

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка

В. Андрійчук, М. Комарницький,
І. Мельник

**Елементи математичної логіки та
теорії рекурсії**

Навчальний посібник

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2012

УДК 510.6+510.57 (075.8)

ББК 22.12я73

А 65

Рецензенти:

д. ф.-м. н., проф. *A. П. Петрачук*

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

д. ф.-м. н., проф. *Ю. В. Боднарчук*

(Національний університет “Києво-Могилянська Академія”);

д. ф.-м. н. *B. M. Петричкович*

(Інститут прикладних проблем механіки і математики

імені Я. С. Підстригача НАН України)

Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Мельник І.О.

А 65 Елементи математичної логіки та теорії рекурсії. — Львів:
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2012. — 282 с.

ISBN 000-000-000-000-0

У посібнику викладено основи математичної логіки та теорії рекурсії. Розглянуто алгебру висловлень, числення висловлень та числення предикатів, основні поняття теорії рекурсії. Окремий розділ присвячено викладу елементів теорії моделей. Наприкінці кожного розділу наведено задачі та вправи, які можна використовувати як для проведення аудиторних занять, так і для формування індивідуальних завдань та організації самостійної роботи.

Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів, викладачів і всіх, хто цікавиться математичною логікою.

ISBN 000-000-000-000-0

УДК 510.6+510.57 (075.8)

ББК 22.12я73

©Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Мельник І.О., 2012

©Львівський національний університет імені Івана Франка, 2012

*Львівським математикам
і логікам минулого і майбутнього.*

ВСТУП

Метою цього посібника є виклад базових тем з математичної логіки, що входять до програми цього курсу для студентів механіко-математичних факультетів університетів. Ми ознайомимо читача з численнями висловлень і предикатів, елементами теорії алгоритмів та основами теорії моделей. Ці теми є центральними, проте час від часу ми відхиляємося від них щоб торкнутись інших питань, які можуть зацікавити студентів і згодом вплинути на їх вибір власної тематики досліджень. Вивчення математичної логіки допоможе зрозуміти, що таке аксіома, теорема, доведення, логічний закон тощо. З розвитком математичної логіки тісно пов'язаний прогрес у галузі обчислювальної математики та кібернетики.

Одним із основних понять в математичній логіці є поняття формальної логіко-математичної мови. Формальна логіко-математична мова відображає ті чи інші суттєві риси природних або штучних мов, які використовуються в наукових дослідженнях. Однією з найпростіших формальних логіко-математичних мов є мова числення висловлень, якій приділяється значна увага як першій, і найпростішій, моделі логічного числення.

У математичній логіці предметом дослідження часто є цілі математичні теорії, як от математичний аналіз, алгебра, геометрія, арифметика та ін. Для того, щоб вивчати ту чи іншу теорію за собами математичної логіки, її уточнюють і записують за допомогою логіко-математичної мови. Цей етап називається формалізацією теорії. Одержану в результаті формальну математичну теорію піддають строгому аналізу, в процесі якого досліджують її властивості.

Важливими властивостями формальних логіко-математичних теорій є несуперечливість, повнота та розв'язність. Несуперечливість теорії означає неможливість одночасного виводу в рамках даної теорії якого-небудь твердження та його заперечення. Повнота означає, що в теорії не існує тверджень, які не можна ні довести, ні спростувати. Нарешті розв'язність означає існування алгоритму (правила), що дозволяє для кожного твердження теорії вияснити, істинне воно чи хибне.

Значне місце у цій книжці відводиться теорії алгоритмів, у зв'язку з її прикладним значенням. Неформально під алгоритмом розуміють інструкцію, яка визначає певний процес, що перетворює (zmінні) вхідні дані до шуканого результату. Зокрема, правила додавання та множення цілих або дійсних чисел, обчислення найбільшого спільного дільника цілих чисел або поліномів, обчислення рангу матриці є прикладами алгоритмів. Поняття алгоритму формувалося з давніх часів, але перші роботи, присвячені уточненню та формалізації цього поняття були опубліковані А. Тюрінгом, Е. Постом, Ж. Ербраном, К. Геделем, А. Марковим, А. Черчем у 30-х рр. ХХ ст. У цих роботах запропоновані потужні моделі обчислень, такі як машини Тюрінга,

рекурсивні функції, нормальні алгоритми Маркова та інші. Достатньо швидко вияснилось, що всі ці моделі еквівалентні. Це було основою для тези Черча про те, що кожна механічна обчислювальна процедура може бути виконана машиною Тюрінга. Тому термін “обчислювальна процедура” — це майже синонім терміну “машина Тюрінга”.

З численням висловлень тісно пов’язані булеві алгебри, які відіграють важливу роль при алгебраїчному аналізі логічних систем. Вивчаються також інші подібні поняття, пов’язані з численням висловлень, зокрема, алгебри Хейтінга.

Пропонований навчальний посібник містить велику кількість вправ для самостійного розв’язання та приклади розв’язування типових задач. В стандартному курсі математичної логіки, в межах передбаченої кількості годин, всі вправи практично неможливо розв’язати, проте їх можна з успіхом використовувати для формування індивідуальних завдань.

Цей посібник є синтезом лекційних курсів з математичної логіки, що їх протягом останніх років почергово читали автори у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Раніше при викладанні логіки автори обходили проблему відсутності добротного підручника виданням ряду методичних розробок, але це, як виявилося, допомагає тільки тимчасово, оскільки ці матеріали видавались не достатньо якісно і швидко втрачали своє призначення, ставали бібліографічною рідкістю.

Ми намагалися написати посібник, який можна було б використовувати для першого знайомства студентів з системою логіки, основними поняттями та елементарними прийомами оперування з ними. Ми також приділяємо багато уваги мотивації понять, що

вводяться, та намагаємось всебічно ілюструвати їх. Напрацьований нами матеріал такого плану включений у даний посібник і цим самим він знову стане доступним для студентів.

Ми передбачаємо у читача лише володіння знаннями в межах університетських курсів, які читають на першому році навчання. У книжку включено багато вправ і задач різного рівня складності, серед яких основна маса має ілюстративний характер. Ми рекомендуємо розв'язувати їх, оскільки кожна з них відображає той чи інший нюанс у практичній поведінці того чи іншого логічного поняття. Успішне розв'язування свідчить про успішне засвоєння відповідної частини тексту книжки. До складніших вправ ми наводимо вказівки, які мають показати шлях до розв'язання. Серед вправ є приклади, які ілюструють і конкретизують загальні теореми, а є й такі, розв'язання яких вимагає певної кмітливості та наполегливості.

Ми сподіваємось, що опрацювавши цю книжку і глибоко засвоївши викладений тут матеріал, студент зможе переходити до вивчення більш серйозних книг, присвячених математичній логіці, теорії моделей, теорії множин та теорії алгоритмів. У перспективі він легко використовуватиме логічну мову та символіку при викладі інших математичних дисциплін, зможе розібратись у теоретичних закономірностях побудови сучасних мов програмування, та скористатись надбаними логічними прийомами при розв'язуванні найрізноманітніших задач в своїй повсякденній діяльності.

Автори щиро вдячні своїм колегам-співробітникам з кафедри алгебри і логіки за спілкування, в результаті якого ряд місць цієї книжки вдалося викласти прозоріше і коротше.

Розділ 1

СЕМІОТИКА, ЛОГІЧНІ МОВИ, БУЛЕВІ АЛГЕБРИ ТА АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

Одним із основних понять в математичній логіці є поняття формальної логіко-математичної мови. Однією з найпростіших таких мов є мова числення висловлень. У цьому розділі наведено загальну інформацію про семіотику та мови першого порядку, розглянуто загальну будову формальної мови для того, щоб у наступних розділах побудувати дві формальні логічні мови: числення висловлень та числення предикатів.

Поряд з тим розглядається алгебра висловлень та булеві алгебри. Логіка висловлень є найбільш розвинутою частиною сучасної логіки, яка включає в себе алгебру висловлень та числення висловлень. В алгебрі висловлень досліджуються логічні операції над висловленнями, що мають певне значення істинності. Сучасна алгебра логіки розглядає операції над висловлюваннями як булеву функцію і вивчає відносно них такі питання, як представлення функції у ДНФ, КНФ, ДДНФ, ДКНФ, полінома Жегалкіна, таблиці істинності формул, функціональну повноту та замкнені класи функцій.

1.1. Семіотика та мови першого порядку

В кожній галузі людської діяльності використовується та чи інша мова. У ХХ ст. сформувалась особлива наука про знаки та

мову як знакову систему — семіотику. Засновниками семіотики вважаються американські вчені Ч. Пірс¹ та Ч. Морріс².

Усі мови поділяються на природні та штучні. Природні мови, як от українська, англійська, російська тощо, виникли історично, у процесі діяльності людей. В них розрізняють алфавіт і граматику. Алфавіт — це сукупність знаків (букв), з яких будується слова, а зі слів утворюють речення. Сукупність всіх слів, наявних у будь-якій мові, називають її лексикою. Граматика — це правила, за допомогою яких зі слів і речень будують тексти (сукупність речень).

Природні мови функціонують на різних рівнях і в різних формах, як то мова розмовна і літературна, мова буденна і наукова, мова засобів масової інформації і професійна тощо. Природна мова складається лише зі змістовних слів та речень (вони визначаються для кожної мови окремо).

Штучні мови створюються людьми з певною метою: для скорочення запису текстів, уникнення багатозначності природної мови тощо. До штучних мов належать, наприклад, мови програмування (Алгол, Фортран, Паскаль та ін.), азбука Морзе, знаки дорожнього руху, спеціальні мови різних, зокрема природничих, наук, мова есперанто. Крім цих мов існують штучні формальні мови, які обслуговують математику; їх часто називають *численними*.

Побудова різних штучних мов підкоряється певним загальним закономірностям. Для опису цих мов використовується *метамова*. Текст цього посібника, а також кожний математичний текст

¹Чарльз Пірс (Charles Peirce) (1839–1914) — американський філософ, логік, математик. Ввів логічну функцію, названу стрілкою Пірса.

²Чарльз Морріс (Charles W. Morris) (1901–1979) — американський філософ.

(підручник, стаття, монографія і т.п.), є прикладом тексту, написаного на метамові.

Коротко розглянемо загальні принципи побудови штучних мов, і скористаємося ними для побудови двох логічних мов, які за традицією називатимемо численнями, — числення висловлень та числення предикатів. Спочатку наведемо ряд простих означень, щоб зрозуміти, які саме властивості формальних мов беруться за основу у абстрактних конструкціях.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.1. *Алфавіт* — це скінчена множина символів, які називаються *буквами* або *літерами*. Надалі літерою X позначатимемо деякий фіксований алфавіт.

Наприклад, $X_1 = \{a, b, \dots, я\}$ — український алфавіт з 33 букв, $X_2 = \{a, b, c, \dots, z\}$ — латинський алфавіт з 26 букв, або $X_3 = \{e, *, r, \neg\}$ — алфавіт мови SELF (див. Додаток 1).

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.2. *Словом* в алфавіті X називається скінчена впорядкована послідовність букв цього алфавіту без пропусків. Множину всіх слів в алфавіті X позначимо через $W(X)$.

Згідно цього означення “слово” та “влсоо” є словами алфавіту X_1 , а “ $r \neg * ee$ ” — словом алфавіту X_2 .

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.3. Для слів α і β визначене слово $\alpha\beta$, яке отримується шляхом дописування всіх букв слова β до слова α . Слово $\alpha\beta$ називають добутком слів α і β , або їх *конкатенацією*.

Наприклад, конкатетацією слів “слово” та “сполучення” в алфавіті X_1 є слово “словосполучення” в цьому ж алфавіті. Легко бачити, що операція конкатенації слів в даному алфавіті є асоціативною, але не комутативною.

Означення 1.1.4. Кількість букв у слові називається *довжиною* слова. Довжину слова α позначають $l(\alpha)$.

Букви алфавіту є словами довжини 1. Функція довжини слова $l: W(X) \rightarrow \mathbb{N}$, очевидно, має властивість: $l(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta)$.

Для зручності використовують порожнє слово Λ — слово, що не містить жодної букви. Порожнє слово Λ є нейтральним елементом стосовно операції конкатенації. Тобто, якщо Λ — порожнє слово, то для будь-якого слова α виконується рівність: $\Lambda \cdot \alpha = \alpha \cdot \Lambda = \Lambda$.

Означення 1.1.5. Слово β називається *підсловом* слова α , якщо $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2$ для деяких слів α_1, α_2 в алфавіті X .

Наприклад, слово “нація” підсловом слова “конкатенація”. Очевидно, що слово β може входити в слово α як підслово декілька разів.

Результатом заміни входження підслова β в слові $\alpha_1\beta\alpha_2$ на слово γ є слово $\alpha_1\gamma\alpha_2$. Результатом підстановки в слові α замість букви a слова β є слово, що отримується зі слова α одночасною заміною всіх входжень букви a на слово β .

Вважатимемо, що між будь-якими двома словами стоїть порожнє слово Λ . Воно відповідатиме пропуску між словами, як у природних мовах.

Означення 1.1.6. Скінчenna послідовність слів у алфавіті X називають *реченням у алфавіті X* .

Означення 1.1.7. *Довжиною речення* називають суму довжин всіх слів, які входять у це речення.

Функція довжини речення $l: S(X) \rightarrow \mathbb{N}$ має ті ж властивості, що й функція довжини слова.

Зрозуміло, що не всі слова чи речення в даному алфавіті мають симболове значення. У множині $W(X) \cup S(X)$ слів та речень в алфавіті X за певними правилами виокремлюють підмножину “правильних” слів та речень.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.8. *Мовою в алфавіті X* називають підмножину правильно побудованих слів та речень в алфавіті X .

Отже, мова складається лише зі змістовних слів та речень, які для кожної з мов вони визначаються за своїми правилами, що складають її граматику. Наприклад, в українському алфавіті можна виокремити слова української мови та граматично правильні речення. Так отримуємо множину текстів української мови, яку можна формально трактувати як деякий наближений опис української мови. Зрозуміло, що у природних мовах підмножина “правильних” текстів, як правило, має дуже нечіткі межі, тоді як у штучних мовах ці межі чітко окреслені.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.9. Правила утворення “правильних” виразів (формальної) мови називають *синтаксисом*, а правила співставлення правильних виразів з конкретними об'єктами та властивостями цих об'єктів називають *семантикою*. Синтаксис та семантика формальної мови вивчається за посередництвом *метамови*.

У цьому посібнику, в основному, розглянуто два традиційні для класичної математичної логіки числення: *числення висловлень* та *числення предикатів*. Вони є прикладами числень мови першого порядку. Кожному з них присвячено окремий розділ. Як і для будь-якого числення, до синтаксису числення висловлень та числення предикатів входять: мова, аксіоми та правила виведення. В традиційному розумінні, *аксіоми* — це речення даної мови, істинність яких гарантована практикою, і тому безсумнівна.

Правила виведення використовуються для строгого виведення з аксіом нових тверджень, що називаються *теоремами*.

1.2. Висловлення та дії над ними

Речення можуть бути істинними, хибними, або такими, про які не можна сказати істинні вони чи хибні. Серед усіх речень мови ті, про які можна сказати істинні вони чи хибні, називають висловленнями. При цьому в формальній логіці не стоїть питання про те, чому дане висловлення є істинним чи хибним. Зауважимо, що висловлення є первісним поняттям математичної логіки.

Висловленням традиційно вважають змістовне граматично правильне речення в одній з природніх або штучних мов, про яке можна однозначно сказати — істинне воно чи хибне.

- ПРИКЛАД 1.2.1. (1) Речення “7 — просте число”, “ $2 \times 2 = 5$ ”, “після зими починається весна”, “існує натуральне число n , що є коренем рівняння $X^2 - 3X + 2 = 0$ ” є висловленнями.
- (2) Речення “ $X^2 - 3X + 2 = 0$ ”, “змінимо життя на краще”, “навіщо Єва зірвала яблуко?”, “to be or not to be” не є висловленнями.

Різні автори позначають істинність та хибність числовень по різному. Наприклад: i — істина, x — хибність; t — істина (true), f — хибність (false); 1 — істина, 0 — хибність. В математичній логіці здебільшого використовують третю з описаних можливостей, якої дотримуватимемось і ми в цій книжці. При цьому “істинне” чи “хибне” є значенням істинності висловлення.

Висловлення позначатимемо великими буквами латинського алфавіту $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P, Q, R, \dots, A, B, C, D$ тощо. Можину всіх висловлень позначимо через S . Через $t(A)$ позначимо

значення істинності висловлення A . Кожному істинному висловленню A з множини S поставимо у відповідність число 1, а кожному хибному висловленню A — число 0. При цьому одержимо відображення $t: S \rightarrow \{0, 1\}$, яке називається *функцією істини*. Тобто

$$t(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо висловлення } A \text{ істинне,} \\ 0, & \text{якщо } A \text{ хибне.} \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1.2.2. З арифметики відомо, що висловлення “7 — просте число” є істинними, а висловлення “ $2 \times 2 = 5$ ” є хибним.

На множині всіх висловлень S можна задати певні логічні операції, за допомогою яких з одних висловлень можна утворювати інші. При цьому значення істинності нових висловлень буде визначатися значеннями істинності даних висловлень.

Над висловленнями виконують такі основні логічні операції: \neg — заперечення, \wedge — кон'юнкція, \vee — диз'юнкція, \rightarrow — імплікація, \leftrightarrow — еквіваленція.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.3. (1) Заперечення \neg . Запереченням висловлення A називають висловлення $\neg A$, яке істинне тоді й лише тоді, коли A хибне. Якщо A — висловлення, то $\neg A$ (воно читається “не A ”) — висловлення, для якого $t(\neg A) = 1 - t(A)$.

(2) Кон'юнкція \wedge . Кон'юнкцією висловлень A і B називають висловлення $A \wedge B$, яке істинне тоді й лише тоді, коли висловлення A і B істинні. Тоді висловлення A і B називаються кон'юнктивними членами. Якщо A і B — висловлення, то $A \wedge B$ (читається “ A і B ”) — висловлення, для якого $t(A \wedge B) = \min\{t(A), t(B)\}$.

(3) Диз'юнкція \vee . Диз'юнкцією висловлень A і B називають висловлення $A \vee B$, яке істинне тоді й лише тоді,

коли хоча б одне з висловлень A або B істинне. Якщо A і B — висловлення, то $A \vee B$ (читається “ A або B ”) — висловлення, для якого $t(A \vee B) = \max\{t(A), t(B)\}$. Інакше кажучи, диз’юнкція $A \vee B$ хибна тоді і тільки тоді коли обидва диз’юнктивні члени A і B хибні.

- (4) Імплікація \rightarrow . *Імплікацією* висловлень A і B називають висловлення $A \rightarrow B$, яке хибне тоді й лише тоді, коли антецедент³ A істинний, а консеквент⁴ B хибний. Якщо A і B — висловлення, то $A \rightarrow B$ (читається “якщо A то B ” або “з A випливає B ”) — висловлення, для якого $t(A \rightarrow B) = \max\{1 - t(A), t(B)\}$.
- (5) Еквіваленція \leftrightarrow . *Еквіваленцією* висловлень A і B називають висловлення $A \leftrightarrow B$, яке істинне тоді й лише тоді, коли обидва A і B набувають однакових значень істинності. Якщо A і B — висловлення, то $A \leftrightarrow B$ (читається “ A тоді і тільки тоді, коли B ” або “ A еквівалентне B ”) — висловлення, для якого $t(A \leftrightarrow B) = \begin{cases} 1, & t(A) = t(B), \\ 0, & t(A) \neq t(B). \end{cases}$

Наведені вище означення логічних операцій можна об’єднати у такій спільній таблиці істинності.

| $t(A)$ | $t(B)$ | $t(\neg A)$ | $t(A \vee B)$ | $t(A \wedge B)$ | $t(A \rightarrow B)$ | $t(A \leftrightarrow B)$ |
|--------|--------|-------------|---------------|-----------------|----------------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Висловлення поділяють на прості та складні.

³Антецедент (від лат. ante-cedens — попередній) — причина, посилення

⁴Консеквент (лат. consequens) — висновок, наслідок

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.4. Висловлення називається *простим*, або *атомарним*, якщо жодна його частина не є висловленням. Висловлення, утворені з інших висловлень за допомогою скінченного числа логічних операцій, називають *складними*.

ПРИКЛАД 1.2.5. “7 – просте число” – просте висловлення, а речення “Якщо ціле число a є дільником числа 7, то $a = 1$ або $a = -1$ або $a = 7$ або $a = -7$ ” – складне висловлення.

ПРИКЛАД 1.2.6. Нехай задано два прості висловлення:

$$A – \text{“2 просте число”} \text{ та } B – \text{“}2 + 2 = 4\text{”}.$$

Застосовуючи до них логічні операції, отримаємо такі складні висловлення:

- $\neg A$ – “2 – не просте число”;
- $A \vee B$ – “2 просте число або $2 + 2 = 4$ ”;
- $A \rightarrow B$ – “Якщо 2 просте число, то $2 + 2 = 4$ ”;
- $A \leftrightarrow B$ – “2 – просте тоді і тільки тоді, коли $2 + 2 = 4$ ”;
- $A \wedge B$ – “2 просте число і $2 + 2 = 4$ ”.

1.3. Формули алгебри висловлень та їх еквівалентність

Найрозвиненішою частиною сучасної логіки є так звана логіка висловлень, або пропозиційна логіка (від англ. proposition – речення, твердження). Основним предметом вивчення логіки висловлень є прості висловлення. Причому у логіці висловлень не аналізується внутрішня структура простого висловлення чи його зміст, натомість визначається, як з простих висловлень утворюються складні, і як залежить значення істинності складного висловлення від значень простих висловлень, що до нього входять. При цьому не стойть питання про те, чому дане висловлення є істинним чи хибним.

Логіка висловлень включає в себе алгебру висловлень, в якій досліджуються операції над висловленнями, що мають певне значення істинності, та числення висловлень. При цьому вважають логічно еквівалентними всі висловлення, які набувають однакових значень істинності при одинакових значеннях простих висловлень, що до них входять, не зважаючи на їх зміст.

