$

Оскільки $g'(1) = 9$, $g(1) = 9$, то

$$9t \equiv -3 \pmod{3}.$$

Цю конгруенцію задовільняє будь-яке значення t , тобто $t = 3s$, $t = 3s + 1$, $t = 3s + 2$, де $s \in \mathbb{Z}$. Тоді $x = 1 + 9s$, $x = 4 + 9s$, $x = 7 + 9s$. Отже, маємо ще три розв'язки конгруенції (7):

$$x \equiv 1; 4; 7 \pmod{9}. \quad (9)$$

У класі $x \equiv 2 \pmod{3}$ беремо числа $x = 2 + 3t$, де t задовільняє співвідношення

$$g'(2) \cdot t \equiv -\frac{g(2)}{3} \pmod{3}.$$

Оскільки $g'(2) = 93$, $g(2) = 48$, то

$$93t \equiv -16 \pmod{3}$$

або $0 \equiv 2 \pmod{3}$.

Ця суперечність свідчить про те, що в класі чисел $x \equiv 2 \pmod{3}$ немає розв'язків конгруенції (7).

За допомогою знайдених класів розв'язків $f(x) \equiv 0 \pmod{9}$ дістаємо розв'язки конгруенції

$$f(x) \equiv x^5 + 10x^3 + x + 6 \equiv 0 \pmod{27}. \quad (10)$$

Випробуємо кожен з класів (8) і (9).

У класі $x \equiv 3 \pmod{9}$ беремо числа $x = 9t + 3$, де t задовільняє конгруенцію

$$f'(3) \cdot t \equiv -\frac{f(3)}{9} \pmod{3}.$$

Оскільки $f'(x) = 5x^4 + 30x^2 + 1$, $f'(3) = 676$, $f(3) = 522$, то $676t \equiv -58 \pmod{3}$, або $t \equiv 2 \pmod{3}$, звідки $t = 3s + 2$, $s \in \mathbb{Z}$.

Тоді $x = 9(3s + 2) + 3 = 27s + 21$, $s \in \mathbb{Z}$.
 Ці числа утворюють один клас розв'язків конгруенції (10)

$$x \equiv 21 \pmod{27}. \quad (11)$$

У класі $x \equiv 1 \pmod{9}$ беремо числа $x = 9t + 1$, де t задовільняє конгруенцію

$$f'(1) \cdot t \equiv -\frac{f(1)}{9} \pmod{3}.$$

Оскільки $f'(1) = 36$, $f(1) = 18$, то $36t \equiv -2 \pmod{3}$. Тут $(36, 3) = 3$, а -2 не ділиться на 3, тому остання конгруенція розв'язків не має. Це означає, що в класі чисел $x \equiv 1 \pmod{9}$ немає розв'язків конгруенції (10).

У класі $x \equiv 4 \pmod{9}$ візьмемо числа $x = 9t + 4$, де t задовільняє конгруенцію

$$f'(4) \cdot t \equiv -\frac{f(4)}{9} \pmod{3}.$$

Оскільки $f'(4) = 1761$, $f(4) = 1674$, то

$$1761t \equiv -186 \pmod{3}.$$

Тут $(1761, 3) = 3$, $-186 : 3$ і тому остання конгруенція має три розв'язки $t \equiv 0; 1; 2 \pmod{3}$. Отже, дістаємо ще три розв'язки конгруенції (10):

$$x \equiv 4; 13; 22 \pmod{27}. \quad (12)$$

У класі $x \equiv 7 \pmod{9}$ знаходимо числа $x = 9t + 7$, де t задовільняє конгруенцію

$$f'(7) \cdot t \equiv -\frac{f(7)}{9} \pmod{3}.$$

Оскільки $f'(7) = 13476$, $f(7) = 20250$, то

$$13476t \equiv -2250 \pmod{3}.$$

Тут $(13476, 3) = 3$ і $-2250 : 3$ і тому остання конгруенція має три розв'язки $t \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$.

