

# Розділ I. ТЕОРІЯ ПОДІЛЬНОСТІ В КІЛЬЦІ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

## § 1. Відношення подільності, його найпростіші властивості. Теорема про ділення з остачею

### Література

- [1] — § 5, с. 70—72;
- [2] — § 5, с. 66—69;
- [3] — гл. 4, § 4, с. 141—146;
- [4] — гл. II, § 2, 4, с. 83—84, с. 104—105;
- [8] — гл. I, § 8, с. 59—60;
- [10] — гл. I, § 1, с. 7—9;
- [11] — гл. I, § 2, с. 18—20;
- [12] — гл. I, § 1, с. 23—25;
- [14] — § 1, с. 17—19.

### ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо для цілих чисел  $a$  і  $b$  в кільці цілих чисел  $Z$  існує таке ціле число  $q$ , що  $a = bq$ , то кажуть, що « $a$  ділиться на  $b$ » або « $b$  ділить  $a$ » і пишуть відповідно  $a : b$ ,  $b | a$ . Число  $a$  при цьому називають **кратним** числа  $b$ , а  $b$  — **дільником** числа  $a$ . Якщо в кільці  $Z$  не існує числа  $q$  такого, що  $a = bq$ , то кажуть, що « $a$  не ділиться на  $b$ », або « $b$  не ділить  $a$ » і пишуть відповідно  $a \neq b$ ,  $b \neq |a$ .

Нехай  $a, b, c, d, m, n$  — довільні цілі числа. Тоді:

- 1°.  $a : a$ ;
- 2°.  $0 : a$ ;
- 3°.  $a : \pm 1$ ;
- 4°. Якщо  $a : 0$ , то  $a = 0$ ;
- 5°. Якщо  $a : b$  і  $b : c$ , то  $a : c$ ;
- 6°. Якщо  $a : c$ , то  $ab : c$ ;
- 7°. Якщо  $a : c$  і  $b : c$ , то  $(a \pm b) : c$ ;
- 8°. Якщо  $a : c$ ,  $(a \pm b) : c$ , то  $b : c$ ;
- 9°. Якщо  $a : c$ ,  $b$  не  $: c$ , то  $(a \pm b)$  не  $: c$ ;
- 10°. Якщо  $a : b$ , то  $ac : bc$ ;
- 11°. Якщо  $ac : bc$  і  $c \neq 0$ , то  $a : b$ ;
- 12°. Якщо  $c : a$ ,  $d : b$ , то  $cd : ab$ ;
- 13°. Якщо  $a : c$ ,  $b : c$ , то  $(ma \pm nb) : c$ ;
- 14°. Якщо  $a : b$  і  $b : a$ , то  $a = \pm b$ ;
- 15°. Якщо  $a : b$  і  $|b| > |a|$ , то  $a = 0$ .

Для будь-яких цілих чисел  $a$  і  $b$ , де  $b \neq 0$ , існує єдина пара цілих чисел  $q$  і  $r$  така, що  $a = bq + r$ ,  $0 < r < |b|$  (узагальнення теореми про ділення з остачею). Число  $q$  називають **неповною часткою**, а  $r$  — **остачею** від ділення  $a$  на  $b$ .

Ціле число  $a$  тоді і тільки тоді кратне цілому числу  $b \neq 0$ , коли остача від ділення  $a$  на  $b$  дорівнює нулю.

### ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. При діленні цілого числа  $a$  на 17 неповна частка дорівнює 13. Знайти найбільше значення  $a$ .  
**Розв'язання.** Маємо  $a = 17 \cdot 13 + r$ , де  $0 < r < 17$ . Отже, найбільше значення для  $a$  дорівнює  $17 \cdot 13 + 16 = 237$ .
2. При діленні числа  $a = 50$  на число  $b$  остача  $r = 6$ . Знайти  $b$  і неповну частку  $q$ .  
**Розв'язання.** Маємо  $50 = bq + 6$ , де  $6 < b$ . Тоді  $bq = 44 = 44 \cdot 1 = 1 \cdot 44 = 22 \cdot 2 = 2 \cdot 22 = 11 \cdot 4 = 4 \cdot 11$ . Оскільки  $b > 6$ , то  $b$  є одним з чисел 44, 22 або 11. Тоді  $q$  відповідно дорівнює 1, 2 або 4.