Розглянемо *алфавіт алгебри висловлень*, що складається з пропозиційних змінних (змінних висловлень, якими позначаються прості висловлення; вони є буквами алфавіту) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P, Q, R, \dots, A, B, C, D \dots$, логічних зв'язок (символів логічних операцій) \neg (заперечення), \wedge (кон'юнкція), \vee (диз'юнкція), \rightarrow (імплікація), \leftrightarrow (еквіваленція), та дужок “(”, “)”.

З символів цього алфавіту утворюють слова, серед яких “*змістовними*”, правильно побудованими, є формули.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.1. *Формули алгебри висловлень* будуються індуктивним шляхом з *пропозиційних змінних* $P_1, \dots, P_n, \dots, P, Q, R, \dots, A, B, C, D \dots$, з використанням логічних зв'язок та дужок за допомогою таких правил:

- (1) Кожна пропозиційна змінна є формuloю алгебри висловлень;
- (2) Якщо A і B – формули, то $\neg A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ – формули алгебри висловлень.

ПРИКЛАД 1.3.2.

- (1) $((\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B))$;
- (2) $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$;
- (3) $((P_1 \vee P_2) \rightarrow (P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_3)))$.

За допомогою логічних операцій можна будувати складні висловлення, вказуючи на порядок дій за допомогою дужок.

Кількість дужок можна скоротити, якщо домовитись, що спочатку виконують заперечення, потім кон'юнкцію, диз'юнкцію, і нарешті — імплікацію та еквіваленцію. Якщо дужки відсутні, порядок виконання операцій є таким: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .

Також часто домовляються пропускати пару зовнішніх дужок у записі формул.

ПРИКЛАД 1.3.3. (1) Використовуючи ці домовленості, кількість дужок у формулі $((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow R) \vee ((P \wedge \neg Q) \rightarrow (P \wedge R))$ можна скоротити: $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R \vee P \wedge \neg Q \rightarrow P \wedge R$.

(2) Так само можна відновити дужки: $\neg B \vee (C \rightarrow A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B \wedge \neg C \rightarrow \neg A \wedge B) \wedge A = ((\neg B \vee (C \rightarrow (A \wedge B))) \leftrightarrow (((A \vee (B \wedge \neg C)) \rightarrow (\neg A \wedge B)) \wedge A))$.

Значення істинності формули A цілком визначається значення істинності змінних, з яких побудована формула A . Значення функції істинності для складних формул зручно обчислювати за допомогою таблиць істинності.

ПРИКЛАД 1.3.4. Побудуємо таблицю істинності для формули $A = (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$.

| $t(P)$ | $t(Q)$ | $t(R)$ | $t(P \vee Q)$ | $t(Q \rightarrow R)$ | $t(P \wedge (Q \rightarrow R))$ | $t(A)$ |
|--------|--------|--------|---------------|----------------------|---------------------------------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Використовуючи символи алфавіту алгебри висловлень, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, записавши у вигляді формули, яка виражає його *логічну структуру*.

ПРИКЛАД 1.3.5. Висловлення “Якщо число 70 кратне 5 і 7, то воно кратне 35” має таку логічну структуру: $(A \wedge B) \rightarrow C$.

ПРИКЛАД 1.3.6. Запишемо мовою алгебри висловлень таке речення “Якщо гроші не пахнуть або йде дощ, то собака не візьме слід”, і знайдемо його значення істинності.

Атомарними висловленнями у цьому випадку є такі: A — “гроші не пахнуть”, B — “йде дощ”, C — “собака візьме слід”. Тоді речення запишеться такою формулою алгебри висловлень: $A \vee B \rightarrow \neg C$. Побудуємо для неї таблицю істинності.

| $t(A)$ | $t(B)$ | $t(C)$ | $t(A \vee B)$ | $t(\neg C)$ | $t((A \vee B) \rightarrow \neg C)$ |
|--------|--------|--------|---------------|-------------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Для визначення значення істинності речення часто зручно користуватися скороченими таблицями істинності. Для цього виписують формулу алгебри висловлень, для якої потрібно скласти таблицю істинності. Для всіх можливих наборів значень пропозиційних змінних, які входять у дану формулу, під всіма входженнями кожної з букв запишемо відповідні значення істинності.

Далі під кожною логічною зв'язкою запишемо значення істинності відповідної формули в порядку виконання логічних операцій. Значення істинності формули буде записане під символом логічної операції, яка виконується останньою — т.з. головна зв'язка.

ПРИКЛАД 1.3.7. Запишемо скорочену таблицю істинності для формули $((A \wedge C) \vee (B \wedge D)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (C \vee D))$. Оскільки пропозиційних змінних є 4, таблиця істинності міститиме $2^4 = 16$ рядків.

| $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ | \rightarrow | $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ |
|----------------------------------|---------------|--------------------------------|
| $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ | \rightarrow | $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ |
| 0 0 0 0 | 1 | 0 0 0 0 |
| 0 0 0 0 | 1 | 0 0 0 0 |
| 0 0 1 0 | 1 | 0 0 0 0 |
| 0 0 1 0 | 1 | 0 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 0 1 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 0 1 0 0 |
| 0 0 1 1 | 1 | 1 1 0 0 |
| 0 0 1 1 | 1 | 1 1 0 0 |
| 1 0 0 0 | 1 | 1 0 0 0 |
| 1 0 0 0 | 1 | 1 0 0 0 |
| 1 1 1 0 | 1 | 1 0 1 0 |
| 1 1 1 0 | 1 | 1 0 1 0 |
| 1 0 0 1 | 1 | 1 1 0 0 |
| 1 0 0 1 | 1 | 1 1 0 0 |
| 1 1 1 1 | 1 | 1 1 1 1 |
| 1 1 1 1 | 1 | 1 1 1 1 |

Як бачимо, ця формула є тотожно істинною.

Зауважимо також, що трапляються такі складні висловлення, значення істинності яких можна визначити, навіть не знаючи

значень істинності атомарних висловлень, які до них входять. Наведемо приклад висловлень такого типу.

ПРИКЛАД 1.3.8. Висловлення $A \vee B \vee \neg A$ та $A \rightarrow (B \vee \neg B)$ істинні, а висловлення $A \wedge (B \wedge \neg B)$ та $\neg(A \vee \neg A)$ хибні.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.9. Формула A , для якої $t(A) = 1$ тодіжно, називається *тавтологією*⁵. Формула A , для якої $t(A) = 0$ тодіжно, називається *суперечністю*. Формула, яка не є суперечністю, називається *виконуваною*.

ПРИКЛАД 1.3.10. Тавтологіями є такі важливі формули: $A \vee \neg A$ (закон виключення третього), $\neg(A \vee \neg A)$ (закон виключення суперечності), $A \rightarrow A$ (закон тодіжності).

Для того, щоб встановити, чи є дана формула алгебри висловлень тавтологією або суперечністю, можна побудувати таблицю істинності для цієї формули. Якщо останній стовпець цієї таблиці містить лише одиниці, формула є тавтологією. Якщо всі нулі, то формула є суперечністю, а коли є хоча б одна одиниця і хоча б один нуль, то маємо справу з виконуваною формулою.

Таку перевірку також можна виконувати так званим *методом відшукання контрприкладу* (від супротивного). Якщо знається набір значень пропозиційних змінних, на якому формула набуває значення 0, формула не є тавтологією. Якщо при спробі відшукати контрприклад приходимо до суперечності, формула є тавтологією. Проілюструємо цей метод на прикладах.

ПРИКЛАД 1.3.11. Перевіримо, що формула $P = (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \longrightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$ тавтологією.

⁵ Термін тавтологія в логіку ввів Людвіг Вітгенштейн (Ludwig Wittgenstein) (1889–1951) — австро-англійський філософ, логік, один із засновників аналітичної філософії (з гр. *ταυτο* — те саме, *λογος* — мова).

Припустимо, що вона не є тавтологією. Тоді хоча б на одному наборі істинносних значень атомарних висловлень формула P набуде значення 0. Це можливо тоді і тільки тоді, коли всі кон'юнктивні члени в антецеденті істинні, а консеквент $((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$ є хибним. Але консеквент $((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$ у свою чергу є імплікацією, яка хибна тоді і тільки тоді, коли антецендент $A \vee C$ є істинним, а консеквент $B \vee D$ — хибний. Останнє можливо тільки при $t(B) = 0$ і $t(D) = 0$.

З цього та істинності формули $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ випливає, що $t(A) = 0$ і $t(C) = 0$. Але тоді $t(A \vee C) = 0$. Отримана суперечність доводить, що формула справді є тавтологією.

ПРИКЛАД 1.3.12. Покажемо, що формула $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$ не є тавтологією.

Для доведення цього, знайдемо набір значень пропозиційних змінних, при яких формула є хибною. Якщо формула не є тавтологією, то хоча б на одному наборі вона набуде значення 0. З того, що імплікація набуває значення істинності нуль випливає, що $t(A \rightarrow B) = 1$ і $t((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)) = 0$. З останнього отримуємо, що $t(A \rightarrow C) = 1$ і $t(B \rightarrow C) = 0$. Тоді очевидно, що $t(B) = 1$ і $t(C) = 0$. Зрозуміло також, що імплікації можуть набувати значення $t(A \rightarrow B) = 1$ та $t(A \rightarrow C) = 1$ тільки при значенні істинності $t(A) = 0$.

Отже, при $t(A) = 0$, $t(B) = 1$ і $t(C) = 0$ формула $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$ є хибною, тобто вона не є тавтологією.

Разом з тим ця формула не є суперечністю, а отже це виконувана формула.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.13. Дві формули A і B називаються *еквівалентними*, якщо $t(A) = t(B)$.

Введемо позначення $A \equiv B$ для еквівалентних формул A і B . Легко переконатися, що відношення \equiv є відношенням еквівалентності на множині всіх формул алгебри висловлень. (Залишаємо це читачеві як вправу.) Тоді множина формул алгебри висловлень за цим відношенням еквівалентності розбивається на класи еквівалентних елементів. До кожного з класів входять всі формули, які набувають однакових значень істинності при однакових значеннях пропозиційних змінних. В кожному такому класі зручно вміти вибирати представник як найпростішого вигляду, як от формулу, що містить мінімальну кількість логічних зв'язок чи формулу, що знаходиться в т. з. нормальній формі.

ПРИКЛАД 1.3.14. Перевіримо еквівалентність $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$. Це можна зробити, побудувавши таблиці істинності для обох формул $P \rightarrow Q$ і $\neg P \vee Q$:

| $t(P)$ | $t(Q)$ | $t(\neg P)$ | $t(P \rightarrow Q)$ | $t(\neg P \vee Q)$ |
|--------|--------|-------------|----------------------|--------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Порівнюючи два останніх стовпчики цієї таблиці, бачимо, що $t(P \rightarrow Q) = t(\neg P \vee Q)$, отже $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.3.15. *Нехай A , B і C – довільні формули алгебри висловлень. Тоді перелічені нижче пари формул еквівалентні:*

- 1) $A \vee B \equiv B \vee A$ (*Комутативність диз'юнкції*);
- 1') $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (*Комутативність кон'юнкції*);
- 2) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (*Асоціативність диз'юнкції*);
- 2') $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (*Асоціативність кон'юнкції*);

- 3) $(A \vee B) \wedge B \equiv B$ (*Закон поглинання*);
 3') $(A \wedge B) \vee B \equiv B$ (*Закон поглинання*);
 4) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (*Дистрибутивність*);
 4') $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (*Дистрибутивність*);
 5) $(A \vee \neg A) \wedge B \equiv B$;
 5') $(A \wedge \neg A) \vee B \equiv B$;
 6) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (*Закон де Моргана*⁶);
 6') $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (*Закон де Моргана*);
 7) $A \wedge A \equiv A$ (*Закон ідемпотентності*);
 7') $A \vee A \equiv A$ (*Закон ідемпотентності*);
 8) $\neg\neg A \equiv A$ (*Закон подвійного заперечення*);
 9) $A \wedge 0 \equiv 0$ ⁷;
 9') $A \vee 0 \equiv A$;
 10) $A \wedge 1 \equiv A$;
 10') $A \vee 1 \equiv 1$;
 11) $A \wedge \neg A \equiv 0$ (*Закон суперечності*);
 11') $A \vee \neg A \equiv 1$ (*Закон виключення третього*);
 12) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$;
 13) $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (*Закон контрапозиції*).

ДОВЕДЕННЯ. 3) Доведемо, наприклад, закон поглинання $(A \vee B) \wedge B \equiv B$, побудувавши таблиці істинності для формул

| $t(A)$ | $t(B)$ | $t(A \vee B)$ | $t(B \wedge (A \vee B))$ |
|--------|--------|---------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

⁶Огастес де Морган (Augustus de Morgan) (1806–1871) — шотландський математик і логік.

⁷Тут і далі 0 означає довільну суперечність, а 1 — довільну тавтологію.

З рівності другого та четвертого стовпців таблиці істинності випливає еквівалентність потрібних формул.

12) Цю еквівалентність доведено у попередньому прикладі.

13) Доведемо закон контрапозиції $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$:

| $t(A)$ | $t(B)$ | $t(A \rightarrow B)$ | $t(\neg B)$ | $t(\neg A)$ | $t(\neg B \rightarrow \neg A)$ |
|--------|--------|----------------------|-------------|-------------|--------------------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Порівнявши другий і останній стовпці таблиці, бачимо, що $t(A \rightarrow B) = t(\neg B \rightarrow \neg A)$, що і треба було довести.

Доведення інших тверджень зводиться до простої перевірки виписаних еквівалентностей за допомогою, наприклад, таблиць істинності. \square

Використовуючи ці еквівалентні формули, зручно перевіряти еквівалентність інших формул алгебри висловлень, без використання таблиць істинності. Ці еквівалентності виражаютъ добре відомі закони класичної логіки, назви яких записані справа в дужках. Для їх засвоєння і усвідомлення потрібно добре попрактикуватися.

ПРИКЛАД 1.3.16. Перевіримо еквівалентність $\neg(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \equiv \neg B$.

Застосовуючи послідовно закон де Моргана для кон'юнкції, дистрибутивність кон'юнкції, закон виключення третього та комутативність диз'юнкції, отримаємо такі еквівалентності:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) &\equiv^{6,4'} (\neg A \vee \neg B) \vee A \wedge (\neg B \vee B) \equiv^{11'} \\ \neg A \vee \neg B \vee A &\equiv^{11'} (\neg A \vee A) \vee \neg B \equiv 1 \vee \neg B \equiv \neg B. \end{aligned}$$

Запропоновані у твердженні властивості зручно також використовувати для зведення формул алгебри висловлень до логічно еквівалентних формул, зокрема з меншою кількістю логічних зв'язок.

ПРИКЛАД 1.3.17. Зведемо формули алгебри висловлень до еквівалентних з меншою кількістю букв та (або) логічних зв'язок.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\neg(C \rightarrow \neg B) \vee \neg(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C)) \rightarrow \neg B \equiv^{12,6} (\neg(\neg C \vee \neg B) \vee \neg A \vee \neg B \vee (B \wedge \neg C)) \rightarrow \neg B \equiv^{6',1} ((C \wedge B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg B \equiv^{1'} ((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg B \equiv^{4'} (((C \vee \neg C) \wedge B) \vee \neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg B \equiv^{11'} (B \vee \neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg B \equiv^{11'} \neg A \rightarrow \neg B \equiv^{13} B \rightarrow A. \\
 (2) \quad & ((A \vee B) \wedge (B \rightarrow A)) \vee (A \wedge C) \equiv^{12} ((A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee (A \wedge C) \equiv^4 A \vee (B \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \equiv^{11} A \vee (A \wedge C) \equiv^{3'} C.
 \end{aligned}$$

1.4. Булеві алгебри

1.4.1. Означення та приклади булевих алгебр.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.1. *Булевою алгеброю*⁸ називається множина B , на якій задані дві бінарні алгебраїчні операції \cup (об'єднання, або булеве додавання) і \cdot (перетин, або булеве множення), та одна унарна алгебраїчна операція $\bar{}$ (булеве доповнення), і ці операції задовольняють такі аксіоми:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad a \cup b = b \cup a; & 1') \quad a \cdot b = b \cdot a; \\
 2) \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c; & 2') \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c; \\
 3) \quad ((a \cup b) \cdot b) = b; & 3') \quad (a \cdot b) \cup b = b; \\
 4) \quad a \cup (b \cdot c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c); & 4') \quad a \cdot (b \cup c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c); \\
 5) \quad ((a \cup \bar{a}) \cdot b) = b; & 5') \quad (a \cdot \bar{a}) \cup b = b
 \end{array}$$

⁸Джордж Буль (George Boole) (1815–1864) — британський математик і філософ.

для будь-яких елементів $a, b \in B$.

ПРИКЛАД 1.4.2. (1) Булева алгебра з двома елементами.

Нехай $B = \{0, 1\}$ — множина з операціями $a \cup b = \max\{a, b\}$,
 $a \cdot b = \min\{a, b\}$, $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$. За допомогою безпосередньої перевірки легко переконатися, що множина $\{0, 1\}$ є булевою алгеброю стосовно цих операцій.

- (2) Нехай $B = 2^M$ — множина всіх підмножин деякої множини M зі звичайними теоретико-множинними операціями об'єднання, перетину та доповнення $A \cup B$, $A \cdot B = A \cap B$, $\bar{A} = M \setminus A$, де $A, B \in 2^M$ — підмножини множини M . З властивостей операцій над множинами випливає, що це булева алгебра.
- (3) Нехай A — непорожня множина, $M = 2^A$ — множина всіх підмножин множини A . Визначимо на 2^A операції:
 $X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ і $X \odot Y = X \cap Y$. Множина M є кільцем стосовно цих операцій. Це кільце є булевим, бо воно комутативне, і кожний елемент в ньому є ідемпотентом.
- (4) Нехай B — булева алгебра, M — непорожня множина, а B^M — множина всіх відображенень з M в B . Означимо об'єднання, перетин та доповнення функцій з B^M у такий спосіб:

$$\begin{aligned} f \cup g &- \text{це функція для якої } (f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x), \\ f \cdot g &- \text{це функція для якої } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ \bar{f} &- \text{це функція для якої } \bar{f}(x) = \overline{f(x)}. \end{aligned}$$

Легко перевірити, що ці операції задовольняють всі аксіоми з означення булевої алгебри. Виконаємо цю перевірку для аксіоми 4. Перевірки всіх інших аксіом виконуються аналогічно.

Нехай x довільний елемент множини M , $f, g, h \in B^M$. Тоді

$$\begin{aligned}(f \cup (g \cdot h))(x) &= f(x) \cup (g \cdot h)(x) = \\&= (f(x) \cup (g(x))) \cdot (f(x) \cup h(x)) = \\&= (f \cup g)(x) \cdot (f \cup h)(x) = ((f \cup g) \cdot (f \cup h))(x).\end{aligned}$$

Отже значення функцій $f \cup (g \cdot h)$ та $(f \cup g) \cdot (f \cup h)$ є однаковими для кожного елемента $x \in M$, тому $f \cup (g \cdot h) = (f \cup g) \cdot (f \cup h)$.

- (5) Тепер розглянемо наступний важливий частковий клас булевих алгебр з попереднього прикладу. Нехай

$$B = \{0, 1\}, \quad M = \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_n.$$

У цьому випадку булеву алгебру B^M позначатимемо через F_n . Булева алгебра F_n складається з усіх функцій $f(x_1, \dots, x_n)$ від n змінних x_1, \dots, x_n , кожна з яких набуває значення в множині $\{0, 1\}$, причому значення всіх функцій теж належать до множини $\{0, 1\}$. Такі функції називають *булевими функціями*.

Можна також розглянути об'єднання $F = \cup F_n$. Множина F , як неважко переконатися, теж є булевою алгеброю.

- (6) Нехай B_1, \dots, B_n — булеві алгебри. Розглянемо скінчений декартовий добуток $B = B_1 \times \dots \times B_n$ з операціями об'єднання, перетину та доповнення, визначеними покомпонентно:

$$(x_1, \dots, x_n) \cup (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \cup y_1, \dots, x_n \cup y_n);$$

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n);$$

$$\overline{(x_1, \dots, x_n)} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Легко превірити, що декартовий добуток булевих алгебр є булевою алгеброю.

1.4.2. Алгебра Лінденбаума-Тарського. Розглянемо ще один приклад булевої алгебри, яка названа на честь логіків А. Лінденбаума⁹ та А. Тарського¹⁰.

Булеві алгебри тісно пов'язані з елементарною логікою висловлень. Еквівалентність формул числення висловлень узгоджується з логічними операціями. А саме, має місце таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.3. Якщо A_1, A_2, B_1, B_2 – формули числення висловлень і $A_1 \equiv A_2, B_1 \equiv B_2$, то $\neg A_1 \equiv \neg A_2, A_1 \vee B_1 \equiv A_2 \vee B_2, A_1 \wedge B_1 \equiv A_2 \wedge B_2$ і $A_1 \rightarrow B_1 \equiv A_2 \rightarrow B_2$.

ДОВЕДЕННЯ. Перевіримо, наприклад, що $(A_1 \rightarrow B_1) \equiv (A_2 \rightarrow B_2)$. Маємо $t(A_1) = t(A_2), t(B_1) = t(B_2), t(A_1 \rightarrow B_1) = \max\{1 - t(A_1), t(B_1)\} = \max\{1 - t(A_2), t(B_2)\} = t(A_2 \rightarrow B_2)$. Аналогічно перевіряються інші еквівалентності. \square

Нехай F – множина всіх формул алгебри висловлень разом з логічними операціями над висловленнями. Позначимо через L фактор-множину F/\equiv множини F за відношенням еквівалентності \equiv . Клас всіх формул, які еквівалентні формулі A , позначимо через $[A]$. Множина $[A]$ є елементом з L . Якщо $A_1 \equiv A_2$, то $[A_1] = [A_2]$. Означимо операції над елементами множини L за

⁹Адольф Лінденбаум (Adolf Lindenbaum) (1904–1941) – польський математик і логік.