Відповідно до цього, маємо останні три розв'язки конгруенції (10):

$$x \equiv 7; 16; 25 \pmod{27}. \quad (13)$$

Таким чином, щоб знайти розв'язки конгруенції (1), треба розв'язати сім систем:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 4 \pmod{27}; \end{cases} & 4) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 16 \pmod{27}; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 7 \pmod{27}; \end{cases} & 5) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 21 \pmod{27}; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 13 \pmod{27}; \end{cases} & 6) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 22 \pmod{27}; \end{cases} \\ 7) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 25 \pmod{27}. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці системи, знаходимо:

- 1) $x \equiv 58 \pmod{108}$; 2) $x \equiv 34 \pmod{108}$; 3) $x \equiv 94 \pmod{108}$; 4) $x \equiv 70 \pmod{108}$;

- 5) $x \equiv 102 \pmod{108}$; 6) $x \equiv 22 \pmod{108}$; 7) $x \equiv 106 \pmod{108}$.

Отже, конгруенція (1) має сім розв'язків: $x \equiv 22; 34; 58; 70; 94; 102; 106 \pmod{108}$.

Задачі

15.1. Знайти конгруенції того самого степеня із старшим коефіцієнтом 1, еквівалентні таким конгруенціям:

- a) $3x^3 - 5x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{11}$;
- b) $27x^3 + 14x^2 - 10x + 13 \equiv 0 \pmod{59}$;

- в) $70x^6 + 78x^5 + 25x^4 + 68x^3 + 52x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{101}$;
 г) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \pmod{m}$, $(a_0, m) = 1$.

15.2. Звести задані конгруенції до еквівалентних їм конгруенцій, степінь яких менше за модуль:

- а) $x^8 + 2x^7 + x^6 - x^4 - x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
 б) $3x^{14} + 4x^{13} + 3x^{12} + 2x^{11} + x^9 + 2x^8 + 4x^7 + x^6 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x \equiv 0 \pmod{5}$;
 в) $x^{16} + 3x^8 - 5x^7 - x^4 + 6x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$;
 г) $2x^{17} + 6x^{16} + x^{14} + 5x^{12} + 3x^{11} + 2x^{10} + x^9 + 5x^8 + 2x^7 + 3x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$;
 д) $6x^{18} + 18x^{15} + 3x^4 - 8x^3 + x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$.

15.3. Спростити задані контругенції (понизити степені, зменшити коефіцієнти за абсолютною величиною, зробити так, щоб старший коефіцієнт дорівнював 1) і розв'язати способом підбору:

- а) $x^5 + x^3 + x^2 + 4 \equiv 0 \pmod{3}$;
 б) $6x^4 + 17x^2 - 16 \equiv 0 \pmod{3}$;
 в) $28x^9 + 29x^8 - 26x^7 + 20x^4 - 17x + 23 \equiv 0 \pmod{3}$;
 г) $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \equiv 0 \pmod{3}$;
 д) $x^5 + x^4 - x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$;
 е) $x^7 + 2x^6 + x^5 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$;
 є) $x^7 + 3x^6 + x^5 - x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$;
 ж) $x^7 + 5x^5 - x^3 - 9x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
 з) $34x^{10} - 29x^7 + 43x^4 - 19x + 37 \equiv 0 \pmod{5}$;
 к) $6x^{10} - 12x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
 л) $x^7 - 3x^6 + x^5 - 15x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$.