- 3.** Знайти неповну частку  $q$  і остату  $r$  від ділення цілого числа  $a$  на пле число  $b$ , якщо: а)  $a = 37$ ,  $b = 8$ ; б)  $a = -8$ ,  $b = 37$ ; в)  $a = 37$ ,  $b = -8$ ; г)  $a = -37$ ,  $b = 8$ ; д)  $a = 8$ ,  $b = -37$ ; е)  $a = -8$ ,  $b = -37$ ; є)  $a = -8$ ,  $b = 37$ ; ж)  $a = -37$ ,  $b = -8$ .

**Розв'язання.** Щоб знайти неповну частку  $q$  і остату  $r$  при діленні цілого числа  $a$  на ціле число  $b$ , треба знайти найбільше ціле число  $k$ , яке кратне  $b$  і не перевищує  $a$ . Тоді неповну частку  $q$  дистають як частку від ділення  $k$  на  $b$ , а остату  $r$  — як різницю між  $a$  та  $k$ . а)  $k = 32 = 8 \cdot 4$ . Отже,  $q = 4$ ,  $r = 5$ ; б)  $k = 0 = 37 \cdot 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = 8$ ; в)  $k = 32 = (-8) \cdot (-4)$ ,  $q = -4$ ,  $r = 5$ ; г)  $k = -40 = 8 \cdot (-5)$ ,  $q = -5$ ,  $r = 3$ ; д)  $k = 0 = (-37) \cdot 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = 8$ ; е)  $k = -37 = (-37) \cdot 1$ ,  $q = 1$ ,  $r = 29$ ; є)  $k = -37 = 37 \cdot (-1)$ ,  $q = -1$ ,  $r = 29$ ; ж)  $k = -40 = (-8) \cdot 5$ ,  $q = 5$ ,  $r = 3$ .

**Зауваження.** Згідно з теорією, існує єдина пара чисел  $q$  і  $r$  для довільних цілих чисел  $a$  і  $b$ ,  $b \neq 0$ , така, що  $a = bq + r$ ,  $0 < r < |b|$ . Тому аналогічну задачу можна розв'язувати у загальному випадку для довільних  $a$  і  $b$ ,  $b \neq 0$ .

**Наприклад,** а)  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a > b$ ; тут діленням  $a$  на  $b$  знаходимо  $q$  і  $r$ ; б)  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a < b$ ; тут  $q = 0$ ,  $r = a$ ; в)  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $a > |b|$ ; діленням  $|b|$  на  $|b|$  знаходимо  $q_1$  і  $r$ , тоді  $q = -q_1$ ; г)  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $|a| > b$ ; діленням  $|a|$  на  $|b|$  знаходимо  $q_1$  і  $r$ , тоді  $q = -(q_1 + 1)$ ; д)  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $a < |b|$ ; тут  $q = 0$ ,  $r = a$ ; е)  $a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $|a| < |b|$ ; тут  $q = 1$ ,  $r = |b| - |a|$ ; є)  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $|a| < b$ ; тут  $q = -1$ ,  $r = b + a$ ; ж)  $a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $|a| > |b|$ ; діленням  $|a|$  на  $|b|$  знаходимо  $q_1$  і  $r$ , тоді  $q = q_1 + 1$ .

- 4.** Довести, що  $n(n+1)(2n+1) : 6$  при довільному натуральному  $n$ .

**Розв'язання. I спосіб** (за методом математичної індукції).

При  $n = 1$  маємо  $n(n+1)(2n+1) = 6 : 6$ . Припустимо, що при  $n = k$   $k(k+1)(2k+1) : 6$ , і доведемо, що твердження справедливе й при  $n = k+1$ , тобто  $(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3) : 6$ . Оскільки

$$(k+1)(k+2)(2k+3) = k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2,$$

то твердження очевидне, бо перший доданок ділиться на 6 за припущенням, а другий має своїм множником 6, тобто теж ділиться на 6. Тоді твердження  $n(n+1)(2n+1) : 6$  справедливе для довільного натурального числа  $n$ .