¹⁰Альфред Тарский (Alfred Tarski) (1901–1983) – видатний польсько-американський математик і логік, один з представників Львівсько-Варшавської школи. Засновник формальної теорії істинності.

правилами:

$$\neg[A] = [\neg A]; \quad [A] \vee [B] = [A \vee B];$$

$$[A] \wedge [B] = [A \wedge B]; \quad [A] \rightarrow [B] = [A \rightarrow B].$$

Попереднє твердження 1.4.3 показує, що коли $[A_1] = [A_2]$ і $[B_1] = [B_2]$, то $\neg[A_1] = \neg[A_2]$, $[A_1] \vee [B_1] = [A_2] \vee [B_2]$, $[A_1] \wedge [B_1] = [A_2] \wedge [B_2]$ і $[A_1] \rightarrow [B_1] = [A_2] \rightarrow [B_2]$. Це означає, що операції \vee , \wedge та \neg на множині L визначені коректно. З твердження 1.3.15 як наслідок випливає такий опис властивостей основних логічних операцій.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.4. *Операції \vee , \wedge та \neg мають такі властивості:*

- 1) $[A] \vee [B] = [B] \vee [A];$
- 1') $[A] \wedge [B] = [B] \wedge [A];$
- 2) $[A] \vee ([B] \vee [C]) = ([A] \vee [B]) \vee [C];$
- 2') $[A] \wedge ([B] \wedge [C]) = ([A] \wedge [B]) \wedge [C];$
- 3) $([A] \vee [B]) \wedge [B] = [B];$
- 3') $([A] \wedge [B]) \vee [B] = [B];$
- 4) $[A] \vee ([B] \wedge [C]) = ([A] \wedge [B]) \vee ([A] \wedge [C]);$
- 4') $[A] \wedge ([B] \vee [C]) = ([A] \vee [B]) \wedge ([A] \vee [C]);$
- 5) $([A] \vee \neg[A]) \wedge [B] = [B];$
- 5') $([A] \wedge \neg[A]) \vee [B] = [B];$

Це твердження насправді показує, що множина L є булевою алгеброю.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.5. Множина L (фактор-множина всіх формул алгебри висловлень за відношенням еквівалентності формул) разом з визначеними на ній операціями кон'юнкції \wedge , диз'юнкції \vee та заперечення \neg називається *алгеброю Лінденаума–Тарського*.

1.4.3. Основні властивості булевих алгебр. Доведемо тепер деякі найпростіші наслідки з аксіом булевої алгебри. Зauważимо, що аксіоми 1–5' симетричні відносно операцій \cup та \cdot : разом з кожною аксіомою ця система аксіом містить ще одну, яка одержується з даної заміною операцій \cup на \cdot і \cdot на \cup . Тому кожна властивість операцій булевої алгебри має двоїсту властивість, яка одержується з даної заміною \cup на \cdot і \cdot на \cup відповідно.

Нехай B — довільна булева алгебра.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.6. *Операції \cup і \cdot ідемпотентні, тобто для довільних елементів $a, b \in B$ виконуються рівності:*

$$6) \quad a \cup a = a, \quad 6') \quad a \cdot a = a.$$

Крім цього,

$$7) \quad a \cdot b = a \iff a \cup b = b, \quad 7') \quad a \cup b = a \iff a \cdot b = b.$$

ДОВЕДЕННЯ. Доведемо властивість 6). Маємо

$$a =_3 a \cup (a \cdot b) =_4 (a \cup a) \cdot (a \cup b) =_4 (a \cdot (a \cup b)) \cup (a \cdot (a \cup b)) =_3 a \cup a.$$

Тут індекси біля знаків $=$ означають посилання на аксіому, з використанням якої одержується дана рівність. Аналогічно доводиться і рівність 6').

Переходимо до доведення властивості 7). Нехай $a \cdot b = a$. Підставивши це в 3'), одержимо $a \cup b = b$. Навпаки, якщо $a \cup b = b$, то $a \cdot b = a \cdot (a \cup b) =_1 (a \cup b) \cdot a =_3 a$. \square

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.7. Кажуть, що $a \leq b$ для елементів a і b булевої алгебри B , якщо виконується умова $a \cup b = b$. За властивістю 7, вона еквівалентна умові $a \cdot b = a$.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.8. *Нехай a, b, c — довільні елементи булевої алгебри B . Тоді*

- 8) $a \leq a$;
- 9) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$;
- 10) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$.

ДОВЕДЕННЯ. 8 випливає з 6.

Оскільки $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a = a \cdot b$ і $a = a \cup b$. Тому, підставляючи $a = a \cup b$ в $a = a \cdot b$, одержуємо рівність: $a = a \cdot b = (a \cup b) \cdot b =_3 b$. Таким чином, доведено 9.

Тепер доведемо властивість 10. Нехай $a \leq b$ і $b \leq c$. Тоді $a = a \cdot b$ та $b = b \cdot c$. Отримуємо рівність $a = a \cdot b = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot c$, що означає, що $a \leq c$. \square

Доведене твердження свідчить про те, що відношення \leq є відношенням порядку на булевій алгебрі B .

Елементи $a \cup b$ та $a \cdot b$ іноді називають, відповідно, *точкою верхньою* та *точкою нижньою гранями елементів* a і b . Наступне твердження 1.4.9 обґруntовує таку термінологію.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.9. *Нехай a і b – довільні елементи булевої алгебри B . Тоді*

- 11) $a \leq a \cup b$, $b \leq a \cup b$;
- 12) $a \leq c \wedge b \leq c \implies a \cup b \leq c$;
- 13) $a \cdot b \leq a$, $a \cdot b \leq b$;
- 14) $c \leq a \wedge c \leq b \implies c \leq a \cdot b$.

ДОВЕДЕННЯ. 11. Згідно з аксіомою 3, $(a \cup b) \cdot b = b$. Тоді $b \leq a \cup b$. Враховуючи аксіому 1, отримуємо $a \leq a \cup b$.

12. $a \cup c = c$ і $b \cup c = c$. Тому

$$c =_6 c \cup c = (a \cup c) \cup (b \cup c) =_{1,2} (a \cup b) \cup (c \cup c) = (a \cup b) \cup c.$$

Отже $a \cup b \leq c$.

Властивості 13 і 14 пропонуємо довести самостійно. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.10. *Нехай a і b — довільні елементи булевої алгебри B . Тоді*

$$15) \quad a \cup \bar{a} = b \cup \bar{b}, \quad a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b}.$$

ДОВЕДЕННЯ. З аксіоми 5 і означення \leq випливає нерівність $a \cup \bar{a} \leq b$. Оскільки a і b — довільні елементи з B , замість b можна підставити $b \cup \bar{b}$, і тоді $a \cup \bar{a} \leq b \cup \bar{b}$. Також можна записати $b \cup \bar{b} \leq a \cup \bar{b}$. Таким чином, перша з властивостей 15 доведена.

Аналогічно, з 5 отримуємо $a \cdot \bar{a} \leq b$, а звідси $a \cdot \bar{a} \leq b \cdot \bar{b}$. Оскільки a і b — довільні, $b \cdot \bar{b} \leq a \cdot \bar{a}$, тому $a \cdot \bar{b} = b \cdot \bar{b}$. \square

Попереднє твердження означає, що елементи $a \cup \bar{a}$ і $a \cdot \bar{a}$ не залежать від a . Для довільного елемента a булевої алгебри B можна зручно такі позначення:

$$16) \quad 1 = a \cup \bar{a}, \quad 16') \quad 0 = a \cup \cdot a,$$

де a — довільний елемент булевої алгебри B . Такі елементи існують в кожній булевій алгебрі. Наведемо основні властивості цих елементів.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.11. *Нехай a — довільний елемент булевої алгебри B . Тоді*

$$17) \quad 0 \leq a, \quad a \leq 1, \quad a \cup 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cup 1 = 1, \quad a \cdot 1 = a.$$

ДОВЕДЕННЯ. Те, що $0 \leq a$ і $a \leq 1$ безпосередньо випливає з означень елементів 0 та 1. $a \cdot 0 = a \cdot (a \cdot \bar{a}) = (a \cdot a) \cdot \bar{a} = a \cdot \bar{a} = 0$. За аксіомою 3, $a \cdot 1 = a \cdot (a \cup \bar{a}) = a$. Нарешті, $a \cup 0 = a \cup (a \cup \bar{a}) = (a \cup a) \cup \bar{a} = a \cup \bar{a} = 0$. \square

Властивість 17 означає, що 1 та 0 є, відповідно, найбільшим та найменшим елементом булевої алгебри B .

Наведемо властивість, яка характеризує операцію булевого додавання в термінах об'єднання та перетину.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.12. Нехай a — довільний елемент булевої алгебри B . Тоді

$$18) \quad a \cup c = 1 \wedge a \cdot c = 0 \iff c = \bar{a}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Імплікація \iff очевидна. Для доведення оберненої імплікації \implies необхідно зробити деякі обчислення. Для довільного елемента $c \in B$

$$c =_{17} 0 \cup c =_{16} (a \cdot \bar{a}) \cup c =_{1}, 4') (a \cup c) \cdot (\bar{a} \cup c) = 1 \cdot (\bar{a} \cup c) =_{17} \bar{a} \cup c.$$

Отже $\bar{a} \leq c$. З іншого боку

$$c =_{17} 1 \cdot c =_{16} (a \cup \bar{a}) \cdot c =_4 (a \cdot c) \cup (\bar{a} \cdot c) = 0 \cup (\bar{a} \cdot c) =_{17} \bar{a} \cdot c.$$

Це означає, що $c \leq \bar{a}$. Таким чином $c = \bar{a}$. \square

НАСЛІДОК 1.4.13. Нехай a довільний елемент булевої алгебри B . Тоді

$$19) \quad a = \bar{\bar{a}}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Властивість випливає з 18, якщо замість a підставити \bar{a} , а замість c підставити a і використати 16 і 16'. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.14 (Закони де Моргана). Нехай a і b — довільні елементи булевої алгебри B . Тоді

$$20) \quad \overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $c = \bar{a} \cdot \bar{b}$. Тоді

$$(a \cup b) \cdot c = (a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) \cup (b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \cup 0 = 0.$$

$$(a \cup b) \cup c = (a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (a \cup b \cup \bar{a}) \cdot (a \cup b \cup \bar{b}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Звідси та з 18 одержуємо $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cup b}$. Другий закон де Моргана $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$ пропонуємо довести самостійно. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.15. Нехай a і b — довільні елементи булевої алгебри B . Тоді

- 21) $a \leq b \iff \bar{b} \leq \bar{a}$;
- 22) $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$;
- 23) $a \leq b \iff a \setminus b = 0$, де $a \setminus b = a \cdot \bar{b}$.

ДОВЕДЕННЯ. Пропонуємо читачу довести це твердження самостійно. \square

Зауважимо, що навіть візуально властивості булевих алгебр нагадують властивості логічних операцій.

1.4.4. Диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми. Повернемося до розгляду скінченних булевих алгебр F_n . Нагадаємо, що елементами алгебри F_n є булеві функції — відображення $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, які можна записати у вигляді $f(x_1, \dots, x_n)$, де $f(x_1, \dots, x_n)$ можна трактувати як всюди визначену функцію зі значеннями в множині $\{0, 1\}$ від n змінних x_1, \dots, x_n , кожна з яких набуває значень з множини $\{0, 1\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.16. Нехай $a, b \in \{0, 1\}$. Позначимо

$$b^a = \begin{cases} b, & \text{якщо } a = 1, \\ 1 - b, & \text{якщо } a = 0, \end{cases}$$

тобто $1^1 = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = 0$, $0^0 = 1$. Інакше кажучи,

$$b^a = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a = b, \\ 0, & \text{якщо } a \neq b. \end{cases}$$

Нагадаємо, крім цього, що для $x, y \in \{0, 1\}$, $x \cap y = \min\{x, y\} = xy$, $x \cup y = \max\{x, y\}$.

ТЕОРЕМА 1.4.17. У вищеведених позначеннях довільну функцію $f \in F_n$ можна записати у диз'юнктивній нормальній формі:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}^n} f(a_1, \dots, a_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}. \quad (*)$$

ДОВЕДЕННЯ. Достатньо перевірити, що в результаті підстановки $x_1 = b_1, \dots, x_n = b_n$ у праву частину рівності $(*)$ одержується $f(b_1, \dots, b_n)$. Справді,

$$\begin{aligned} & \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}^n} f(a_1, \dots, a_n) b_1^{a_1} b_2^{a_2} \cdots b_n^{a_n} = \\ &= \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}^n} f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_1 = b_1 \dots a_n = b_n, \\ 0, & \text{якщо } (a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n) \end{cases} \\ &= f(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Якщо f функція, яка не дорівнює тотожно нулю, то рівність $(*)$ можна записати у вигляді

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{\substack{f(a_1, \dots, a_n) = 1, \\ (a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}. \quad (\text{ДНФ})$$

□

ТЕОРЕМА 1.4.18. Якщо функція $f \in F_n$ не дорівнює тотожно 1, то її можна записати у кон'юнктивній нормальній формі:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{\substack{f(a_1, \dots, a_n) = 0, \\ (a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n}} (x_1^{\bar{a}_1} \cup x_2^{\bar{a}_2} \cup \cdots \cup x_n^{\bar{a}_n}), \quad (\text{КНФ})$$

$$\partial e x^{\bar{a}} = \overline{x^a} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \neq a, \\ 0, & \text{якщо } x = a. \end{cases}$$

ДОВЕДЕННЯ. Функція $\bar{f} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } f = 0, \\ 0, & \text{якщо } f = 1 \end{cases}$ не є тотожно рівна нулю. За попередньою теоремою її можна записати в діз'юнктивній нормальній формі:

$$\bar{f} = \bigcup_{\substack{f(a_1, \dots, a_n) = 1, \\ (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

Звідси, використавши закон де Моргана, одержимо

$$f = \bar{\bar{f}} = \bigcap_{\substack{f(a_1, \dots, a_n) = 0, \\ (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n}} (x_1^{\bar{a}_1} \cup x_2^{\bar{a}_2} \cup \cdots \cup x_n^{\bar{a}_n}).$$

□

Одержані результати можна застосувати до формул числення висловлень. Нехай $A(P_1, \dots, P_n)$ — виконувана формула числення висловлень, побудована з пропозиційних змінних P_1, \dots, P_n , а f_A — відповідна їй функція істинності. Функція f_A є булевою функцією з бульової алгебри F_n , тому її можна записати в діз'юнктивній нормальній формі

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{f_A(a_1, \dots, a_n) = 1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

. Розглянемо формулу числення висловлень

$$A_1 = \bigvee_{f_A(a_1, \dots, a_n) = 1} (P_1^{a_1} \wedge P_2^{a_2} \wedge \cdots \wedge P_n^{a_n}),$$

де

$$P^a = \begin{cases} P, & \text{якщо } a = 1, \\ \neg P, & \text{якщо } a = 0. \end{cases}$$

Для функції істинності f_{A_1} формули A_1 при $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ маємо

$$\begin{aligned} f_{A_1}(b_1, \dots, b_n) &= \max_{f_A(a_1, \dots, a_n)=1} \{b_1^{a_1} \cdot \dots \cdot b_n^{a_n}\} = \\ &= \bigcup_{f_A(a_1, \dots, a_n)=1} (b_1^{a_1} \cdot \dots \cdot b_n^{a_n}) = f_A(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Це й означає, що $A \equiv A_1$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.19. Кажуть, що формула $A(P_1, \dots, P_n)$ має досконалу диз'юнктивну нормальну форму, якщо $A = \vee_i X_i$, де $X_i = P_1^{a_{1i}} \wedge P_2^{a_{2i}} \dots \wedge P_n^{a_{ni}}$, $a_{ji} \in \{0, 1\}$, $P_i^1 = P_i$, $P_i^0 = \neg P_i$.

Оскільки за попередньою теоремою кожна (не тотожно нульова) бульова функція, зокрема функція істинності виокнуваної формули числення висловлень, записується в диз'юнктивній нормальній формі, то маємо таку теорему.

ТЕОРЕМА 1.4.20. *Кожна формула числення висловлень A , яка не є суперечністю, еквівалентна формулі, що має досконалу диз'юнктивну нормальну форму:*

$$A(P_1, \dots, P_n) = \bigvee_{f_A(a_1, \dots, a_n)=1} (P_1^{a_1} \wedge P_2^{a_2} \wedge \dots \wedge P_n^{a_n}).$$

ТЕОРЕМА 1.4.21. *Кожна формула числення висловлень A , яка не є тавтологією, еквівалентна формулі, що має досконалу кон'-юнктивну нормальну форму:*

$$A(P_1, \dots, P_n) = \bigwedge_{f_A(a_1, \dots, a_n)=0} (P_1^{\bar{a}_1} \vee P_2^{\bar{a}_2} \vee \dots \vee P_n^{\bar{a}_n}).$$

ДОВЕДЕННЯ. Доведення залишаємо читачеві. □

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо формула $A(P_1, \dots, P_n)$ є тавтологією, то вона еквівалентна формулі $P_1 \vee \neg P_1$, а якщо $A(P_1, \dots, P_n)$ є суперечністю, то вона еквівалентна формулі $P_1 \wedge \neg P_1$,

Зауваження 2. З вигляду КНФ (ДНФ) легко встановити, чи є дана формула тотожно істинною (тотожно хибною). Нагадаємо також, що це завжди зробити, побудувавши відповідні таблиці істинності.

З попередніх двох теорем випливає практичний спосіб запису ДДНФ та ДКНФ, еквівалентної даній формулі. Для запису ДДНФ, еквівалентної даній формулі, потрібно побудувати таблицю істинності цієї формули, а потім кожному набору пропозиційних змінних, на яких відповідна функція істинності набуває значення 1, записати елементарні кон'юнкції. Аналогічно записується ДКНФ, але за наборами, на яких формула є хибною.

ПРИКЛАД 1.4.22. Запишемо в ДДНФ та ДКНФ формулу $A = (P_1 \rightarrow (\neg P_2 \rightarrow P_3)) \wedge P_2$. Побудуємо таблицю істинності для цієї формули.

| $(P_1$ | \rightarrow | $(\neg$ | P_2 | \rightarrow | $P_3))$ | \wedge | P_2 |
|--------|---------------|---------|-------|---------------|---------|----------|-------|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Тоді ДДНФ: $A \equiv (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$.

ДКНФ: $A \equiv (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3)$.

1.4.5. Повнота і замкненість систем бульових функцій. Нехай \mathcal{F} — об'єднання всіх множин F_n , $n = 1, 2, \dots$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.23. Система функцій $S \subset \mathcal{F}$ називається *повною*, якщо будь-яку функцію з \mathcal{F} можна записати у вигляді суперпозиції функцій системи S .

ПРИКЛАД 1.4.24. (1) Система \mathcal{F} повна.

- (2) Система $S = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2\}$ повна. Це випливає з теореми про диз'юнктивну нормальну форму.
- (3) Якщо до повної системи функцій долучити ще декілька функцій, то одержиться повна система функцій.
- (4) Система $\{0, 1\}$ не є повною. (Тут 0 і 1 — тотожні функції.)

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.25. *Нехай S_1 та S_2 — дві системи функцій, причому S_2 — повна. Якщо будь-яку функцію системи S_2 можна записати у вигляді суперпозиції функцій системи S_1 , то система S_1 повна.*

ДОВЕДЕННЯ. Доведення цього твердження очевидне. \square

Наведемо декілька прикладів застосування цього твердження.

ПРИКЛАД 1.4.26. (1) $S_1 = \{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$, $S_2 = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2\}$. Маємо $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$. Система S_2 повна, тому й система S_1 повна.

- (2) Повна система з одної функції штрих Шефера¹¹. Розглянемо систему функцій $S_1 = \{x_1|x_2\}$, яка складається

¹¹Генрі Шефер (Henry Maurice Sheffer) (1882–1964) — американський логік українського походження. Довів (1913), що булеву алгебру можна задати, використовуючи єдину операцію.

з єдиної функції $x_1|x_2 =_{df} \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, яка називається *штрих Шефера*. Всі інші булеві функції деякої функціонально повної системи виражуються через неї.

Маємо

$$\begin{aligned} x_1|x_1 &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 = \bar{x}_1, \\ (x_1|x_2)|(x_1|x_2) &= \overline{(x_1 \wedge x_2)}|(x_1 \wedge x_2) = \overline{\overline{(x_1 \wedge x_2)}} \wedge \overline{(x_1 \wedge x_2)} = \\ &= \overline{\overline{(x_1 \wedge x_2)}} \vee \overline{\overline{(x_1 \wedge x_2)}} = x_1 \wedge x_2. \end{aligned}$$

Оскільки система S_2 повна за попереднім прикладом, то й система S_1 повна.

- (3) Стрілка Пірса $\{\downarrow\}$, де $a \downarrow b = \overline{a \vee b}$, також утворює повну систему з одної функції.
- (4) Нехай $S_1 = \{0, 1, x_1 \wedge x_2, x_1 + x_2\}$, де

$$x_1 + x_2 = \begin{cases} 1, & x_1 \neq x_2 \\ 0, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

$S_2 = \{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$. Маємо $0 = x \wedge \bar{x}$, $1 = \bar{0} = \overline{x \wedge \bar{x}}$, $x_1 + x_2 = \overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \wedge x_2)}$, $\bar{x} = 1 + x$. Отже, система S_1 повна тоді й лише тоді, коли система S_2 повна.

Природнім є питання: чи є функціонально повною деяка множина функцій? У 1941 р. американський математик Еміль Пост сформулював і довів необхідну і достатню умову повноти множини функцій, відому як критерій Поста. Він формулюється в термінах передповних класів. Зацікавлений читач може ознайомитись з ним, наприклад у [62].