15.4. Спростити задані конгруенції і розв'язати їх способом підбору:

- а) $5x^{24} + 4x^{23} + 4x^{22} + 2x^{21} + x^{20} + 6x^{19} + 4x^{18} + 3x^{17} + 4x^{16} + 6x^{15} + 5x^{14} + 2x^{13} + x^{12} + 2x^{11} + x^{10} + 3x^9 + 4x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \equiv 0 \pmod{7}$;
 б) $x^{13} - x^{11} + x^9 - x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$;
 в) $10x^{42} - 5x^{30} + 10x^{18} + 9x^{12} + 4 \equiv 0 \pmod{7}$;
 г) $75x^{13} - 62x^{12} - 53x^{11} - 24x^6 + 13x - 27 \equiv 0 \pmod{7}$;
 д) $6x^{13} - 3x^{12} - 2x^{11} - 6x^3 + 3x^2 + 7x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$;
 е) $13x^{23} - 30x^{22} - 2x^{13} + 1 \equiv 0 \pmod{11}$;
 є) $120x^{91} + 14x^{15} + x^{11} - 3x^5 + 9x^2 - x + 6 \equiv 0 \pmod{11}$;
 ж) $x^{14} - x^{13} + 12x^2 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{13}$;
 з) $300x^{90} + 259x^{67} - 95x^{23} - 1 \equiv 0 \pmod{23}$.

15.5. Розкласти конгруенції на лінійні множники за **заданим** модулем:

- а) $x^3 + 4x^2 - 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
 б) $x^3 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
 в) $x^4 - 20x^3 + 90x^2 - 135x + 54 \equiv 0 \pmod{5}$;
 г) $3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
 д) $x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 53x - 12 \equiv 0 \pmod{7}$;
 е) $5x^3 + 4x^2 - 8x - 1 \equiv 0 \pmod{7}$;
 є) $6x^3 + 5x^2 - 2x - 9 \equiv 0 \pmod{11}$;
 ж) $x^3 + 3x^2 - 3 \equiv 0 \pmod{17}$;
 з) $x^3 + 11x^2 + 8x + 3 \equiv 0 \pmod{23}$;
 к) $x^4 + 15x^3 + 4x^2 + 4x - 15 \equiv 0 \pmod{29}$;

л) $x^3 - 13x^2 - 3x + 11 \equiv 0 \pmod{31}$.

15.6. Довести, що:

а) конгруенція $x^3 + ax + b \equiv 0 \pmod{7}$ при $(a, 7) = (b, 7) = 1$ не має трьох розв'язків;

б) $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, якщо p — просте число;

в) $2(p-3)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, якщо p — просте число;

г) числа p і $p+2$ є простими (тобто простими числами-близнюками) тоді і тільки тоді, коли $4[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$ (теорема Клемента);

д) $[(2n)!]^2 \equiv -1 \pmod{p}$, якщо p — просте число і $p = 4n+1$,
 $n \in \mathbb{N}$;

е) $[(2n+1)!]^2 \equiv 1 \pmod{p}$, якщо p — просте число і $p = 4n+3$,
 $n \in \mathbb{N}$;

е) $a^p + (p-1)!a \equiv 0 \pmod{p}$, якщо a — довільне ціле число і p — просте число;

ж) натуральне число $p > 2$ є простим тоді і тільки тоді, коли $(p-2)! - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (критерій Лейбніца).

15.7. Розв'язати такі конгруенції:

а) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$;

б) $x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{6}$;

в) $3x^3 - x^2 + 4x + 2 \equiv 0 \pmod{10}$;

г) $2x^5 + x^3 + 2x \equiv 0 \pmod{10}$;

д) $x^6 - x^5 - x^2 + 4x - 1 \equiv 0 \pmod{10}$;

е) $x^8 + 5x^6 - x^5 - x^4 - 5x^2 + 8x - 3 \equiv 0 \pmod{15}$;

е) $x^6 + 3x^5 - x^2 - x - 7 \equiv 0 \pmod{15}$;

ж) $3x^3 + 6x^2 + x + 10 \equiv 0 \pmod{15}$;

з) $x^9 + x^7 - x^3 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{21}$;

к) $3x^2 + 7x + 5 \equiv 0 \pmod{34}$;

л) $x^7 + x^2 \equiv 0 \pmod{35}$;

м) $2x^2 - 7x + 6 \equiv 0 \pmod{55}$.

15.8. Розв'язати такі конгруенції:

а) $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{30}$;

б) $4x^3 - 5x^2 + 7x + 21 \equiv 0 \pmod{105}$.