**II спосіб** (за методом повної індукції). Оскільки  $n(n+1)$  є добуток двох послідовних натуральних чисел, то  $n(n+1) : 2$  і тому  $n(n+1)(2n+1) : 2$ . Оскільки  $6 = 2 \cdot 3$ , а числа 2 і 3 не мають спільних дільників, то для того щоб  $n(n+1)(2n+1) : 6$ , треба показати, що  $n(n+1)(2n+1) : 3$ . Згідно з теоремою про ділення з остаточкою, можливі такі випадки: а)  $n = 3k$ ; б)  $n = -3k+1$ ; в)  $n = 3k+2$ , де  $k$  — деяке ціле невід'ємне число. У випадку а) на 3 ділиться число  $n = 3k$ , у випадку б) — число  $2n+1 = 6k+3$ , а у випадку в) — число  $n+1 = 3k+3$ . Цим доведено, що  $n(n+1)(2n+1)$  завжди ділиться на 3. Твердження доведено.

**III спосіб** (штучний). Оскільки

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) &= n(n+1)[(n-1)+(n+2)] = \\ &= (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

то доводжуває твердження випливає з того, що кожен доданок утвореної суми є добуток трьох послідовних чисел, а отже, він ділиться на 6.

### Зауваження

1. При розв'язуванні аналогічних задач не можна віддати перевагу жодному з розглянутих способів. Так, для задачі 4 найраціональнішим є третій спосіб. Твердження, аналогічні розглянутим, завжди можна довести першим способом, хоч процес використання кроку індукції (кроку припущення) не завжди простий (при цьому часто використовується й узагальнена форма математичної індукції). Зрозуміло, що тільки вдале комбінування наведених та інших способів може зробити процес доведення ефективним і економним.

2. Доведення другим і третім способами свідчить про те, що твердження  $n(n+1)(2n+1) : 6$  справедливе для будь-якого цілого числа  $n$ .

## Задачі

1.1. Знайти неповну частку і остату при діленні цілого числа  $a$  на ціле число  $b$ , якщо: а)  $a=131$ ,  $b=31$ ; б)  $a=31$ ,  $b=131$ ; в)  $a=-131$ ,  $b=31$ ; г)  $a=-31$ ,  $b=131$ ; д)  $a=131$ ,  $b=-31$ ; е)  $a=31$ ,  $b=-131$ ; е)  $a=-31$ ,  $b=-131$ ; ж)  $a=-131$ ,  $b=-31$ .

1.2. При діленні цілого числа  $a$  на ціле число  $b$  дістають неповну частку  $q$  і остату  $r$ . Знайти  $b$  і  $q$ , якщо: а)  $a=100$ ,  $r=6$ ; б)  $a=148$ ,  $r=37$ ; в)  $a=298$ ,  $r=10$ ; г)  $a=497$ ,  $r=16$ ; д)  $a=28$ ,  $r=2$ ; е)  $a=14$ ,  $r=14$ .

1.3. При діленні цілого числа  $a$  на ціле число  $b$  утворюється неповна частка  $q$  і остату  $r$ . Знайти  $b$  і  $r$ , якщо: а)  $a=371$ ,  $q=14$ ; б)  $a=826$ ,  $q=83$ ; в)  $a=441$ ,  $q=25$ ; г)  $a=57$ ,  $q=0$ ; д)  $a=13\ 127$ ,  $q=121$ ; е)  $a=100$ ,  $q=100$ .

1.4. Знайти загальний вид усіх таких цілих чисел, які: а) діляться на 2; б) діляться на 3; в) діляться на 8; г) при діленні на 7 дають остату 3; д) при діленні на  $-4$  дають остату 1; е) не діляться на 2; е) не діляться на  $-3$ ; ж) не діляться на 2 і на 3.

1.5. Довести, що: а) з трьох послідовних цілих чисел одне і тільки одне ділиться на 3; б) з двох послідовних парних цілих чисел одне і тільки одне ділиться на 4; в) з п'яти послідовних цілих чисел одне і тільки одне ділиться на 5; г) з  $n$  послідовних цілих чисел одне і тільки одне ділиться на  $n$ .

1.6. Довести, що: а) добуток двох послідовних цілих чисел ділиться на 2; б) добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 6; в) добуток чотирьох послідовних цілих чисел ділиться на 24; г) добуток  $n$  послідовних цілих чисел ділиться на  $n!$ .