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.27. Нехай S — деяка підмножина множини функцій \mathcal{F} . Замиканням множини S називають множину всіх бульових функцій, які є суперпозиціями функцій з множини S .

Позначимо замикання множини S через \tilde{S} .

ПРИКЛАД 1.4.28. (1) Якщо $S = \mathcal{F}$, то й $\tilde{S} = \mathcal{F}$.

(2) Нехай $S = \{1, x_1 + x_2\}$. Замиканням цієї множини S є клас всіх лінійних функцій, тобто функцій, які мають вигляд

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \pmod{2},$$

де $c_i \in \{0, 1\}$.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.29. Замикання множини функцій S має такі властивості:

- (1) $\tilde{S} \supset S$;
- (2) $\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S}$;
- (3) $S_1 \subset S_2 \implies \tilde{S}_1 \subset \tilde{S}_2$;
- (4) $\widetilde{S_1 \cup S_2} \supset \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$.

ДОВЕДЕННЯ. Доведення цих властивостей залишаємо читачеві як вправу. \square

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.30. Множина S називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням \tilde{S} . Зазначимо, що множина S є повною, якщо $\tilde{S} = \mathcal{F}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Існує цілий розділ математичної логіки, який називають теорією булевих алгебр. Є чудові монографії, присвячені цій теорії, де можна ознайомитися з проблематикою сучасних досліджень булевих алгебр. Відсилаємо зацікавленого читача до праць [45], [60], [21]. Глибше з поняттями повноти, замкненості, незалежності та різними алгоритмічними теоріями можна познайомитися за книгами [62], [37].

1.5. Задачі і вправи до розділу 1

- (1) Скільки різних входжень має порожнє слово А в слово довжини n ?
- (2) Які з наведених виразів є висловленнями? Знайти значення істинності висловлень.
 - 1) Виходячи з кімнати, вимикайте світло.
 - 2) Число 357 кратне 7.
 - 3) Чи існує найменше просте число?
 - 4) Не існує найбільшого простого числа.
 - 5) $7 < 7$.
 - 6) Давайте підемо в кіно.
 - 7) Існують прямокутні трикутники.
 - 8) Число 777 кратне 7, але не кратне 11.
 - 9) Якщо $8 < 13$ і $13 < 7$, то $8 < 7$.
 - 10) Чотирикутник є прямокутником тоді і тільки тоді, коли його діагоналі рівні.
- (3) Записати у вигляді формул алгебри висловлень запропоновані твердження, позначаючи прості висловлення буквами, і визначити їх істинність чи хибність:
 - 1) Трикутник рівносторонній тоді і тільки тоді, коли він рівнобедрений.
 - 2) Фігура є квадратом тоді і тільки тоді, коли вона є рівностороннім чотирикутником, діагоналі якого взаємно перпендикулярні.
 - 3) Для того, щоб паралелограм був квадратом, необхідно, але не достатньо, щоб його діагоналі були рівні між собою.
 - 4) Число просте тільки тоді, коли воно непарне.

- 5) Симетричність відношення R є необхідною умовою того, щоб відношення R було відношенням еквівалентності.
- 6) Для того, щоб число було кратне 3, достатньо, але не необхідно, щоб воно було кратне 6.
- 7) Необхідно і достатньо умовою подільності числа на 6 є подільність його на 3 і на 2.
- 8) $x^2 - 7x + 10 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 2$ або $x = 5$.
- 9) Умова, що непорожня частково впорядкована множина X є скінченою, є достатньою, але не необхідною для того, щоб множина X містила мінімальний та максимальний елементи.
- 10) Щоб чотирикутник був ромбом, достатньо, щоб він був квадратом.
- (4) Записати твердження логіко математичною символікою і визначити їх істинність чи хибність:
- 1) Якщо 3219 кратне 111, то 3219 кратне 37, а якщо 3219 не кратне 37, то 3219 не кратне 111.
 - 2) Неправильно, що число 35 не кратне 21 тоді і тільки тоді, коли 35 не кратне 3 і не кратне 7.
 - 3) Неправильно, що принаймні одне з чисел 35, 57, 77 просте.
 - 4) $x^2 > 4$ тоді і тільки тоді, коли $x > 2$ або $x < -2$.
 - 5) $x^2 < 4$ тоді і тільки тоді, коли $x < 2$ або $x > -2$.
 - 6) Функція диференційовна в точці тільки тоді, коли вона неперервна в цій точці.
 - 7) ABCD — правильний чотирикутник, коли він є прямокутником.

- 8) Для того, щоб число було простим, необхідно, щоб воно було непарним.
- 9) Для того, щоб виконувалась рівність $a^0 = 1$, де a — дійсне число, необхідно і достатньо, щоб справджуvalася нерівність $a \neq 0$.
- 10) Для того, щоб справдjuvalася нерівність $a \geq 0$, достатньо, щоб виконувалась умова $a > 0$.

(5) Побудувати таблиці істинності для формул:

- 1) $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P)))$;
- 2) $(\neg(P \rightarrow \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (P \vee R))$;
- 3) $((P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow \neg P)$;
- 4) $((((P \wedge \neg Q) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$;
- 5) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$;
- 6) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow P) \vee Q))$;
- 7) $((P \rightarrow \neg(P \wedge Q)) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P))$;
- 8) $((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$;
- 9) $((\neg P \rightarrow (Q \leftrightarrow \neg R)) \wedge (P \vee (\neg Q \rightarrow R) \vee \neg Q))$;
- 10) $((P \rightarrow \neg(Q \wedge \neg P)) \vee (P \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)))$.

(6) Скільки рядків містить таблиця істинності формули, до якої входять n пропозиційних змінних?

(7) Скільки рядків містить таблиця істинності формули для формули алгебри висловлень Q ? Не складаючи таблиці істинності, визначити, на скількох наборах а) $t(Q) = 0$; б) $t(Q) = 1$.

- 1) $Q = (A \vee B \vee C) \rightarrow D$;
- 2) $Q = (A \wedge B \wedge C) \rightarrow D$;
- 3) $Q = A \rightarrow (B \vee C \vee D)$;
- 4) $Q = A \rightarrow (B \wedge C \wedge D)$;
- 5) $Q = A \rightarrow (B \wedge C \wedge D)$;

- 6) $Q = (A \vee B) \rightarrow (C \vee D);$
 7) $Q = (A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D);$
 8) $Q = (A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (D \vee E \vee \neg F);$
 9) $Q = (A \vee \neg B \vee \neg C) \rightarrow (D \wedge \neg E);$
 10) $Q = P \rightarrow (P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n).$
- (8) Скільки існує різних таблиць істинності для формули, що містить n пропозиційних змінних і набуває значення 1 тільки на k наборах ($k \leq 2^n$)?
- (9) З двох атомарних висловлень P і Q за допомогою двох логічних зв'язок
- \neg та \wedge
 - \neg та \vee
 - \neg та \rightarrow
- побудувати складне висловлення A , яке є істинним тоді і тільки тоді, коли
- обидва атомарні висловлення істинні;
 - P істинне, а Q хибне;
 - P хибне, а Q істинне;
 - обидва атомарні висловлення хибні.
- (10) З трьох атомарних висловлень P , Q і R побудувати складне висловлення A , яке є істинним тоді і тільки тоді, коли
- всі три атомарні висловлення істинні;
 - принаймні одне з висловлень P , Q і R істинне;
 - тільки одне з висловлень P , Q і R істинне;
 - всі три атомарні висловлення хибні;
 - висловлення P хибне, а Q або R істинні.
- (11) Довести тотожну істинність формул:
- $(P \vee \neg P);$

- 2) $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$;
- 3) $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q))$;
- 4) $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$;
- 5) $(\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q))$;
- 6) $(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$;
- 7) $((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$;
- 8) $(P \rightarrow (\neg P \vee Q))$;
- 9) $(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$;
- 10) $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$;
- 11) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$;
- 12) $((P \wedge Q) \rightarrow P)$;
- 13) $((P \wedge Q) \rightarrow Q)$;
- 14) $(P \rightarrow (P \vee Q))$;
- 15) $(Q \rightarrow (P \vee Q))$;
- 16) $(\neg \neg P \rightarrow P)$;
- 17) $(P \rightarrow \neg \neg P)$;
- 18) $((P \vee P) \rightarrow P)$;
- 19) $((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q))$;
- 20) $(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$;
- 21) $((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$;
- 22) $((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)))$;
- 23) $((P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)))$;
- 24) $((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$;
- 25) $((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P))$.

(12) Довести, що наступні формули є тавтологіями:

- 1) $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$;
- 2) $((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow Q))$;
- 3) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R)))$;
- 4) $\neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$;

- 5) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q);$
- 6) $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \vee (P \rightarrow S)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R \vee S));$
- 7) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow Q)) \rightarrow ((Q \wedge R \wedge \neg S) \rightarrow Q));$
- 8) $((((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow \neg P)) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R));$
- 9) $(((\neg P \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow (P \rightarrow R)));$
- 10) $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (Q \rightarrow P));$
- 11) $(P \vee ((\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)));$
- 12) $\neg(P \wedge (\neg P \wedge Q));$
- 13) $(P \rightarrow ((\neg Q \wedge Q) \rightarrow R));$
- 14) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \vee Q));$
- 15) $((P \vee Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)) \rightarrow (\neg P \vee Q));$
- 16) $((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q));$
- 17) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R));$
- 18) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S));$
- 19) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R));$
- 20) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R)));$
- 21) $((P \vee Q \vee R) \rightarrow (\neg P \rightarrow ((P \vee R) \wedge \neg P)));$
- 22) $((\neg(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \wedge \neg Q));$
- 23) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \wedge S) \rightarrow (Q \vee R));$
- 24) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow P));$
- 25) $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow P));$
- 30) $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)).$

(13) Методом відшукання контрприкладу встановити, що наступні формули алгебри висловлень є тавтологіями:

- 1) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee D);$
- 2) $A \vee B \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \rightarrow C \vee D);$
- 3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$
- 4) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow (B \rightarrow C)));$
- 5) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (D \rightarrow C)));$

- 6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B \rightarrow B);$
- 7) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C));$
- 8) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A;$
- 9) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B);$
- 10) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))).$

(14) Перевірити, що такі формули алгебри висловлень є суперечностями:

- 1) $\neg B \wedge A \wedge (A \rightarrow B);$
- 2) $A \vee B \leftrightarrow \neg A \wedge (B \rightarrow \neg B);$
- 3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge (A \rightarrow B) \wedge A \wedge \neg C.$

(15) Довести, що такі формули алгебри висловлень не є суперечностями:

- 1) $\neg(P \rightarrow \neg P);$
- 2) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P));$
- 3) $((Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \rightarrow Q)).$

(16) Довести, що відношення еквівалентності формул є рефлексивним, симетричним і транзитивним, тобто відношенням еквівалентності на множині висловлень.

(17) Довести такі еквівалентності, користуючись властивостями та законами алгебри логіки.

- 1) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B);$
- 2) $A \leftrightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg A \wedge B);$
- 3) $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B;$
- 4) $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B);$
- 5) $\neg A \equiv A \rightarrow \neg A;$
- 6) $A \vee B \vee C \vee D \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \rightarrow D;$
- 7) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv (A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B;$
- 8) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv ((A \vee B) \rightarrow C);$
- 9) $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \equiv ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B));$

- 10) $((A \vee B) \rightarrow \neg B) \equiv \neg B;$
- 11) $((A \leftrightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee B)) \equiv (A \wedge B);$
- 12) $((A \rightarrow B) \wedge A \wedge B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge A);$
- 13) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \equiv (\neg A \vee V \vee C);$
- 14) $((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C);$
- 15) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B)) \equiv ((C \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow B)).$

(18) Застосовуючи закони де Моргана, замінити твердження логічно еквівалентними:

- 1) Неправильно, що 247 кратне 17 і кратне 13;
- 2) Неправильно, що 7 або 11 є дільником числа 782;
- 3) Неправильно, що 0 або 1 є коренем рівняння $x^5 - 3x + 1 = 0$;
- 4) Неправильно, що $\triangle ABC$ є рівнобедренний прямокутний трикутник;
- 5) Знаючи означення рівності двох комплексних чисел, сформулювати умову нерівності двох комплексних чисел, використавши закон де Моргана.

(19) Використовуючи закон контрапозиції, замінити твердження логічно еквівалентними:

- 1) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку;
- 2) Якщо число n кратне 3 і кратне 5, то n кратне 15;
- 3) Якщо добуток двох чисел a і b дорівнює 0, то хоч одне з цих чисел a або b дорівнює 0;
- 4) Якщо $a^b = 1$, то $b = 0$ і $a \neq 0$, або $a = 1$ (a, b – дійсні числа);

5) Якщо добуток двох цілих чисел m , n є непарним числом, то m і n — непарні числа.

(20) Замінити твердження логічно еквівалентними:

- 1) Якщо функція f — диференційовна в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці;
- 2) Якщо число a ділиться на 9 і ділиться на 3, то воно ділиться на 36;
- 3) Якщо $x(x - 1) = 0$, то $x = 0$ або $x = 1$;
- 4) Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонна і обмежена, то вона збіжна;
- 5) $\ln x = 0$ або $x \neq 1$.

(21) Перетворити формулу алгебри висловлень в рівносильну, звівши число логічних операцій у даних формулах до n .

- 1) $(\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \wedge B)) \vee B$ ($n = 1$);
- 2) $(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C) \vee B$ ($n = 1$);
- 3) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ ($n = 1$);
- 4) $(\neg(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B \wedge \neg C)) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$ ($n = 2$);
- 5) $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ ($n = 1$);
- 6) $((A \rightarrow B) \wedge (A \vee (B \wedge C)) \wedge (A \rightarrow C)) \vee \neg C$ ($n = 1$);
- 7) $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(C \rightarrow B) \vee B$ ($n = 2$);
- 8) $((A \vee B) \wedge (B \rightarrow A)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)$ ($n = 1$);
- 9) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B)$ ($n = 1$);
- 10) $(A \vee (B \rightarrow C)) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee C \vee D)$ ($n = 1$);
- 11) $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ ($n = 2$);
- 12) $(\neg(B \vee C) \rightarrow (B \wedge C \wedge D)) \vee (\neg B \wedge D)$ ($n = 2$);
- 13) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \rightarrow B) \vee A \vee (B \wedge \neg C)$ ($n = 1$);
- 14) $\neg(C \rightarrow \neg B) \vee (\neg B \wedge A) \vee ((B \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$ ($n = 1$);

- 15) $(A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$ ($n = 2$);
 16) $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(C \rightarrow B) \vee \neg B$ ($n = 1$);
 17) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \rightarrow C) \vee A \vee (\neg B \wedge C)$ ($k = 1$);
 18) $(\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \wedge B)) \vee B$ ($k = 1$);
 19) $((A \vee B) \wedge (B \rightarrow A)) \vee \neg(A \rightarrow C)$ ($n = 0$);
 20) $\neg(C \rightarrow \neg B) \vee (\neg B \wedge A) \vee (B \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$ ($n = 1$).
 (22) Визначити число всіх різних бульових функцій:
 1) від одного аргументу;
 2) від двох аргументів;
 3) від n аргументів,
 причому входження фіктивних змінних допускається.
 (23) Визначити число всіх різних бульових функцій:
 1) від одного аргументу;
 2) від двох аргументів,
 при умові, що жодний з аргументів не входить фіктивно.
 (24) Довести, що наступні системи бульових функцій є повними:
 1) $\{\vee, \wedge, \neg\};$
 2) $\{\vee, \neg\};$
 3) $\{\wedge, \neg\};$
 4) $\{\neg, \rightarrow\},$ де $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b;$
 5) $\{| \},$ де $a | b = \overline{a \wedge b};$
 6) $\{\downarrow\},$ де $a \downarrow b = \overline{a \vee b};$
 7) $\{0, \rightarrow\},$ де $0(a) = 0 \quad \forall a \in \{0, 1\};$
 8) $\{\rightarrow, \leftrightarrow\},$ де $a \leftrightarrow b = \overline{(b \rightarrow a)};$
 9) $\{\equiv, \vee, 0\},$ де $a \equiv b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a);$
 10) $\{0, 1, [,]\},$ де $1(a) = a \quad \forall a \in \{0, 1\}, [a, b, c] = (b \wedge a) \vee (\bar{b} \wedge c).$

(25) Довести, що такі системи бульових функцій є неповними:

- 1) $\{-\}$;
- 2) $\{\wedge, \rightarrow\}$;
- 3) $\{\rightarrow\}$;
- 4) $\{\vee, \rightarrow\}$;
- 5) $\{\vee\}$;
- 6) $\{\wedge\}$;
- 7) $\{\wedge, \vee\}$;
- 8) $\{\equiv\}$;

$$9) \{\equiv, +\}, \text{де } a, b \in \{0, 1\}, a + b = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \neq b, \\ 0, & \text{якщо } a = b. \end{cases}$$

(26) Система функцій S називається *незалежною*, якщо жодна функція $f \in S$ не може бути подана як суперпозиція функцій з $S \setminus \{f\}$. Довести, що такі системи функцій є незалежними:

- 1) $\{-, \equiv\}$;
- 2) $\{-, +\}$
- 3) $\{\equiv, +\}$
- 4) $\{\equiv, \vee\}$
- 5) $\{\rightarrow, \neg\}$;
- 6) $\{\equiv, \wedge, 0\}$;
- 7) $\{0, 1, [, ,]\}$.

(27) Показати, що замикання множини функцій S має такі властивості:

- 1) $\tilde{S} \supset S$;
- 2) $\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S}$;
- 3) $S_1 \subset S_2 \implies \tilde{S}_1 \subset \tilde{S}_2$;
- 4) $\widetilde{S_1 \cup S_2} \supset \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$.

- (28) Двести, що кожна формула числення висловлень, яка не є тавтологією, еквівалентна формулі, що має досконалу кон'юнктивну нормальну форму.
- (29) Довести, що для довільних елементів a і b бульової алгебри B вірні такі твердження:
- 1) $a \leq b \iff \bar{b} \leq \bar{a}$;
 - 2) $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$;
 - 3) $a \leq b \iff a \setminus b = 0$, де $a \setminus b = a \cdot \bar{b}$.

Розділ 2

ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

У цьому розділі ми ознайомимося з прийомами формалізації математичної теорії на прикладі числення висловлень. При формалізації тої чи іншої теорії повністю абстрагуються від її змісту. При цьому мова є набором текстів, написаних спеціально розробленою мовою з використанням певних правил написання текстів. Кожна мова починається з алфавіту. Деякі слова, тобто скінченні послідовності букв алфавіту, називаються формулами теорії, а певного типу речення (послідовності слів) — секвенціями, аксіомами та теоремами формальної теорії. Послідовності секвенцій, тобто речень певного виду, називають доведеннями.

Формалізація числення висловлень дає нам один з найпростіших прикладів формальної математичної теорії.

2.1. Мова числення висловлень

2.1.1. Алфавіт, формули, секвенції. Нагадаємо, що будь-яке числення складається з мови, аксіом та правил виведення. Мова, у свою чергу, складається з алфавіту, слів та речень. Розглянемо тепер формальну конструкцію числення висловлень.

Означення 2.1.1. *Алфавіт числення висловлень* складається з трьох груп символів:

- (1) *пропозиційні змінні*: букви латинського алфавіту p, q, r, s, \dots можливо з індексами $p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, r_2, \dots$;

- (2) логічні зв'язки: \neg — заперечення, \wedge — кон'юнкція, \vee — диз'юнкція, \rightarrow — імплікація, \leftrightarrow — еквіваленція;
- (3) допоміжні символи: “(” — ліва дужка, “)” — права дужка, “,” — кома та символ вивідності “ \vdash ”.

Таким чином алфавіт числення висловлень можна записати як множину:

$$\{p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, r_2, \dots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), , \vdash\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 4. Тут символи логічних зв'язок \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow розглядаються як букви алфавіту, а не логічні операції, що їм відповідають.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.2. *Слово* в алфавіті числення висловлень — це довільна скінчenna (можливо порожня) послідовність букв алфавіту числення висловлень. Слово β називається *підсловом* слова α , якщо $\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2$ для деяких слів α_1, α_2 числення висловлень. *Речення* числення висловлень — це скінчenna послідовність слів, між якими є однобуквенні пропуски.

Всі слова в цьому алфавіті утворюють множину, яку позначаємо через $E(\text{ЧВ})$. Надалі $E(\text{ЧВ})$ — множина всіх слів (виразів) в алфавіті числення висловлень. У цій штучній мові — мові числення висловлень — нас цікавитимуть правильно побудовані слова і речення. Такими правильно побудованими виразами є *формули* та *секвенції*.

Для позначення вже побудованих формул числення висловлень використовуватимемо букви грецького алфавіту, наприклад ϕ, ψ . Вони є символами *метамови* (мови, на якій доводяться твердження про це числення), і не входять до алфавіту числення висловлень.

Деякі поняття числення висловлень, зокрема формули, строго визначаються індуктивним шляхом. Перший пункт такого означення є базою індукції (в ньому безпосередньо вказується, які комбінації символів слід вважати формулами), а інші — кроком індукції (правила побудови) — правила, за якими будуються інші формули. Якщо вже побудовані деякі формули, то з них за цими правилами можна побудувати інші формули.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.3. Слово в алфавіті числення висловлень називається *формулою* цього числення, якщо воно задовільняє наступні вимоги:

1. кожна пропозиційна змінна (буква) є формулою (її називають *атомарною формулою*);
2. якщо ϕ, ψ — формули, то слова

$$\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$$

також є формулами;

3. Слово в алфавіті числення висловлень є формулою числення висловлень тоді і тільки тоді, коли це випливає з пунктів 1 і 2 .

Зрозуміло, що формулами є лише ті слова, які можна побудувати з пропозиційних змінних, застосувавши до них скінченне число символів логічних зв'язок. Множину всіх формул числення висловлень позначимо через $F(\text{ЧВ})$. Зауважимо, що символ вивідності “ \vdash ” не бере участі у побудові формул.