15.9. Розв'язати такі конгруенції:

а) $x^6 + x^5 - x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{25}$;

б) $x^6 - x^5 - x^2 + 4x + 2 \equiv 0 \pmod{25}$;

в) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 \equiv 0 \pmod{25}$;

г) $5x^3 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod{25}$;

д) $3x^3 - 5x^2 - 15 \equiv 0 \pmod{49}$;

е) $3x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod{49}$;

е) $5x^3 + 4x^2 - 6x + 5 \equiv 0 \pmod{49}$;

ж) $x^9 - 2x^7 - x^3 + 7x + 2 \equiv 0 \pmod{49}$;

з) $x^2 + 3x + 5 \equiv 0 \pmod{121}$.

15.10. Розв'язати такі конгруенції:

а) $4x^3 - 8x - 13 \equiv 0 \pmod{27}$;

б) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{27}$;

в) $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{27}$;

г) $7x^4 + 19x + 25 \equiv 0 \pmod{27}$;

д) $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$;

е) $x^3 - 2x^2 - 30x + 41 \equiv 0 \pmod{125}$;

- е) $x^3 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{125}$;
 ж) $6x^3 - 7x - 11 \equiv 0 \pmod{125}$;
 з) $3x^3 - 7x - 69 \equiv 0 \pmod{125}$;
 к) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 12 \equiv 0 \pmod{625}$.

15.11. Розв'язати такі конгруенції:

- а) $x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{12}$;
 б) $x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{12}$;
 в) $x^5 - 2x^3 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{18}$;
 г) $x^5 + 2x^5 - x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{40}$;
 д) $x^8 - x^6 + x^3 + x + 3 \equiv 0 \pmod{45}$;
 е) $x^4 + 3x^3 + 2x + 6 \equiv 0 \pmod{45}$;
 є) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 12 \equiv 0 \pmod{45}$;
 ж) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \pmod{50}$;
 з) $x^8 + 2x^7 - x^2 + 3x - 2 \equiv 0 \pmod{63}$;
 к) $x^2 - 3x + 23 \equiv 0 \pmod{63}$;
 л) $x^7 + x^5 - x^3 + 3x - 3 \equiv 0 \pmod{175}$;
 м) $2x^3 - 5x - 32 \equiv 0 \pmod{175}$;
 н) $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0 \pmod{225}$.

15.12. Знайти необхідну і достатню умову того, що конгруенція $x^n \equiv a \pmod{p}$, де p — просте число, $(a, p) = 1$, $n < p$, має тільки n розв'язків.

15.13. Які з наступних конгруенцій мають n розв'язків, де n — степінь конгруенції:

- а) $x^3 \equiv 1 \pmod{7}$;
 б) $x^4 \equiv 1 \pmod{11}$;
 в) $x^5 \equiv 10 \pmod{11}$?

Знайти ці розв'язки.

15.14. Скільки розв'язків мають конгруенції

- а) $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$;
 б) $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, де p — просте число;
 в) $x^{q(20)} \equiv 1 \pmod{20}$;
 г) $x^{q(m)} \equiv 1 \pmod{m}$;

д) $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, де p — непарне просте число;

е) $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, де p — непарне просте число?

15.15. Довести, що конгруенція $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ має n розв'язків, якщо p — просте число і $p \equiv 1 \pmod{n}$.

15.16. Конгруенцію $11x^2 \equiv 65 \pmod{103}$ задовольняє число $x_0 = 31$. Знайти всі розв'язки цієї конгруенції.

15.17. Перевірити теорему Вільсона при: а) $p = 5$; б) $p = 7$;
 в) $p = 11$; г) $p = 13$.

15.18. Довести, що $x^{5p+1} \equiv x^6 \pmod{p}$, де p — просте число.

15.19. Розв'язати систему конгруенцій

$$\begin{cases} x^4 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{4}; \\ x^3 + 3 \equiv 0 \pmod{10}. \end{cases}$$