1.7. Нехай  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  — цілі числа і  $(mn+pq):(m-p)$ . Довести, що  $(mq+np):(m-p)$ .

1.8. Довести, що:

а) квадрат непарного цілого числа при діленні на 8 дає остату 1;

б) сума квадратів двох послідовних цілих чисел при діленні на 4 дає остату 1;

в) числа виду  $3k+2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  не можуть бути квадратами цілих чисел;

г) сума квадратів двох непарних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;

д)  $(n^3 - 1) : 7$ , або  $(n^3 + 1) : 7$ , якщо  $n$  не  $\in \mathbb{Z}$ ;

е) сума квадратів п'яти послідовних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;

е) якщо остатча від ділення деякого цілого числа на 9 є одне з чисел 2, 3, 5, 6, 8, то це число не може бути квадратом цілого числа;

ж) якщо чисельник дробу є різниця квадратів двох непарних цілих чисел, а знаменник — сума квадратів цих чисел, то такий дріб можна завжди скоротити на 2, але не на 4.

1.9. Довести, що:

а)  $(8 \cdot 23^{23} - 71 \cdot 32^{32}) : 10$ ;

б)  $(11^{10} - 1) : 100$ ;

в)  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$ .

1.10. Довести, що для довільних цілих чисел  $m$  і  $n$ :

а)  $(n^3 - n) : 6$ ;

б)  $(n^5 - n) : 30$ ;

в)  $(n(n^2 + 5)) : 6$ ;

г)  $(n^7 - n) : 42$ ;

д)  $mn(m^4 - n^4) : 30$ ;

е)  $(n^5 - 5n^3 + 4n) : 120$ ;

е)  $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$ ;

ж)  $(n^3 + 11n) : 6$ ;

з)  $(n^2 + 3n + 5)$  не : 121.

1.11. Довести, що для довільного натурального числа  $n$ :

а)  $(2^{4n} - 6) : 10$ ;

б)  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 84$ ;

в)  $(6^{2n-1} + 1) : 7$ ;

г)  $(n + 1)(n + 2) \dots (n + n) : 2^n$ ;

д)  $(3^{2n} + 5)$  не : 8.

1.12. Довести, що для довільного цілого невід'ємного числа  $n$ :

а)  $(5^{2n} - 1) : 24$ ; е)  $(10^n + 18n - 1) : 27$ ;

б)  $(10^{3n} - 1) : 27$ ; е)  $(3^{2n+3} + 40n - 27) : 64$ ;

в)  $(15^n - 1) : 7$ ; ж)  $(4^n + 6n - 1) : 9$ ;

г)  $(3^{6n} - 2^{6n}) : 35$ ; з)  $(10^{n+1} - 9n - 10) : 81$ ;

д)  $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) : 133$ ; к)  $(9^{n+1} - 8n - 9) : 16$ .

1.13. Довести, що  $(2^{2n} - 6) : 10$  для будь-якого натурального числа  $n \geq 2$ .

1.14. Довести, що числа 48, 4488, 444888, ... можна подати у вигляді добутку двох послідовних парних натуральних чисел.

1.15. Довести, що сума  $2n+1$  послідовних натуральних чисел ділиться на  $2^n + 1$ .

1.16. Довести, що в піфагоровому трикутнику (прямокутному трикутнику, довжини сторін якого натуральні числа):

а) довжина, при наймені, одного катета ділиться на 3;

б) довжина, при наймені, однієї із сторін ділиться на 5.

1.17. Довести, що коли довжини сторін і діагоналей прямокутника є натуральні числа, то його площа ділиться на 12.

1.18. Довести, що корені квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  з цілими непарними коефіцієнтами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не можуть бути раціональними.

1.19. Довести, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 9.

## § 2. Означення і властивості простих та складених чисел.

Решето Ератосфена. Канонічна форма натурального числа.

Розподіл простих чисел серед чисел

натурального ряду

### Література

[1] — § 7, с. 89—92; § 8, с. 95—99;

[2] — § 7, с. 86—91; § 8, с. 93—98;

[3] — гл. 11, § 1, с. 365—372;

[4] — гл. II, § 7, с. 124—134;