ПРИКЛАД 2.1.4. Нижченаведені слова є формулами числення висловлень:

- (1) $((\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B))$;
- (2) $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

- (3) $((P_1 \vee P_2) \rightarrow (P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_3))).$
- (4) Слово $\neg(P_1 \vee P_2) \vee (P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_3))$ не є формулою числення висловлень, бо відсутні зовнішні дужки.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.5. Підформулою формулі ϕ називають будь-яке підслово слова ϕ , яке саме є формулою.

ПРИКЛАД 2.1.6. Формула $((P_0 \rightarrow P_1) \wedge (\neg P_1 \rightarrow P_2)) \leftrightarrow (\neg P_0 \vee P_2)$ містить такі підформули: P_0 , P_1 , $\neg P_1$, $(P_0 \rightarrow P_1)$, P_2 , $(P_1 \rightarrow P_2)$, $((P_0 \rightarrow P_1) \wedge (P_1 \rightarrow P_2))$, $\neg P_0$, $(\neg P_0 \vee P_2)$, $((P_0 \rightarrow P_1) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)) \leftrightarrow (\neg P_0 \vee P_2)$.

За допомогою символу вивідності “ \vdash ” з формул числення висловлень утворити нові слова — *секвенції*. Позначимо через Γ довільну, але фіксовану в межах контексту, множину формул числення висловлень (гіпотез). Наприклад, $\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ — скінчена множина формул числення висловлень. Сформулюємо тепер строгое означення секвенції і пояснимо, як секвенції читаються.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.7. Нехай Γ — скінчена множина. *Секвенцією числення висловлень* називаються слово в алфавіті числення висловлень одного з таких чотирьох типів:

1. $\Gamma \vdash \phi$ (“з множини формул Γ виводиться ϕ ”);
2. $\vdash \phi$ (“ ϕ вивідна (теорема)”);
3. $\Gamma \vdash$ (“множина формул Γ суперечлива”);
4. \vdash (“суперечність”).

Секвенцію першого типу можна записати так:

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi.$$

Вона читається: “з формул $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ виводиться формула ψ ”. Формули, які стоять перед символом вивідності, називаються *посиланнями* секвенції, а ті, що після нього, — *висновками* секвенції.

Якщо формули числення висловлень можна розглядати як формальні записи складних висловлень природної мови, наприклад української, то секвенції можна вважати елементами (кроками) формалізації доведень теорем чи інших тверджень природної мови. В них можна виділити умову, припущення (посилання секвенції), а також висновок. І якщо символ вивідності розуміти як знак (логічного) слідування, то секвенція $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ може виражати твердження “ з істинності гіпотез $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ логічно випливає висловлення ψ ”, а секвенція $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash$ означатиме суперечливість припушень $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

Нагадаємо, що у цьому записі символи $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \psi$ позначають деякі формули і не входять до алфавіту числення висловлень. Тому вираз $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ є лише *схемою секвенції*. Коли в цю схему замість кожного з символів $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \psi$ вписати деяку конкретну формулу числення висловлень, одержимо *частковий випадок* схеми секвенції. Точно так само в означенні 2.1.3 формули ЧВ ми формально записували схеми формул, використовуючи змінні метамови (метазмінні) для позначення раніше побудованих формул. *Схема формул* — це вираз метамови, який позначає нескінченну множину всіх тих формул числення висловлень, які можна з нього отримати після заміни метазмінних цієї схеми конкретними формулами цього числення.

ПРИКЛАД 2.1.8. (1) $\Gamma, \phi \vdash \psi$ є схемою секвенції, а слово $P_0 \vee \neg P_0, \neg P_1, P_0 \wedge P_1, \neg(P_1 \leftrightarrow P_2) \vdash (P_1 \wedge \neg P_2) \rightarrow (P_2 \wedge \neg(P_3 \vee \neg P_0))$ є частковим випадком цієї схеми.

- (2) Слово $((P_0 \leftrightarrow \neg P_1) \rightarrow \neg P_2) \vee P_1$ є частковим випадком схеми формули $(\phi \rightarrow \psi) \vee \chi$.

Використання схем поширюється і на аксіоми та правила виведення числення.

2.1.2. Аксіоми і правила виведення числення висловлень. Числення висловлень має свої аксіоми та правила виведення. Для того, щоб можна було дати означення аксіом і правил виведення в будь-якому численні, до алфавіту цього числення додають символ вивідності “ \vdash ”. Тоді, наприклад, слово $\phi \vdash \psi$ у збагаченому алфавіті буде правильно побудованим і буде належати до множини секвенцій.

Аксіоми числення висловлень є частковими випадками секвенцій. Аксіом в численні може бути скінченне або нескінченне число, тому їх зручно записувати за допомогою схем.

У численні висловлень є лише одна *схема аксіом*: $\phi \vdash \phi$. Конкретні аксіоми числення висловлень — це часткові випадки цієї схеми, і лише вони.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.9. *Схемою аксіом* числення висловлень називають схему секвенцій вигляду

$$\phi \vdash \phi.$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.10. *Аксіомою* називається слово, що одержується з схеми аксіом підстановкою замість символу ϕ конкретної формули.

ПРИКЛАД 2.1.11. Одна з конкретних аксіом числення висловлень має такий вигляд: $P \vee Q \vdash P \vee Q$.

Отже, ми будуємо числення висловлень з нескінченною множиною аксіом, які задаються одною схемою аксіом.

Позначимо через $S = S(I)$ множину всіх секвенцій деякого числення I .

Означення 2.1.12. n -арним правилом виведення числення I називається часткова функція $S^n \rightarrow S$ від n змінних, аргументи якої набувають значення на множині $S(I)$, і значення функції також належать множині $S(I)$.

Отже, n -арне правило виведення деяким наборам з n секвенцій числення I ставить у відповідність нову секвенцію. Зауважимо, що таких функцій є багато. Тут ми розглянемо числення висловлень з однією схемою аксіом і цілим списком правил виведення.

В численні висловлень є 12 основних правил виведення, кожне з яких має свою назву.

Правила виведення числення висловлень

1. Правило введення кон'юнкції¹:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\phi \wedge \psi)}.$$

2. Правило усунення кон'юнкції справа:

$$\frac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \phi}.$$

3. Правило усунення кон'юнкції зліва:

$$\frac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}.$$

4. Правило введення диз'юнкції справа:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash (\phi \vee \psi)}.$$

¹Читається так: “якщо з множини формул Γ виводиться формула ϕ і з множини формул Γ виводиться формула ψ , то з множини формул Γ виводиться формула $(\phi \wedge \psi)$.”

5. Правило введення диз'юнкції зліва:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \phi)}.$$

6. Правило розбору випадків (усунення диз'юнкції):

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \psi; \quad \Gamma_2, \chi \vdash \psi; \quad \Gamma_3 \vdash (\phi \vee \chi)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \vdash \psi}.$$

7. Правило введення імплікації (дедукції Ербрана²):

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)}.$$

8. Modus ponens (MP) (правило усунення імплікації):

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \quad \Gamma_2 \vdash (\phi \rightarrow \psi)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}.$$

9. Правило міркування від супротивного (усунення заперечення):

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash}{\Gamma \vdash \phi}.$$

10. Правило виявлення суперечності:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \quad \Gamma_2 \vdash \neg\phi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}.$$

11. Правило перестановки посилань:

$$\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \chi}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \chi}.$$

12. Правило введення додаткових посилань (розширення):

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}.$$

²Жак Ербран (Jacques Herbrand) (1908–1931) — французький математик.

Правила виведення дозволяють з однієї або кількох секвенцій отримати (вивести) нову секвенцію. Зауважимо, що кожне з цих правил зображає нескінченну множину конкретних правил виведення, які мають однакову синтаксичну структуру. Тобто, якщо в правилах виведення замість $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ взяти конкретні послідовності формул числення висловлень, а замість ϕ, ψ, χ — конкретні формули, то отримуємо *часткові випадки*, або *застосування*, правил виведення.

ПРИКЛАД 2.1.13. Розглянемо приклад міркування в природній мові за правилом modus ponens: “Якщо сьогодні понеділок, то студент піде на пари. Сьогодні понеділок. Отже, студент піде на пари.” Розглянемо атомарні висловлювання A — “сьогодні понеділок”, B — “студент піде на пари”. Тоді міркування формально запишеться так:

$$\frac{\vdash (A \rightarrow B); \vdash A}{\vdash B}.$$

Воно є частковим випадком правила виведення modus ponens.

Зауважимо, що те саме міркування можна було б записати у вигляді секвенції $(A \rightarrow B), A \vdash B$ або формули $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$.

Як бачимо, правила виведення формалізують деякі найпростіші правильні міркування, що дозволяють робити логічні висновки на підставі раніше відомих суджень, тобто переходити від одних істинних тверджень (теорем) до інших істинних тверджень (теорем).

Зауважимо, проте, що правильність міркувань сама по собі не гарантує правильності (істинності) висновку. Висновок є істинним тоді і тільки тоді, коли всі вихідні твердження є істинними. Але поняття істинності виходить за межі синтаксису числення.

ПРИКЛАД 2.1.14. Міркування “Якщо кіт має хвіст, то він має вуха. Якщо кіт має шерсть, то він має вуха. Кіт має хвіст або має шерсть. Отже, він має вуха.” є прикладом правильного застосування правила розбору випадків, але дає хибні за змістом висновки, оскільки посилення є хибними. Розглянемо атомарні висловлювання A — “кіт має хвіст”, B — “кіт має шерсть”, C — “кіт має вуха”. Тоді міркування формально запишеться так:

$$\frac{A \vdash C; \quad B \vdash C; \quad \vdash A \vee B}{\vdash C}.$$

Отже, числення висловлень, яке надалі позначатимемо ЧВ, визначається мовою, схемою аксіом $\phi \vdash \phi$ та правилами виведення 1–12.

Система числення висловлень, яку ми тут подаємо, є досить розповсюдженою; зацікавлений читач може в цьому переконатись, ознайомившись з підручниками [24], [43], [31] зі списку рекомендованої літератури.

2.1.3. Формальні доведення в численні висловлень.

Аксіоми числення висловлень разом з правилами виведення повністю визначають поняття вивідних формул і секвенцій ЧВ, або теорем.

У численні висловлень розглядають два типи доведень: лінійні доведення та доведення у вигляді дерева.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.15. *Лінійним доведенням* у численні висловлень називається скінчнена послідовність секвенцій ЧВ, у якій кожна секвенція є або аксіомою, або отримується з попередніх секвенцій за одним з правил виведення 1 — 12.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.16. Кількість секвенцій у лінійному доведенні називається *довжиною доведення*.

ПРИКЛАД 2.1.17. Послідовність секвенцій

$$\phi \vdash \phi; \phi, \psi \vdash \phi; \psi \vdash \psi; \psi, \phi \vdash \psi; \phi, \psi \vdash \psi; \phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi;$$

$$\phi \vdash \psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$$

є лінійним доведенням секвенції $\phi \vdash \psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$. Ця послідовність також є прикладом лінійного доведення кожної попередньої секвенції.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.18. Поняття *дерева* у ЧВ вводять індуктивно:

- (1) Кожна секвенція S є деревом.
- (2) Якщо D_1, \dots, D_n — дерева, і S — секвенція, то вираз

$$\frac{D_1, \dots, D_n}{S}$$

— дерево.

- (3) Вираз є деревом тоді й лише тоді, коли він одержується за правилами (1) і (2).

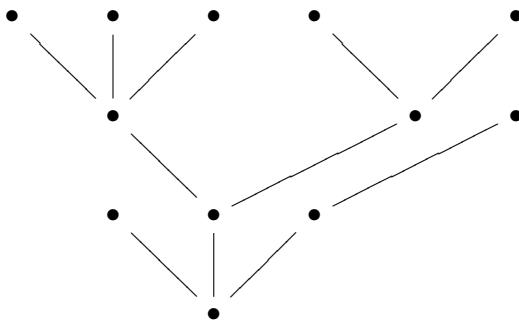
ОЗНАЧЕННЯ 2.1.19. Секвенції, над якими немає горизонтальної риски, називають *початковими*; секвенцію, під якою немає риски, називають *заключчю*; частину дерева, яка складається з риски і секвенцій безпосередньо над рискою та під рискою, називають *переходом*.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.20. *Деревом доведення* у ЧВ називається дерево, вершинами якого є секвенції, дві вершини s і t з'єднані ребром, якщо t отримується за допомогою деякого правила виведення $\frac{\dots, s, \dots}{t}$, а початкові секвенції у дереві є аксіомами.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.21. Кажуть, що секвенція S виводиться з секвенцій $S_1 \dots S_n$ за допомогою доведення у вигляді дерева, якщо існує дерево доведення ЧВ, в якому S_1, \dots, S_n є вершинами, а S — заключна секвенція дерева.

ЗАУВАЖЕННЯ 5. (1) Одна і та сама секвенція може входити в дерево кілька разів.

- (2) Дерево може мати багато початкових секвенцій.
- (3) Дерево має єдину заключну секвенцію.
- (4) Дерево, що є доведенням у вигляді дерева, можна розглядати як граф, наприклад:



ПРИКЛАД 2.1.22. Побудуємо доведення у вигляді дерева для схеми секвенцій $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Розглянемо аксіоми $\varphi \vdash \varphi$ і $\psi \vdash \psi$. Введемо додаткові посилання ψ і ϕ за правилом 12 і скористаємося правилом перестановки посилань 11:

$$\frac{\phi \vdash \phi}{\phi, \psi \vdash \phi} \quad (12) \quad \text{і} \quad \frac{\psi \vdash \psi}{\psi, \varphi \vdash \psi} \quad (12) \quad \frac{\psi, \varphi \vdash \psi}{\phi, \psi \vdash \psi} \quad (11).$$

Звідси на основі правила 1 отримуємо: $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$.

Отже, дерево доведення цієї схеми секвенцій має вигляд:

$$\frac{\frac{\phi \vdash \phi}{\phi, \psi \vdash \phi} \quad \frac{\psi \vdash \psi}{\psi, \varphi \vdash \psi}}{\phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi)}.$$

Означення 2.1.23. Кажуть, що секвенція S *вивідна*, якщо вона виводиться тільки з аксіом. Вивідні секвенції називають також *теоремами*.

ТЕОРЕМА 2.1.24. *Секвенція має лінійне доведення тоді і тільки тоді, коли вона має доведення у вигляді дерева.*

ДОВЕДЕННЯ. (\Rightarrow) Припустимо, що секвенція S має лінійне доведення в ЧВ, тоді існує скінчена послідовність секвенцій ЧВ, причому всі секвенції S_1, \dots, S_n є або аксіомами, або отримуються з попередніх за правилами виведення. Всі аксіоми, які йдуть до першої, яка не є аксіомою, записуємо зверху. Переглядаємо наступну: якщо вона аксіома, записуємо зверху, якщо виводиться — знизу і т.д. Оскільки секвенції є скінчені кількістю, ми отримуємо дерево доведення секвенції S , знаючи лінійне доведення. Звідси випливає, що S має доведення у вигляді дерева.

(\Leftarrow) Нехай S має доведення у вигляді дерева. Виписуємо всі секвенції з верхнього поверху підряд, потім — всі секвенції, які на нижчому поверсі, і т.д. Оскільки поверхів скінчена кількість, секвенції буде скінчена кількість. \square

ПРИКЛАД 2.1.25. Лінійне доведення схеми секвенцій $\phi \vdash \psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$ можна записати як доведення у вигляді дерева:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\psi \vdash \psi}{\phi \vdash \phi}}{\phi, \psi \vdash \phi} \quad \frac{\psi, \phi \vdash \psi}{\phi, \psi \vdash \psi}}{\phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi)}}{\phi \vdash \psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)}.$$

Означення 2.1.26. Секвенції, які мають доведення, називають ще *теоремами* (або *вивідними секвенціями*).

Означення 2.1.27. Формулу ϕ ЧВ називають *теоремою* (або *вивідною*), якщо секвенція $\vdash \phi$ є вивідною.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.28. Правило виведення у ЧВ називається *допустимим*, якщо його приєднання до списку правил виведення 1 — 12 не збільшує множину вивідних секвенцій, отриманих за правилами 1 — 12 і цього додаткового правила.

ТВЕРДЖЕННЯ 2.1.29. *Наведені нижче правила виведення є допустимими в численні висловлень:*

- а) *перестановка посилань не впливає на суперечність секвенцій:*

$$\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash};$$

- б) *долучення додаткових посилань не впливає на суперечність секвенцій*

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \psi \vdash};$$

- в) *з суперечливої множини формул можна вивести будь-яку формулу:*

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \phi};$$

- г) *правило виведення заперечення:*

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg \phi};$$

- д) *правило добутку виведень:*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \psi; \quad \Gamma_2, \psi \vdash \chi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \chi};$$

- е) *розширене правило введення додаткових посилань, яке дозволяє долучати до посилань довільну скінченну множину формул:*

$$\frac{\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi}{\chi_1, \dots, \chi_m \vdash \phi}$$

якщо $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$;

$$\text{ж)} \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi}{\Gamma \vdash};$$

$$3) \quad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash}.$$

ДОВЕДЕННЯ. а) Секвенція $\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash$ може бути отримана лише з секвенцій $\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \phi_0$ і $\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \neg\phi_0$. Тому розглянемо таке дерево

$$\frac{\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \phi_0 \quad \Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \neg\phi_0}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \phi_0} \quad (11) \quad \frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \neg\phi_0}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \neg\phi_0} \quad (11)}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash} \quad (10). \quad (a)$$

Початкові секвенції цього дерева є теоремами. Отже можна додати зверху до дерева (a) дерева, що є доведеннями його початкових секвенцій. В результаті отримаємо доведення секвенції $\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash$.

б) Використовуючи такі ж міркування як у доведенні а), розглянемо дерево

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \phi_0 \quad \Gamma \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \psi \vdash \phi_0} \quad (12) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \psi \vdash \neg\phi_0} \quad (12)}{\Gamma, \psi \vdash}. \quad (10)$$

в) Розглянемо дерево

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \phi_0 \quad \Gamma \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \neg\psi \vdash \phi_0} \quad (12) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\phi_0} \quad (12)}{\frac{\Gamma, \neg\psi \vdash}{\Gamma \vdash \psi}}. \quad (10)$$

г) Використовуючи такі ж міркування як у доведенні а), розглянемо дерева

$$D_1 = \frac{\frac{\Gamma, \phi \vdash \phi_0 \quad \Gamma, \phi, \neg\phi \vdash \phi_0}{\Gamma, \neg\phi, \phi \vdash \phi_0} \quad (12) \quad \frac{\Gamma, \neg\phi, \phi \vdash \phi_0}{\Gamma, \neg\phi \vdash \phi \rightarrow \phi_0} \quad (11)}{\Gamma, \neg\phi \vdash \phi \rightarrow \phi_0}, \quad (7)$$

$$D_2 = \frac{\frac{\neg\phi \vdash \neg\phi \quad \neg\phi \vdash \neg\phi}{\Gamma, \neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\phi} \quad (12) \quad \frac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\Gamma, \neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\neg\phi}}{\frac{\Gamma, \neg\phi, \neg\phi \vdash}{\Gamma, \neg\phi \vdash \phi}}, \quad (9)$$

$$D_3 = \frac{\frac{\Gamma, \phi \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \phi, \neg\neg\phi \vdash \neg\phi_0} \text{ (12)}}{\frac{\Gamma, \neg\neg\phi, \phi \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \neg\neg\phi \vdash \phi \rightarrow \neg\phi_0}} \text{ (11)} \text{ (7)}$$

$$\frac{D_1 \quad D_2 \quad D_3}{\frac{\Gamma, \neg\neg\phi \vdash \phi_0 \quad \frac{\Gamma, \neg\neg\phi \vdash \neg\phi_0}{\Gamma, \neg\neg\phi \vdash \neg\phi_0} \text{ (10)}}{\frac{\Gamma, \neg\neg\phi \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \neg\phi}} \text{ (9)}} \text{ (8)}$$

д) Доведемо правило добутку виведень:

$$\frac{\frac{\Gamma_1 \vdash \psi \quad \frac{\Gamma_2, \psi \vdash \chi}{\Gamma_1, \Gamma_2, \psi \vdash \chi} \text{ (12)}}{\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \chi}} \text{ (7)}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \chi} \text{ (8)}$$

Решту допустимих правил виведення пропонуємо читачеві довести самостійно. \square

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.30. Послідовності секвенцій, в яких кожна з секвенцій є або аксіомою, або ж отримується з попередніх за одним з основних або допустимих правил виведення називається *лінійним квазідоведенням*.

Квазідоведення у вигляді дерева визначаються аналогічно. Очевидно, що кожна секвенція, для якої існує квазідоведення, є відною, тобто для неї існує і справжнє доведення.

ПРИКЛАД 2.1.31. Побудуємо квазідоведення схеми секвенцій $\phi \vdash \neg\neg\phi$.

$$\frac{\phi, \neg\phi \vdash \bot}{\phi \vdash \neg\neg\phi} \text{ (r)}$$

Розглянемо ще кілька прикладів формальних доведень.

ПРИКЛАД 2.1.32. Закон виключеного третього: $\phi \vee \neg\phi$.

Побудуємо формальне лінійне доведення секвенції $\vdash \phi \vee \neg\phi$:

1. $\neg\phi \vdash \neg\phi$ аксіома
2. $\neg\phi \vdash \phi \vee \neg\phi$ правило 5 до 1
3. $\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)$ аксіома
4. $\neg\phi, \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)$ 11 і 12 до 3
5. $\neg\phi, \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi$ 12 до 2
6. $\neg\phi, \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash$ 10 до 4 і 5
7. $\neg(\phi \vee \neg\phi), \neg\phi \vdash$ 11 до 6
8. $\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi$ 9 до 7
9. $\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi$ 4 до 8
10. $\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash$ 10 до 3 і 9
11. $\vdash \phi \vee \neg\phi$ 9 до 10

ПРИКЛАД 2.1.33. Побудуємо формальне лінійне доведення схеми секвенції $\vdash ((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)$:

1. $\phi \vdash \phi$ аксіома
2. $\phi \vee \phi \vdash \phi \vee \phi$ аксіома
3. $\phi, \phi \vee \phi \vdash \phi$ застосування правила 12 до 1
4. $\phi \vee \phi, \phi \vdash \phi$ 11 до 3
5. $\phi \vee \phi \vdash \phi$ 6 до 4, 4, 2
6. $\vdash ((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)$ 7 до 5

2.2. Нормальні форми формул ЧВ

У цьому підрозділі вивчатимуться деякі спеціальні форми формул ЧВ, які мають достатньо “простий” вигляд для розв’язання певного типу задач (знаходження значення істинності при деяких інтерпретаціях, знаходження всіх логічних наслідків з формули, визначення, чи є формула тавтологією чи суперечністю тощо). Такого виду формули називаються нормальними формами формул ЧВ.

Спочатку розглянемо поняття синтаксичної еквівалентності формул ЧВ (еквівалентності стосовно формальної будови формул, на відміну від семантичної) і доведемо, що при заміні деякого входження підформули на синтаксично еквівалентну отримуємо формулу, синтаксично еквівалентну до початкової (теорема про заміну). Ця теорема та основні еквівалентності ЧВ дозволяють зводити формули ЧВ до більш простого вигляду, в т. ч. до нормальній форми.

2.2.1. Підстановка. Множину всіх формул числення висловлень надалі позначатимемо через F .

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.1. Відображення $s: F \rightarrow F$ називається *підстановкою* числення висловлень, якщо для будь-яких $\phi, \psi \in F$ виконуються такі умови:

- 1) $s(\phi \rightarrow \psi) = s(\phi) \rightarrow s(\psi);$
- 2) $s(\phi \wedge \psi) = s(\phi) \wedge s(\psi);$
- 3) $s(\phi \vee \psi) = s(\phi) \vee s(\psi);$
- 4) $s(\neg\phi) = \neg s(\phi).$

Тобто, підстановка s — відображення, яке зберігає логічні операції (по-іншому — *логічний гомоморфізм*).

Легко переконатися в тому, що будь-яка підстановка числення висловлень повністю і однозначно визначається своїми значеннями на пропозиційних змінних (атомарних формулах ЧВ): $s(p_0) = \phi_0, s(p_1) = \phi_1, \dots$ Зокрема, якщо p_0, p_1, \dots, p_n — всі пропозиційні змінні, які входять у формулу ϕ , s_1 і s_2 — такі підстановки, що $s_1(p_i) = s_2(p_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, то $s_1(\phi) = s_2(\phi)$.

Формальний зміст підстановки полягає в тому, що замість пропозиційної букви p_0 ми підставляємо формулу $s(p_0) = \phi_0$, замість

p_1 — формулу $s(p_1) = \phi_1$ і так далі. Для задання підстановки досить задати образи пропозиційних букв.

Результат дії підстановки s на формулу ϕ підстановки позначимо так:

$$s(\phi) = \phi_{\phi_1, \dots, \phi_n}^{p_1, \dots, p_n} = \phi_{s(p_1), \dots, s(p_n)}^{p_1, \dots, p_n}.$$

Тут змінна p_1 замінюється формулою ϕ_1 , змінна p_2 — формулою ϕ_2 і т.д., а змінна p_n — формулою ϕ_n .

Нехай відображення підстановки s вже означене на множині всіх формул числення висловлень. Продовжимо його на секвенції:

- 5) $s(\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi) = s(\phi_1), \dots, s(\phi_n) \vdash s(\psi);$
- 6) $s(\vdash \psi) = \vdash s(\psi);$
- 7) $s(\phi_1, \dots, \phi_n \vdash) = s(\phi_1), \dots, s(\phi_n) \vdash;$
- 8) $s(\vdash) = \vdash.$

Наступним кроком є продовження відображення підстановки s на дерево:

$$9) \quad s\left(\frac{D_1, \dots, D_n}{S}\right) = \frac{s(D_1), \dots, s(D_n)}{s(S)}.$$

Підстановку можна продовжити на дерево, в якому кожна секвенція S замінена на $s(S)$. При дії s на аксіоми знову отримуються аксіоми. Оскільки переходи в дереві D здійснюються за допомогою правил виведення, то переходи в дереві $s(D)$ знову здійснюються за правилами виведення.

ТЕОРЕМА 2.2.2 (Про підстановку). *Якщо S — вивідна секвенція ЧВ, то $s(S)$ також вивідна для довільної підстановки s .*

ДОВЕДЕННЯ. Якщо S — вивідна, то існує доведення у вигляді дерева D , в якому S є заключною секвенцією (під S немає

риски). Подіємо на дерево D підстановкою s . Ми отримаємо нове дерево $s(D)$, заключною секвенцією якого є секвенція $s(S)$, таким чином $s(S)$ — вивідна секвенція. \square

НАСЛІДОК 2.2.3. Якщо формула ϕ вивідна, то формула $s(\phi) = \phi_{\phi_1, \dots, \phi_n}^{p_1, \dots, p_n}$ також вивідна.

ДОВЕДЕННЯ. Той факт, що ϕ вивідна означає, що секвенція $\vdash \phi$ вивідна. За теоремою секвенція $\vdash s(\phi)$ вивідна, тобто $\vdash \phi_{\phi_1, \dots, \phi_n}^{p_1, \dots, p_n}$ вивідна. \square

Доведена нами теорема і наслідок означають, що коли у вивідній секвенції (формулі) замість пропозиційних змінних підставити довільні формули, то отримана секвенція (формула) буде вивідною.

Якщо ϕ — вивідна формула, яка містить пропозиційну змінну p (позначимо цей факт $\phi(p)$), то вивідною є і формула $\phi(\alpha)$, що отримується з ϕ заміною всіх входжень змінної p на довільну формулу α .

2.2.2. Синтаксична еквівалентність формул числення висловлень.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.4. Дві формули φ і ψ називаються *синтаксично еквівалентними*, якщо обидві секвенції $\varphi \vdash \psi$ і $\psi \vdash \varphi$ є вивідними у ЧВ. Надалі синтаксичну еквівалентність формул φ і ψ позначатимемо так: $\varphi \equiv \psi$.

ЗАУВАЖЕННЯ 6. Символ \equiv не є символом мови числення висловлень. Проте він є символом метамови — мови, на якій доводяться твердження про це числення. Поняття схеми та доведення також є поняттями метамови.

ТВЕРДЖЕННЯ 2.2.5. *Відношення синтаксичної еквівалентності формул \equiv є відношенням еквівалентності на множині формул числення висловлень, тобто якщо ϕ, ψ, χ — формули числення висловлень, то вірні такі твердження:*

- (1) $\phi \equiv \phi$;
- (2) Якщо $\phi \equiv \psi$, то $\psi \equiv \phi$;
- (3) Якщо $\phi \equiv \psi$ і $\psi \equiv \chi$, то $\phi \equiv \chi$.

ДОВЕДЕННЯ. *Рефлексивність.* Кожна формула еквівалентна сама собі. Справді, $\phi \vdash \phi$ є аксіомою, отже теоремою.

Симетричність безпосередньо випливає з означення синтаксичної еквівалентності.

Залишається розглянути *транзитивність*. Якщо $\phi \equiv \psi$ і $\psi \equiv \chi$, то, зокрема, $\phi \vdash \psi$ і $\psi \vdash \chi$. Застосовуючи допустиме правило виведення д) з теореми 2.1.29, одержуємо $\phi \vdash \chi$. Так само, з $\chi \vdash \psi$ і $\psi \vdash \phi$, одержуємо $\chi \vdash \phi$, отже $\phi \equiv \chi$. \square

Множина формул розбивається на класи еквівалентності, які або не перетинаються, або співпадають. В кожному класі еквівалентності вибираємо формулу, що має зручну форму.

ТВЕРДЖЕННЯ 2.2.6. *Нехай φ і ψ дві формули ЧВ. Маємо такі еквівалентності:*

- а) $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$;
- б) $\neg\neg\phi \equiv \phi$ — закон подвійного заперечення;
- в) $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$ — закон заперечення кон'юнкції;
- г) $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ — закон заперечення диз'юнкції;
- д) $\phi \equiv \phi \wedge \phi$ — ідемпотентність кон'юнкції;
- е) $\phi \equiv \phi \vee \phi$ — ідемпотентність диз'юнкції.

ДОВЕДЕННЯ. Побудуємо доведення для а). Спочатку доведемо $\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$:

$$\frac{\frac{\frac{\phi \vdash \phi, \phi \rightarrow \psi \vdash \phi \rightarrow \psi}{\phi, \phi \rightarrow \psi \vdash \psi} (8)}{\phi, \phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi} (5) \quad \frac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\neg\phi \vdash \neg\phi \vee \psi, \vdash \phi \vee \neg\phi} (5)}{\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi} (6)$$

Тепер доведемо секвенцію $\neg\phi \vee \psi \vdash \phi \rightarrow \psi$:

$$\frac{\frac{\frac{\neg\phi \vee \psi \vdash \neg\phi \vee \psi}{\phi, \neg\phi \vee \psi \vdash \neg\phi \vee \psi} (12)}{\psi \vdash \psi} (12) \quad \frac{\phi \vdash \phi, \neg\phi \vdash \neg\phi}{\phi, \neg\phi \vdash \neg\phi} (9)}{\frac{\neg\phi \vee \psi, \phi \vdash \psi}{\neg\phi \vee \psi \vdash \phi \rightarrow \psi} (7)} (6)$$

в) Доведемо еквівалентність $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$.

Для доведення секвенції $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$ розглянемо дерева:

$$D_1 = \frac{\frac{\frac{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)}{\neg\phi, \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)}}{\neg\phi, \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg\phi}}{\frac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi}}, \quad \frac{\frac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\neg\phi \vdash \neg\phi \vee \neg\psi}}{\frac{\neg\phi, \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi}{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi}}},$$

$$D_2 = \frac{\frac{\frac{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)}{\neg\psi, \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)}}{\neg\psi, \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \neg\psi}}{\frac{\neg\psi \vdash \neg\psi}{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \psi}}},$$

Оскільки заключними секвенціями дерев D_1 і D_2 є $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi$ та $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \psi$ відповідно, то, за правилом введення кон'юнкції, отримуємо нове дерево:

$$D_3 = \frac{D_1 \quad D_2}{\frac{\frac{D_1}{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi \wedge \psi} \quad \frac{D_2}{\neg\psi \vdash \neg\phi \vee \neg\psi}}{\frac{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi), \neg(\phi \wedge \psi) \vdash}{\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi}}}, (1)$$

яке завершує доведення секвенції $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$.

Для доведення секвенції $\neg\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$ зауважимо, що секвенції $\neg\phi \vee \neg\psi$, $\neg\phi, \phi \wedge \psi \vdash$ та $\neg\phi \vee \neg\psi, \neg\psi, \phi \wedge \psi \vdash$ є теоремами. D_1 та D_2 — відповідні дерева доведень цих теорем.

$$D_1 = \frac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\neg\phi \vee \neg\psi, \neg\phi, \phi \wedge \psi \vdash \neg\phi} \quad \frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \phi},$$

$$D_2 = \frac{\phi \wedge \psi \vdash \psi}{\neg\phi \vee \neg\psi, \neg\psi, \phi \wedge \psi \vdash \psi}.$$

Тоді доведення завершує наступне дерево, у якому перший переход є розбором можливих випадків:

$$\frac{D_1 \quad D_2}{\neg\phi \vee \neg\psi, \phi \wedge \psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)}.$$

д) Доведемо, що $\phi \equiv \phi \wedge \phi$. За правилом введення кон'юнкції

$$\frac{\phi \vdash \phi \quad \phi \vdash \phi}{\phi \vdash \phi \wedge \phi}. \quad (1)$$

За правилом усунення кон'юнкції

$$\frac{\phi \wedge \phi \vdash \phi \wedge \phi}{\phi \wedge \phi \vdash \phi}. \quad (2)$$

Пропонуємо читачеві довести самостійно еквівалентності б), г), е). \square

ТВЕРДЖЕННЯ 2.2.7. Для формул ЧВ вірні такі еквівалентності:

- ε) $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ — комутативність кон'юнкції;
- ж) $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ — комутативність диз'юнкції;
- з) $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ — асоціативність кон'юнкції;
- и) $(\phi \vee \psi) \vee \chi \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi)$ — асоціативність диз'юнкції;
- к) $(\phi \vee \psi) \wedge \chi \equiv (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$ — дистрибутивність;
- л) $(\phi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$ — дистрибутивність.

ДОВЕДЕННЯ. а) Доведемо комутативність кон'юнкції $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$. Спочатку доведемо, що $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$:

$$\frac{\frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi \quad \phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \psi} \quad \frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \phi}}{\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi}. (1)$$

Дерево доведення для $\psi \wedge \phi \vdash \phi \wedge \psi$ таке:

$$\frac{\frac{\psi \wedge \phi \vdash \psi \wedge \phi \quad \psi \wedge \phi \vdash \psi \wedge \phi}{\psi \wedge \phi \vdash \phi} \quad \frac{\psi \wedge \phi \vdash \psi \wedge \phi}{\psi \wedge \phi \vdash \psi}}{\psi \wedge \phi \vdash \phi \wedge \psi}. (1)$$

Еквівалентності ж)–л) пропонуємо читачеві довести самостійно.

□

2.2.3. Теорема про заміну. Покажемо, що при заміні деякого входження підформули на синтаксично еквівалентну формулу, отримуємо формулу, синтаксично еквівалентну початковій. Спочатку доведемо кілька допоміжних тверджень.

ЛЕМА 7. Якщо $\phi \equiv \psi$, то формула ϕ вивідна тоді і тільки тоді, коли формула ψ також вивідна.

ДОВЕДЕННЯ. (\Rightarrow) Якщо формула ϕ вивідна, то вивідною є і секвенція $\vdash \phi$. Крім того, вивідною є секвенція $\phi \vdash \psi$. Квазідоведення вивідності формули ψ отримується за допомогою правил дедукції Ербрана та modus ponens:

$$\frac{\vdash \phi, \quad \frac{\phi \vdash \psi}{\vdash (\phi \rightarrow \psi)}^{(7)}}{\vdash \psi}^{(8)}.$$

(\Leftarrow) Аналогічними міркуваннями з вивідності секвенцій $\vdash \psi$ та $\psi \vdash \phi$ отримується вивідність $\vdash \phi$. □

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.8. Формулу ψ називають *початком формули* ϕ , якщо існує таке слово χ , що $\phi = \psi\chi$.

ЛЕМА 8 (Про початок). Якщо формула ψ є початком формули ϕ , то $\phi = \psi$.

ДОВЕДЕННЯ. Застосуємо математичну індукцію за довжиною слова ψ .

Якщо ϕ — пропозиційна змінна, то з означення формулі легко зрозуміти, що і ψ — пропозиційна змінна, оскільки в іншому випадку слово ϕ розпочиналось би або лівою дужкою “(”, або символом заперечення “ \neg ”. В цьому випадку $\phi = \psi$.

Припустимо тепер, що $n \geq 1$, і що лема доведена для всіх підформул ψ формулі ϕ , які мають довжину меншу ніж n . Якщо довжина формулі ψ дорівнює $n \geq 1$, то ψ має вигляд $\neg\psi_1$ або вигляд $(\psi_1 * \psi_2)$, де $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, де ψ_1, ψ_2 — підформулі формулі ψ .

У випадку, коли $\psi = \neg\psi_1$, формулі ϕ теж мусить починатися з символу \neg , оскільки слово ψ є початком слова ϕ ; тобто $\phi = \neg\phi_1$. Тепер формулі ψ_1 є початком формулі ϕ_1 і, за припущенням індукції, $\phi_1 = \psi_1$. Отже й $\phi = \psi$.

У випадку, коли формулі ψ має вигляд $\psi = (\psi_1 * \psi_2)$ і є початком формулі ϕ , формулі ϕ теж має вигляд $\phi = (\phi_1 * \phi_2)$, де $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Одна з формул ϕ_1 і ψ_1 є початком іншої, тому, за припущенням індукції, $\phi_1 = \psi_1$. Далі $* = *$ і знову формулі ψ_2 є початком формулі ϕ_2 ; за припущенням індукції $\phi_2 = \psi_2$, отже $\phi = \psi$. \square

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.9. Нехай ψ — підформула формулі ϕ ; тоді слово ϕ має вигляд $\phi = \alpha\psi\beta$, де α і β — деякі підслова слова ϕ . Підслово ψ слова $\alpha\psi\beta$ називають *входженням формулі ψ у формулу ϕ* .

ЛЕМА 9 (Про входження). *Нехай ψ і χ – входження підформул ψ і χ у формулу ϕ . Тоді або входження ψ і χ не перетинаються, або одне з них міститься в іншому.*

ДОВЕДЕННЯ. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що входження ψ і χ у формулу ϕ перетинаються. Тоді перший символ одного з слів ψ чи χ є одною з букв іншого слова. Припустимо, що перший символ слова χ є одною з букв слова ψ . Якщо цей символ є пропозиційною буквою p , то $\chi = p$ і входження χ міститься у входженні ψ . Якщо цей символ не є пропозиційною буквою, то він є або лівою дужкою “(”, або символом “ \neg ”. З означення формули зрозуміло, що будь-яка ліва дужка або символ заперечення \neg , що входять у запис формули ψ , визначає деяку підформулу ψ_1 формули ψ . Одна з формул ψ_1 чи χ є початком іншої. За лемою 8 про початок, $\psi_1 = \chi$, тому входження χ міститься у входженні ψ . \square

ЛЕМА 10. *Нехай $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ – формули ЧВ. Припустимо, що $\phi_1 \equiv \phi_2$ і $\psi_1 \equiv \psi_2$. Тоді*

- (1) $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$;
- (2) $\phi_1 \vee \psi_1 \equiv \phi_2 \vee \psi_2$;
- (3) $\phi_1 \wedge \psi_1 \equiv \phi_2 \wedge \psi_2$;
- (4) $\phi_1 \rightarrow \psi_1 \equiv \phi_2 \rightarrow \psi_2$.

ДОВЕДЕННЯ. (1) Використовуючи той факт, що $\phi_2 \vdash \varphi_1$, бачимо, що дерево

$$\frac{\frac{\phi_2 \vdash \phi_1}{\phi_2, \neg\phi_1 \vdash \phi_1} \quad \frac{\neg\phi_1 \vdash \neg\phi_1}{\phi_2, \neg\phi_1 \vdash \neg\phi_1}}{\frac{\phi_2, \neg\phi_1 \vdash}{\neg\phi_1 \vdash \neg\phi_2}}$$

є доведенням секвенції $\neg\phi_1 \vdash \neg\phi_2$. За симетрією (міняючи ролями формули ϕ_1 і ϕ_2 у попередньому дереві), отримуємо, що й секвенція $\neg\phi_2 \vdash \neg\phi_1$ теж є теоремою. Отже, $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$.

(2) Розглянемо дерево

$$\frac{\frac{\frac{\phi_1 \vdash \phi_2}{\phi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2}}{\phi_1 \vee \psi_1, \phi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2} \quad \frac{\frac{\psi_1 \vdash \psi_2}{\psi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2}}{\phi_1 \vee \psi_1, \phi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2} \quad \phi_1 \vee \psi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2}}{\phi_1 \vee \psi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2},$$

яке показує що секвенція $\phi_1 \vee \psi_1 \vdash \phi_2 \vee \psi_2$ є теоремою. За симетрією звідси отримуємо еквівалентність $\phi_1 \vee \psi_1 \equiv \phi_2 \vee \psi_2$.

(3) Використовуючи той факт, що секвенція $\phi_1 \vdash \phi_2$ є теоремою, наведене нижче дерево є деревом доведення секвенції $\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_2$:

$$\frac{\frac{\frac{\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_1 \wedge \psi_1}{\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_1} \quad \frac{\frac{\phi_1 \vdash \phi_2}{\vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2}}{\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2}}{\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_2}}{\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_2}$$

Так само отримується доведення секвенції $\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \psi_2$ (для цього читач має переписати попереднє дерево доведення з дуже незначними змінами). Тоді за правилом введення кон'юнкції отримуємо $\phi_1 \wedge \psi_1 \vdash \phi_2 \wedge \psi_2$. За симетрією звідси випливає шукана еквівалентність $\phi_1 \wedge \psi_1 \equiv \phi_2 \wedge \psi_2$.

(4) Можемо скористатися вже доведеними еквівалентностями 1 і 2 та твердженням 2.2.6 а):

$$\phi_1 \rightarrow \psi_1 \equiv \neg\phi_1 \vee \psi_1 \equiv \neg\phi_2 \vee \psi_1 \equiv \phi_2 \rightarrow \psi_2.$$

Таким чином, лему доведено повністю. □

Тепер, нарешті, ми зможемо довести основну теорему цього параграфа.

ТЕОРЕМА 2.2.10 (Про заміну). *Нехай ϕ — формула ЧВ, ψ — ії підформула і $\psi' \equiv \psi$; нехай ϕ' — формула, отримана з ϕ заміною деякого входження підформули ψ на формулу ψ' . Тоді $\phi' \equiv \phi$.*

ДОВЕДЕННЯ. Міркуємо методом математичної індукції за довжиною формули ϕ . Якщо формула ϕ має довжину 1, то вона є пропозиційною змінною. Отже, єдиною можливою підформулою є $\psi = \phi$, тоді заміна $\psi' \equiv \psi$ приводить до рівності $\psi' = \phi$.

Припустимо, що наше твердження виконується для всіх формул ϕ , довжина яких менша ніж n , $n \geq 1$. Нехай ϕ має довжину n . Якщо ψ дорівнює ϕ , то доводити нічого. Припустимо, що підформула ψ має довжину меншу ніж n . Формула ϕ може бути отримана одним з чотирьох способів: $\phi = \neg\theta$ або $\phi = (\phi_1 \star \phi_2)$, де $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, а θ, ϕ_1, ϕ_2 — підформули ϕ . Розглянемо кожен з цих випадків.

1) $\phi = \neg\theta$. Тоді, якщо ψ є початком формули ϕ , то, за лемою про початок, $\phi = \psi$ і твердження очевидне. Якщо ж ψ не є початком формули ϕ , то ψ — підформула формули θ . За припущенням індукції, формула θ' , отримана з θ заміною деякого входження підформули ψ на формулу ψ' , еквівалентна формулі θ . За лемою 10, $\phi' = \neg\theta' \equiv \neg\theta = \phi$.

2, 3, 4) Розглянемо випадки $\phi = (\phi_1 \star \phi_2)$, де $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Якщо $\psi \neq \phi$, то підформула ψ не є початком формули ϕ , тому вона є підформулою одної з формул ϕ_1 або ϕ_2 . Довжина кожної з формул ϕ_1 і ϕ_2 менша від довжини формули ϕ , тому, як і в попередньому випадку, скористаємося припущенням індукції та лемою 10. \square

2.2.4. Нормальні форми формул ЧВ. Поняття синтаксичної еквівалентності формул ЧВ має важливе значення, оскільки, як доведено у попередніх твердженнях, синтаксична еквівалентність зберігає основні властивості формул ЧВ. Також синтаксична еквівалентність формул ЧВ є відношенням еквівалентності, яке розбиває множину всіх формул ЧВ на класи еквівалентності. Тому важливо вміти вибирати в класі всіх синтаксично еквівалентних між собою формул такий представник, який є формулою зручного вигляду. Такими формулами є т.з. нормальні форми формул ЧВ, серед яких розглянемо кон'юнктивну нормальну форму, диз'юнктивну нормальну форму, досконалу кон'юнктивну та досконалу диз'юнктивну нормальну форму.

Покажемо спочатку, що кожну формулу ЧВ завжди можна записати у вигляді з меншою кількістю знаків логічних звя'зорів.

ТВЕРДЖЕННЯ 2.2.11. *Кожна формула ЧВ еквівалентна деякій іншій формулі, до запису якої не входять символи іmplікації \rightarrow та еквіваленції \leftrightarrow .*

ДОВЕДЕННЯ. Твердження випливає з теореми про заміну та еквівалентності $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$. Еквіваленція є скороченням $\phi \leftrightarrow \psi = (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 2.2.12. *Будь-яка формула ЧВ може бути записана у вигляді, в який не входять символи іmplікації, а символи заперечення знаходяться тільки біля пропозиційних букв (тобто у вигляді з тісними запереченнями, де жоден символ заперечення не стоїть перед дужкою).*

ДОВЕДЕННЯ. Враховуючи попереднє твердження 2.2.11, у будь-якій формулі можна замінити іmplікацію $\phi \rightarrow \psi$ на $\neg\phi \vee \psi$, а

потім досить декілька разів застосувати еквівалентності, доведені у твердженні 2.2.6: $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$, $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$, $\neg\neg\phi \equiv \phi$, $\phi \wedge \phi \equiv \phi$, $\phi \vee \phi \equiv \phi$. \square

ЗАУВАЖЕННЯ 11. З доведених тверджень очевидно, що можна було б побудувати алфавіт ЧВ, не включаючи до нього символи імплікації \rightarrow та еквіваленції \leftrightarrow . Система з решти логічних зв'язок залишатиметься повною, тобто кожну формулу ЧВ можна буде записати у вигляді з тісним запереченням та з використанням лише символів кон'юнкції та диз'юнкції.

Більше того, система з лише двох логічних зв'язок \neg і \vee чи \neg і \wedge , також є повною. І тому формули можна будувати лише з використанням цих двох логічних зв'язок, наприклад $\neg i \vee [?]$. Можна було б розглядати алфавіт числення висловлень, до якого входять лише ці два символи логічних зв'язок. Тоді, для зручності, можна ввести такі скорочення: $(\phi \wedge \psi) = \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $(\phi \rightarrow \psi) = (\neg\phi \vee \psi)$, $\phi \leftrightarrow \psi = (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$. Такий підхід теж має свої переваги, зокрема, приводить до скорочення індуктивних доведень.

Введемо деякі зручні позначення. Нехай p_{i_1}, \dots, p_{i_s} — пропозиційні змінні. Позначимо

$$p_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}} = \begin{cases} p_{i_k}, & \text{якщо } \varepsilon_{i_k} = 0, \\ \neg p_{i_k}, & \text{якщо } \varepsilon_{i_k} = 1. \end{cases}$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.13. Елементарною диз'юнкцією називають диз'юнкцію скінченного числа пропозиційних змінних або їх заперечень.

Елементарна диз'юнкція — це формула такого вигляду:

$$\chi_i = p_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \vee \dots \vee p_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}}, \quad \varepsilon_{i_k} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Означення 2.2.14. Елементарною кон'юнкцією називають кон'юнкцію скінченного числа пропозиційних змінних або їх за- перечень.

Елементарна кон'юнкція у цих позначеннях запишеться так:

$$\chi_i = p_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \wedge \dots \wedge p_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}}, \quad \varepsilon_{i_k} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Означення 2.2.15. Кон'юнктивною нормальною формою ЧВ називають кон'юнкцію скінченного числа елементарних диз'юнкцій.

Означення 2.2.16. Диз'юнктивною нормальною формою називається диз'юнкція скінченного числа елементарних кон'юнкцій.

Кон'юнктивна нормальна форма — це формула вигляду

$$\phi = \chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_m,$$

де χ_1, \dots, χ_m — елементарні диз'юнкції. Диз'юнктивна нормальна форма у цих позначеннях має вигляд:

$$\phi = \chi_1 \vee \dots \vee \chi_m,$$

де χ_1, \dots, χ_m — елементарні кон'юнкції.

ПРИКЛАД 2.2.17. (1) $\phi = p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$ — елементарна диз'юнкція.

(2) Формули $\phi_1 = p_1 \vee \neg p_1 \vee p_2$, $\phi_2 = (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3)$, $\phi_3 = p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$ мають кон'юнктивну нормальну форму.

(3) Формула $\psi = p_1 \vee (p_1 \wedge p_2)$ не має кон'юнктивної нормальної форми, але має диз'юнктивну нормальну форму.

Надалі використовуватимемо скорочення КНФ і ДНФ для кон'юнктивної нормальної форми та диз'юнктивної нормальної форми відповідно. Тепер доведемо, що кожну формулу ЧВ можна записати у ДНФ.

ТЕОРЕМА 2.2.18 (Про ДНФ). *Кожна формула ϕ ЧВ еквівалентна деякій формулі ψ ЧВ, яка знаходиться у ДНФ.*

ДОВЕДЕННЯ. Досить довести теорему для формули ϕ , яка не містить входжень символу імплікації, а заперечення розміщені одразу біля пропозиційних букв (тобто ϕ є формулою з тісними запереченнями). Використаємо метод математичної індукції за довжиною формули ϕ .

Кожна пропозиційна змінна вже має ДНФ (це елементарна кон'юнкція з одної букви). Тому твердження вірне для формул довжини 1.

Припустимо, що наша теорема вірна для всіх формул ϕ , довжина $l(\phi)$ яких менша ніж n , де $n > 1$. Доведемо, що формула ϕ , для якої $l(\theta) = n$ теж має ДНФ. За припущенням ϕ має один з виглядів $(\chi_1 \wedge \chi_2)$, $(\chi_1 \vee \chi_2)$. Оскільки ми припустили, що формула θ є формулою з тісними запереченнями, то у випадку $\theta = \neg\chi = p$ — буква, тобто $\theta = \neg p$ має ДНФ.

Нехай $\phi = \chi_1 \vee \chi_2$: ϕ є диз'юнкцією двох формул χ_1 і χ_2 , що мають меншу довжину. За припущенням індукції формули χ_1 і χ_2 еквівалентні, відповідно, формулам ψ_1 і ψ_2 , що мають ДНФ. Тоді $\phi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, і має ДНФ.

Залишилося розглянути випадок $\phi = \chi_1 \wedge \chi_2$. Кожна з формул χ_1 і χ_2 має довжину меншу ніж n , а тому $\chi_1 \equiv \psi_1$, $\chi_2 \equiv \psi_2$, де ψ_1, ψ_2 мають ДНФ. Припустимо, що $\psi_1 = \theta_1 \vee \theta_2 \vee \dots \vee \theta_k$, де θ_i ($1 \leq i \leq k$) — елементарні кон'юнкції. Analogічно $\psi_2 = \eta_1 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_l$, де η_j , ($1 \leq j \leq l$) — елементарні кон'юнкції.

Використовуючи твердження 2.2.7, отримуємо

$$\begin{aligned}
 \phi &\equiv (\theta_1 \vee \theta_2 \vee \dots \vee \theta_k) \wedge (\eta_1 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_r) \\
 &\equiv ((\theta_1 \wedge (\eta_1 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_r)) \\
 &\quad \vee (\theta_2 \wedge (\eta_1 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_r)) \\
 &\quad \vee \dots \vee \\
 &\quad \vee (\theta_k \wedge (\eta_1 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_r))) \\
 &\equiv (\theta_1 \wedge \eta_1) \vee \dots \vee (\theta_i \wedge \eta_j) \vee \dots \vee (\theta_k \wedge \eta_l).
 \end{aligned}$$

Як бачимо, ϕ еквівалентна формулі $\bigvee_{i=1}^k (\theta_i \wedge \eta_j)$, що має диз'юнктивну нормальну формулу. \square

Аналогічно можна довести теорему про кон'юнктивну нормальну форму, що кожну формулу ЧВ можна записати у КНФ.

ТЕОРЕМА 2.2.19 (Про КНФ). *Кожна формула ϕ ЧВ еквівалентна деякій формулі ψ ЧВ, яка має КНФ.*

ДОВЕДЕННЯ. Можна з невеликими змінами повторити доведення попередньої теореми 2.2.18 про ДНФ, але можна міркувати і по-іншому, вивівши теорему про КНФ з теореми про ДНФ.

Якщо дано формулу ϕ , то за теоремою 2.2.18

$$\neg\phi \equiv \bigvee_{i=1}^k (p'_{i_1} \wedge \dots \wedge p'_{i_k}), \quad (\neg\varphi)$$

де кожна з $p'_{i_1}, \dots, p'_{i_k}$ є або пропозиційною змінною або запереченнем пропозиційної змінної. Розглянувши заперечення обох частин співвідношення $(\neg\phi)$ і врахувавши твердження 2.2.6 і 2.2.7, отримуємо

$$\phi \equiv \neg\neg\phi \equiv \bigwedge_{i=1}^k (p''_{i_1} \vee \dots \vee p''_{i_k}),$$

де кожна з $p''_{i_1}, \dots, p''_{i_k}$ є або пропозиційною змінною або запереченням пропозиційної змінної (тут ми враховуємо, що $\neg\neg p \equiv p$). \square

ПРИКЛАД 2.2.20. Зведемо до ДНФ формулу $\phi = \neg((P_1 \wedge \neg P_2) \rightarrow (P_3 \wedge P_4))$.

Для цього використаємо еквівалентності з твердження 2.2.6:
 $\phi = \neg((P_1 \wedge \neg P_2) \rightarrow (P_3 \wedge P_4)) \equiv \neg((\neg P_1 \vee P_2) \vee (P_3 \wedge P_4)) \equiv \neg((\neg P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee P_4)) \equiv ((P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_4))$.
Це і є ДНФ.

ПРИКЛАД 2.2.21. Зведемо до КНФ формулу

$$\phi = (((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow (P_3 \rightarrow \neg P_1)) \rightarrow (\neg P_2 \rightarrow \neg P_3)).$$

Зведемо формулу до еквівалентної:

$$\begin{aligned} \phi &= (((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow (P_3 \rightarrow \neg P_1)) \rightarrow (\neg P_2 \rightarrow \neg P_3)) \equiv (\neg(\neg P_1 \vee P_2) \vee (\neg P_3 \vee \neg P_1)) \\ &\equiv (((P_1 \wedge \neg P_2) \vee \neg P_1 \vee \neg P_3) \rightarrow (P_2 \vee \neg P_3)) \equiv (((P_1 \vee \neg P_1) \wedge (\neg P_2 \vee \neg P_1)) \vee \neg P_3) \rightarrow (P_2 \vee \neg P_3)) \equiv (\neg P_2 \vee \neg P_1 \vee \neg P_3) \\ &\rightarrow (P_2 \vee \neg P_3)) \equiv \neg(\neg P_2 \vee \neg P_1 \vee \neg P_3) \vee (P_2 \vee \neg P_3) \equiv (P_2 \wedge P_1 \wedge P_3) \vee (P_2 \vee \neg P_3) \equiv (P_2 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_3 \vee P_2 \vee \neg P_3) \equiv \\ &(P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3). \text{ Це і є КНФ.} \end{aligned}$$

Зрозуміло, що для зведення довільної формули ЧВ до КНФ (ДНФ) потрібно спочатку позбутися від \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , усунути всі непрільні заперечення та подвійні заперечення, а потім до отриманої формули застосувати закон дистрибутивності.

2.2.5. Досконала кон'юнктивна нормальна форма.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2.22. Кажуть, що формула ϕ , побудована з пропозиційних змінних p_1, p_2, \dots, p_n , має *досконалу кон'юнктивну нормальну форму* (скорочено ДКНФ), якщо виконуються такі умови:

- (1) ϕ має кон'юнктивну нормальну форму $\phi = \bigwedge_{i=1}^m \chi_i$, де χ_i — елементарні диз'юнкції.
- (2) кожна елементарна диз'юнкція χ_i містить кожну пропозиційну змінну або її заперечення точно один раз, тобто має вигляд $\chi_i = p_1^{\varepsilon_{i1}} \vee p_2^{\varepsilon_{i2}} \vee \dots \vee p_n^{\varepsilon_{in}}$.
- (3) всі елементарні диз'юнкції χ_i є різними, тобто відповідні їм набори $(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{in})$ різні.

ПРИКЛАД 2.2.23. (1) Формула $\phi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$ має кон'юнктивну нормальну форму, яка не є ДКНФ, тому що елементарні диз'юнкції не містять всіх пропозиційних змінних (умова 2).

- (2) Формула $\phi = (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$ має кон'юнктивну нормальну форму, яка не є досконалою, оскільки перша і друга елементарні диз'юнкції однакові (не виконується умова 3).
- (3) Формула $\phi = (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$ має досконалу кон'юнктивну нормальну форму.

Доведемо, що кожна невивідна формула ЧВ еквівалентна формулі, що має ДКНФ. Для цього доведемо спочатку три допоміжні леми.

ЛЕМА 12. Якщо формула α є теоремою (тобто α має доведення), а β — довільна формула, то $\beta \equiv \alpha \wedge \beta$.

ДОВЕДЕННЯ. Дерева

$$\frac{\vdash \alpha}{\frac{\beta \vdash \alpha \quad \beta \vdash \beta}{\beta \vdash \alpha \wedge \beta}} \quad i \quad \frac{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta}{\alpha \wedge \beta \vdash \beta}$$

показують, що обидві секвенції $\beta \vdash \alpha \wedge \beta$ і $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ є теоремами, тому $\beta \equiv \alpha \wedge \beta$. \square

ЛЕМА 13. Для довільних формул α і β , $\alpha \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$.

ДОВЕДЕННЯ. Секвенція $\alpha \vdash \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$ очевидна за правилом введення диз'юнкції.

Для доведення секвенції $\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \vdash \alpha$ використаємо вивідність секвенції $\beta \wedge \neg\beta \vdash$ і розглянемо дерево

$$\frac{\frac{\beta \wedge \neg\beta \vdash}{\beta \wedge \neg\beta, \neg\alpha \vdash} \quad \alpha \vdash \alpha \quad \beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha \quad \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \vdash \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)}{\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \vdash \alpha}.$$

Отже, $\alpha \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$. □

ЛЕМА 14. Формула $\alpha \vee \beta \vee \neg\beta$ є теоремою.

ДОВЕДЕННЯ. Використаємо той факт, що за прикладом 2.1.32 секвенція $\vdash \beta \vee \neg\beta$ є теоремою і застосуємо правило введення диз'юнкції. □

Тепер можемо довести теорему про досконалу кон'юнктивну нормальну форму.

ТЕОРЕМА 2.2.24 (Про ДКНФ). *Кожна невивідна формула ϕ числення висловлень еквівалентна формулі ϕ' , що має досконалу кон'юнктивну нормальну форму.*

ДОВЕДЕННЯ. За теоремою 2.2.19 формула ϕ еквівалентна деякій формулі ϕ_1 , що має кон'юнктивну нормальну форму: $\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^m \chi_i$, де χ_i — елементарні диз'юнкції.

Припустимо, що формула ϕ залежить лише від пропозиційних змінних p_1, \dots, p_n . Можна вважати, що кожна пропозиційна змінна входить у кожну χ_i не більше ніж один раз. Якщо у деяку формулу χ_i деяка змінна (наприклад p_1) входить більше ніж один раз, то χ_i еквівалентна формулі $p_1 \vee p_1 \vee \dots$ або $p_1 \vee \neg p_1 \dots$ У першому випадку замінимо $p_1 \vee p_1$ на p_1 і отримаємо меншу

кількість входжень p_1 у формулу χ_i . Якщо ж χ_i еквівалентна формулі вигляду $p_1 \vee \neg p_1 \vee \dots$, то за лемою 14 формула χ_i є теоремою, і за лемою 12, можемо вважати, що така формула χ_i не входить у ϕ .

Якщо деяка пропозиційна змінна (наприклад p_1) не входить у деяку χ_i , то, застосовуючи лему 13, отримуємо $\chi_i \equiv \chi_i \vee (p_1 \wedge \neg p_1) \equiv (\chi_i \vee p_1) \wedge (\chi_i \vee \neg p_1)$; це дозволяє замінити елементарну диз'юнкцію χ_i на кон'юнкцію двох елементарних диз'юнкцій $\chi_i \vee p_1$ та $\chi_i \vee \neg p_1$, у кожну з яких вже входить p_1 .

Виконавши скінченну кількість щойно описаних вилучень “зайвих” пропозиційних змінних та елементарних диз'юнкцій і долучень пропозиційних змінних, “яких не вистачає”, отримаємо кон'юнктивну нормальну форму, яка задовольняє умови (1) і (2) означення 2.2.22. Нарешті, вилучення в одержаній формулі одинакових елементарних диз'юнкцій, якщо такі є, завершує доведення теореми. \square

ПРИКЛАД 2.2.25. В прикладі 2.2.21 формулу

$$\phi = (((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow (P_3 \rightarrow \neg P_1)) \rightarrow (\neg P_2 \rightarrow \neg P_3))$$

зведено до КНФ, яка проте не є ДКНФ:

$$\phi \equiv (P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3).$$

Перша елементарна диз'юнкція не містить пропозиційної змінної P_1 , тому перетворимо її так: $(P_2 \vee \neg P_3) \equiv (P_2 \vee \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_1) \equiv (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3)$. Тоді формула ϕ еквівалентна формулі у кон'юнктивній нормальній формі:

$$\phi \equiv (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3).$$

Отже, для зведення формули ЧВ до ДКНФ можна звести її до КНФ і, якщо деяка елементарна диз'юнкція не містить змінної

p_i , що входить у початкову формулу, то її потрібно приєднати диз'юнктивно як кон'юнктивний член ($p_i \wedge \neg p_i$), а потім застосувати дистрибутивність.

2.3. Семантика числення висловлень

У попередніх розділах ми розглядали правила утворення правильних виразів формальної мови — числення висловлень (формули, секвенції, доведення), тобто синтаксис числення висловлень. Далі нас цікавитимуть правила, за якими правильним виразам цієї формальної мови співставляються конкретні об'єкти, а також деякі їх властивості, тобто все, що складає семантику числення висловлень.

2.3.1. Інтерпретація ЧВ. Інтерпретація формальної мови означає надання чіткого змісту правильним виразам цієї мови. Зрозуміло, що це поняття відноситься до сематики числення висловлень.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.1. *Інтерпретація змінних.* Нехай X — довільна непорожня множина. *Інтерпретація пропозиційних змінних* — це відображення

$$f: \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \rightarrow 2^X$$

множини пропозиційних змінних у множину 2^X всіх підмножин множини X .

Продовжимо це відображення на всі формули числення висловлень.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.2. *Інтерпретація формул* визначається індукцією за довжиною формули. Якщо ϕ і ψ — формули ЧВ, для яких відображення f уже визначене, то

- а) $f(\neg\phi) = X \setminus f(\phi);$
- б) $f(\phi \vee \psi) = f(\phi) \cup f(\psi);$
- в) $f(\phi \wedge \psi) = f(\phi) \cap f(\psi);$
- г) $f(\phi \rightarrow \psi) = f(\neg\phi) \cup f(\psi).$

Таким чином, інтерпретація формул — це відображення, яке формулам ЧВ ставить у відповідність підмножини деякої інтерпретаційної множини X .

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.3. *Інтерпретація секвенцій.* Секвенції інтерпретують як деякі твердження про підмножини множини X . А саме:

- а) Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ істинна для інтерпретації f тоді й лише тоді, коли $f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) \subset f(\phi);$
- б) Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ істинна для інтерпретації f тоді й лише тоді, коли $f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) = \emptyset;$
- в) Секвенція $\vdash \phi$ істинна для інтерпретації f тоді й лише тоді, коли $f(\phi) = X;$
- г) Секвенція \vdash хибна.

Серед усіх інтерпретацій виділяють головну *інтерпретацію числення висловлень*. Позначимо через Ω множину з двох елементів 0 і 1: $\Omega = \{0, 1\}$. Тоді

$$\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}\}$$

Головну інтерпретацію можна розглядати як частковий випадок означення 2.3.1 коли множина X є одноелементною. Справді, у цьому випадку $2^X = \{\emptyset, X\}$. Тоді можна розглядати множину 2^X як бульову алгебру $\Omega = \{0, 1\}$ з двох елементів 0 і 1, позначивши $\emptyset := 0$ і $X := 1$.

Розглянемо головну інтерпретацію формул ЧВ. Нагадаємо, що бульова функція — це відображення $f: \Omega^n \rightarrow \Omega$. Нехай $\phi = \phi(p_1, \dots, p_n)$ — будь-яка формула ЧВ, яка залежить від пропозиційних букв p_1, \dots, p_n .

Якщо надавати пропозиційним буквам p_1, \dots, p_n значення 0 і 1, то можна визначити істинність формули ϕ за допомогою таблиці істинності, вважаючи, що

$$\phi(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \phi(i_1, \dots, i_n) \text{ істинна;} \\ 0, & \text{якщо } \phi(i_1, \dots, i_n) \text{ хибна.} \end{cases}$$

Так ми отримуємо бульову функцію з Ω^n в Ω , яку позначимо через $\chi_\phi: \Omega^n \rightarrow \Omega$. Вона і є головною інтерпретацією.

Таким чином, для будь-якої формули $\phi = \phi(p_1, \dots, p_n)$ від n пропозиційних змінних p_1, \dots, p_n визначена функція χ_ϕ , яка даним наборами значень істинності пропозиційних змінних (p_1, \dots, p_n) ставить у відповідність значення істинності формули ϕ . Отже, χ_ϕ — це функція, значення якої записується в останньому стовпці таблиці істинності. Ця функція називається *функцією істинності формули ϕ* .

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.4. Якщо значення функції χ_ϕ дорівнює 1 для даного набору (i_1, \dots, i_n) значень пропозиційних змінних p_1, \dots, p_n , то формулу ϕ називають *істинною на цьому наборі* (для цієї головної інтерпретації пропозиційних змінних). В іншому випадку формулу ϕ називають *хибною для даної головної інтерпретації*.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3.5. Формулу $\phi = \phi(p_1, \dots, p_n)$ називають *тотожно істинною*, якщо $\chi_\phi = 1$ на всіх наборах значень пропозиційних змінних, і *тотожно хибною*, якщо $\chi_\phi = 0$ на всіх наборах значень пропозиційних змінних.

Маючи головну інтерпретацію формул, можна визначити головну інтерпретацію секвенцій ЧВ. *Головна інтерпретація секвенцій* ЧВ є такою:

- a) Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ істинна у головній інтерпретації f тоді й лише тоді, коли формула ϕ істинна або хоч одна з формул ϕ_1, \dots, ϕ_n хибна;
- б) Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ істинна у головній інтерпретації f тоді й лише тоді, коли хоч одна з формул ϕ_1, \dots, ϕ_n хибна;
- в) Секвенція $\vdash \phi$ істинна у головній інтерпретації f тоді й лише тоді, коли формула ϕ істинна;
- г) Секвенція \vdash хибна.

Означення 2.3.6. Секвенцію S ЧВ називають *тотожно істинною*, якщо вона істинна для кожної інтерпретації.

Якщо розглядати лише головні інтерпретації, то секвенція S є тотожно істинною, якщо вона істинна на будь-якому наборі значень істинності (наборі з нулів та одиниць) пропозиційних змінних, що входять у всі формули з S .

Означення 2.3.7. Секвенцію називають *тотожно хибною*, якщо вона хибна для всіх інтерпретацій.

Означення 2.3.8. Секвенція називається *виконуваною*, якщо вона істинна хоч для одної інтерпретації (хоч для одного набору нулів та одиниць).

2.3.2. Тотожна істинність вивідних секвенцій. Доведемо тепер одну важливу теорему.

ТЕОРЕМА 2.3.9. Якщо секвенція S ЧВ вивідна у ЧВ, то S тотожно істинна.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай f — інтерпретація ЧВ у множині X . Інтерпретація f ставить у відповідність формулам ЧВ підмножини множини X , а секвенціям — деякі твердження про підмножини множини X . Кожна аксіома має вигляд $\phi \vdash \phi$, а її інтерпретацію є твердження, що $f(\phi) \subset f(\phi)$ для підмножини $f(\phi)$ множини X . Твердження $f(\phi) \subset f(\phi)$ завжди істинне. Якщо зможемо перевірити, що правила виведення зберігають тотожну істинність, то теорема буде доведена.

Потрібно перевірити, що кожне з 12 правил виводу зберігає тотожну істинність. Зробимо це лише для правила modus ponens та для правила міркування від супротивного, залишаючи читачеві перевірку інших правил.

8) *Modus ponens.* Припустимо, що у виразі

$$\frac{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi, \phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi \rightarrow \psi}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi}$$

секвенції над рискою істинні для інтерпретації f у множині X . Це означає, що

$$\begin{aligned} f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) &\subset f(\phi), \\ f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) &\subset (X \setminus f(\phi)) \cup f(\psi). \end{aligned} \tag{*}$$

Потрібно показати, що й

$$f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) \subset f(\psi).$$

Якби це включення було невірним, то існував би такий елемент $x \in f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n)$, що $x \notin f(\psi)$. Але тоді $x \in X \setminus f(\phi)$ і $x \notin f(\phi)$. Отримуємо суперечність з першим включенням (*). Тому правило modus ponens зберігає тотожну істинність.

9) Розглянемо ще правило міркування від супротивного:

$$\frac{\phi_1, \dots, \phi_n, \neg\phi \vdash \bot}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi}.$$

Істинність для інтерпретації f секвенції над рискою означає, що

$$f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) \cap (X \setminus f(\phi)) = \emptyset. \quad (**)$$

Звідси випливає, що $f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n) \subset f(\phi)$. Справді, якщо $x \in f(\phi_1) \cap \dots \cap f(\phi_n)$, то $(**)$ показує, що $x \notin X \setminus f(\phi)$, а тому $x \in f(\phi)$.

Доведення тотожної істинності решти правил залишаємо читачеві. \square

2.3.3. Функціональна повнота числення висловлень.

Далі покажемо, що будь-яку бульову функцію функцію $f: \Omega^n \rightarrow \Omega$, де $\Omega = \{0, 1\}$, можна отримати з деякої формули ЧВ.

ТЕОРЕМА 2.3.10 (Про функціональну повноту ЧВ). *Для кожної функції $f: \Omega^n \rightarrow \Omega$ існує така формула ϕ числення висловлень, що $f = f_\phi$.*

ДОВЕДЕННЯ. Якщо функція f тотожно дорівнює 1, то така функція f є функцією істинності формули $\phi = p_1 \vee \neg p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$. Тому будемо вважати, що функція f не дорівнює тотожно 1.

За теоремою про досконалу кон'юнктивну нормальну формулу для бульзових функцій (див. п. 1.4.4) функція f може бути зведена до вигляду:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{f(a_1, \dots, a_n)=0} (x_1^{\bar{a}_1} \cup x_2^{\bar{a}_2} \cup \dots \cup x_n^{\bar{a}_n}).$$

Залишемо формулу ϕ ЧВ

$$\phi = \bigwedge_{f(a_1, \dots, a_n)=0} (p_1^{\bar{a}_1} \vee p_2^{\bar{a}_2} \vee \dots \vee p_n^{\bar{a}_n}).$$

Зрозуміло, що f є функцією істинності формули ϕ . Звернемо увагу на те, що формула ϕ отримується з виразу для функції f

заміною змінних x_i на пропозиційні змінні p_i ; приймаємо також $p^a = p$, якщо $a = 0$ і $p^a = \neg p$, якщо $a = 1$. \square

2.3.4. Повнота числення висловлень. У загальних ри-
сах повнота тої чи іншої теорії означає, що ця теорія містить
достатню для певної мети кількість теорем. Зокрема, теорема
про повноту числення висловлень стверджує, що множина тео-
рем числення висловлень дорівнює множині тотожно істинних
секвенцій:

ТЕОРЕМА 2.3.11 (Про повноту ЧВ). *Секвенція S числення ви-
словлень є вивідною тоді й лише тоді, коли вона тотожно
істинна.*

*Зокрема, формула ϕ ЧВ вивідна тоді й лише тоді, коли ϕ
тотожно істинна.*

Для доведення теореми 2.3.11, доведемо спочатку таку лему:

ЛЕМА 2.3.12. 1) *Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ вивідна тоді й
лише тоді, коли вивідна формула*

$$\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi.$$

2) *Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ вивідна тоді й лише тоді, коли
вивідна формула $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow$
 $(p \wedge \neg p)$ (тут p – пропозиційна змінна).*

ДОВЕДЕННЯ. 1) Якщо секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ вивідна, то можемо написати таке доведення, використовуючи n разів правило дедукції Ербрана:

$$\frac{\text{доведення секвенції } \phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi}{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi}{\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash \phi_n \rightarrow \phi}}{\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \vdash \phi_{n-1} \rightarrow (\phi_n \rightarrow \phi)}}{\dots}}{\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi}}{97}}$$

Навпаки, припустимо що секвенція

$$\vdash (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi)$$

вивідна. Застосовуючи n разів правило modus ponens, отримуємо доведення

$$\frac{\text{доведення секвенції } \vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi}{\frac{\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi}{\frac{\phi_1 \vdash \phi_1 \quad \phi_1 \vdash \phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_{n-1} \rightarrow \phi_n) \dots) \rightarrow \phi}{\frac{\dots}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi}}}.$$

Пропонуємо читачеві самостійно довести частину 2) леми 2.3.12.

□

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2.3.11. Ми вже знаємо, що вивідні секвенції тотожно істинні. Розглянемо тотожно істинну секвенцію S , і доведемо, що вона вивідна.

Міркуючи від супротивного, припустимо, що S не вивідна. За лемою 2.3.12 можна обмежитися відповідною секвенцією S' формуючи функцію ϕ .

Отже, розглядаемо невивідну формулу ϕ . За теоремою 2.2.24 про досконалу кон'юнктивну нормальну формулу, формула ϕ еквівалентна формулі

$$\phi' = \bigwedge_{i=1}^m \left(p_1^{a_{i1}} \vee \dots \vee p_n^{a_{in}} \right),$$

де

$$p^a = \begin{cases} p, & \text{якщо } \varepsilon = 0, \\ \neg p, & \text{якщо } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Існує головна інтерпретація f , для якої формула $p_1^{a_{i1}} \vee \dots \vee p_n^{a_{in}}$ хибна, а саме:

$$f(p_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{ij} = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Це суперечить тотожній істинності формули ϕ . □

2.3.5. Повнота, несуперечливість, незалежність та розв'язність числення висловлень. У попередньому підпараграфі була доведена теорема про повноту числення висловлень. Питання про повноту теорії є одним з основних, поряд з питаннями про її несуперечливість, незалежність та розв'язність, які ставляться при дослідженні кожної формальної аксіоматичної теорії. Числення висловлень є одним з найпростіших прикладів такої теорії.

Тепер коротко і неформально (тому з точки зору математичної логіки не строго) опишемо загальну концепцію формальної аксіоматичної теорії та наведемо деякі приклади таких теорій. Спочатку розглянемо кожен з термінів у фразі “формальна аксіоматична теорія”.

Кожна аксіоматична теорія починається з аксіом. Грецьке слово “*αξιομα*” означає “достойний визнання”, і від нього був утворений термін “аксіома”, який довгий час розуміли як твердження, яке в силу своєї переконливості приймається без доведення. Тому аксіоми вважаються одними з початкових положень теорії, з яких виводяться за допомогою логічних міркувань інші твердження — теореми даної теорії. У цьому суть аксіоматичного методу, який виник ще у IV ст. до нашої ери, і пов'язаний з античними філософами Платоном і Арістотелем. Перше систематичне застосування аксіоматичного методу було здійснене Евклідом у його знаменитій книзі “Начала”, яка була взірцем для математиків протягом більш ніж двох тисяч років.

Поза математикою сформувався погляд на аксіому як на твердження, що не вимагає обґрунтування, як на деяку абсолютну

істину. Однак серед математиків такий погляд поступово змінювався, доки у першій половині XIX століття М. Лобачевським (1792 — 1856), Я. Бойї³ та К. Гаусом⁴ не була відкрита неевклідова геометрія. Суть її полягає в тому, що одна з аксіом класичної евклідової геометрії — п'ятий постулат або аксіома паралельності (вона стверджує, що через кожну точку поза даною прямою можна провести лише одну пряму, паралельну до даної), — замінюється її запереченням, а тоді, ґрунтуючись на такій новій системі аксіом, будується несуперечлива геометрія. Її тепер називають неевклідовою геометрією або геометрією Лобачевського.

Стало зрозумілим, що аксіоматична теорія починається з *аксіом*, але аксіоми не слід розуміти як самоочевидні абсолютні істини, а як твердження про зв’язки первісних понять, які не означаються і використовуються без пояснення їх змісту. Всі ці властивості мають аксіоми, які можна виразити формулами числення предикатів деякої сигнатури. Всі інші поняття вже повинні бути строго означені, а твердження про їх властивості повинні бути строго доведені. Так, у евклідовій геометрії до первісних неозначуваних понять відносять точку, пряму та площину (незважаючи на те, що Евклід пробував дати їх означення), а поняття трикутника, кола тощо, вводяться за допомогою означенень. В аксіоматичній теорії множин Цермело-Френкеля первісним поняттям є “множина”, а в аксіоматичній теорії множин Геделя-Бернайса такими є “множина” і “клас”.

Систему аксіом \mathcal{A} тої чи іншої теорії можна вибирати багатьма способами. Після того як аксіоми вибрані, користуючись

³Янош Бойї (1802–1860) — угорський математик, один з творців неевклідової геометрії

⁴Карл Фрідріх Гаус (1777–1855) — німецький математик

“логічними умовиводами”, виводять нові твердження про первісні та означені поняття. Ці нові твердження називають *теоремами*, а сукупність аксіом та виведених з них теорем називають *аксіоматичною теорією* для даної системи аксіом \mathcal{A} і позначають $\text{Th}(\mathcal{A})$. Відомими читачеві прикладами аксіоматичних теорій є, поряд з геометрією, теорія груп, теорія кілець, теорія лінійних просторів та “наївна теорія множин” Все ж, аналізуючи ці та інші теорії, можна зробити висновок, що при всій їх формальності та абстрактності у процесі побудови використовують неформальні інструменти — так звані логічні умовиводи.

Для того, щоб зробити аксіоматичну теорію формальною аксіоматичною теорією, потрібно формалізувати процеси мислення при побудові аксіоматичної теорії. Це приводить до взаємопроникнення аксіоматичної теорії та математичної логіки. Стає можливим розглядати математичні теорії як об'єкти математичного вивчення.

Формальна аксіоматична теорія відрізняється від неформальних тим, що, по-перше, вона має справу з виразами, складеними з символів деякого алфавіту, які від початку позбавлені неформального змісту, і, по-друге, нечітке поняття “логічного умовиводу” замінюється чітким поняттям формального доведення. В результаті, побудова формальної аксіоматичної теорії стає процесом оперування з формальними символами за допомогою чітких формальних правил (згадаймо алфавіт, формули, секвенції, аксіоми та правила виведення числення висловлень). Тому, грубо кажучи, розвиток формальної аксіоматичної теорії може бути здійснений комп’ютером, і для деяких простих формальних теорій (таких як числення висловлень) це справді можна зробити.

Теорію T називають *суперечливою*, якщо у T кожна формула (секвенція) має доведення; в протилежному випадку її називають *несуперечливою*. Для того, щоб теорія була несуперечливою необхідно, по-перше, щоб такою була система аксіом, і, по-друге, щоб правила виведення були “правильними”, тобто щоб вони виключали можливість виведення суперечливих тверджень з несуперечливої системи аксіом.

Маючи формальну аксіоматичну теорію, ми можемо міркувати над тим, якого змісту можна надати текстам, написаним на мові цієї теорії, використовуючи об'єкти з певної конкретної області математики, несуперечливість якої вважається встановленою.

Несуперечливість системи аксіом можна виявити за допомогою поняття моделі.

Сукупність математичних об'єктів та відношень між ними, які проявляють зміст формальної аксіоматичної теорії T , називають *моделлю теорії*, а процес надання змісту формальній теорії за допомогою моделі називають *інтерпретацією теорії*. Зокрема, кожна аксіома теорії T перетворюється у деяке твердження про об'єкти з моделі. Якщо всі твердження, які інтерпретують аксіоми, істинні в моделі, то робиться висновок про несуперечливість системи аксіом. Крім цього, якщо ми не маємо сумніву у правильності правил виведення, то всі логічні наслідки з аксіом, отримані за допомогою правил виведення, теж будуть істинними у моделі. Звідси безпосередньо випливає, що якби у рамках теорії T можна було вивести дві теореми ϕ і $\neg\phi$, то відповідні цим теоремам твердження у моделі були б істинними, що неможливо.

Таким чином, існування моделі теорії обґруntовує її несуперечливість. Наприклад, множина $\{1, -1\}$ з множенням $1 \cdot 1 =$

$1, 1 \cdot -1 = -1, -1 \cdot 1 = -1, -1 \cdot -1 = -1$ є моделлю теорії груп, тому теорія груп несуперечлива.

Аксіому A системи аксіом \mathcal{A} називають *незалежною* від інших аксіом, якщо її не можна вивести з множини $\mathcal{A} \setminus \{A\}$. Для доведення незалежності аксіоми A від інших аксіом досить побудувати модель, у якій виконуються всі аксіоми множини $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ і не виконується аксіома A .

Теорію називають *категоричною*, якщо вона має єдину, з точністю до ізоморфізму, модель. Категоричними теоріями, наприклад, є аксіоматичні теорії евклідової геометрії, натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел. З іншого боку, аксіоматичні теорії груп, кілець, полів та багатьох інших алгебраїчних структур не категоричні.

Існує декілька концепцій *повноти формальної аксіоматичної теорії*. У загальних рисах повнота тої чи іншої теорії означає, що ця теорія містить достатню для певної мети кількість теорем. Зокрема, теорема про повноту числення висловлень стверджує, що множина теорем числення висловлень дорівнює множині тотожно істинних секвенцій. Аналогічний результат буде доведено у Розділі 3 для числення предикатів.

Існують також дві концепції внутрішньої повноти формальної аксіоматичної теорії T . Теорія T називається *абсолютно повною*, якщо для кожного твердження ϕ цієї теорії одне і лише одне з тверджень ϕ або $\neg\phi$ має доведення. Несуперечливу теорію T називають *повною у вузькому сенсі*, або *повною за Постом*, якщо після долучення до її аксіом довільного невивідного твердження ϕ знову отримується несуперечлива теорія.

Порівнюючи поняття несуперечливості та повноти, бачимо, що в той час коли несуперечливість означає, що в рамках теорії не

можна одночасно вивести ϕ і $\neg\phi$, повнота гарантує, що точно одне з тверджень ϕ або $\neg\phi$ можна вивести. Простим прикладом абсолютно неповної теорії є формальна аксіоматична теорія груп. У рамках цієї теорії не доводиться формула, що виражає комутативність групової операції, оскільки існують як комутативні так і некомутативні групи. Іншим прикладом є абсолютнона геометрія (вона ґрунтується на системі аксіом Гільберта, за винятком аксіоми паралельності). Тут не можна ні довести, ні спростувати жодне твердження, що використовує аксіому паралельності. Числення висловлень теж неповне в абсолютноному сенсі. Справді, у численні висловлень існує багато формул ($p_1 \vee p_2$ – одна з них), що не є ні тавтологіями (тотожно істинними), ні суперечностями (тотожно хибними). Оскільки у численні висловлень лише тавтології є теоремами, то бачимо, що існують формули ϕ , для яких ні φ , ні $\neg\phi$ не має доведення.

З іншого боку, *числення висловлень повне у вузькому сенсі*. Справді, нехай ψ – деяка формула, яка не є теоремою. Спершу зауважимо, що оскільки ψ не теорема, за теоремою про повноту ЧВ, ψ не тавтологія. Тому існує деякий набір значень $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ для пропозиційних змінних p_1, \dots, p_n формулі ψ , для якого функція істини формулі ψ дорівнює 0. Замінимо у формулі ψ кожну пропозиційну змінну p_i , для якої $\varepsilon_i = 0$ формулою $p \wedge \neg p$, і кожну пропозиційну змінну p_j , для якої $\varepsilon_j = 1$ формулою $p \vee \neg p$, де p – пропозиційна змінна, $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$. Отримаємо формулу ψ' від однієї пропозиційної змінної p , що є тотожно хибною. За теоремою про повноту ЧВ формула $\neg\psi'$ (вона тотожно істинна) є теоремою. Крім цього, формула ψ' теж є теоремою, оскільки секвенція $\vdash \psi'$ вивідна, за теоремою про підстановку. Таким чином обидві формули ψ' і $\neg\psi'$ є теоремами. За правилами виявлення

суперечності та міркування від супротивного будь-яка формула тоді є теоремою, а тому отримуємо суперечливу теорію.

Теорія називається *розв'язною*, якщо існує алгоритм, який за скінченне число кроків дозволяє дізнатися, чи задана формула є вивідною, чи ні. У численні висловлень вивідність формул можна встановити, побудувавши таблицю істинності формул. Оскільки таблиця істинності формули будується за скінченне число кроків, то числення висловлень є розв'язним.

2.4. Задачі і вправи до розділу 2

- (1) Визначити чи є дана послідовність символів формулою числення висловлень:
 - 1) $(P_0 \wedge P_1) P_2 \neg P_3;$
 - 2) $(P_0 \vee P_1) \rightarrow P_7;$
 - 3) $((\neg P_0) \rightarrow P_1) \neg(P_2 \wedge P_3));$
 - 4) $(P_0 \leftrightarrow \neg P_1) \rightarrow (P_0 + 5);$
 - 5) $(P_0 \neg P_1) \rightarrow P_2(\neg 7P_3 \vee P_0).$
- (2) Скількома способами можна розставити дужки в наступній послідовності, щоб отримати формулу.
 - 1) $A_0 \rightarrow \neg A_1 \vee A_1 \wedge A_2;$
 - 2) $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \neg A_1 \rightarrow \neg A_2.$
- (3) Виписати всі підформули наведеної формули числення висловлень:
 - 1) $((P_0 \rightarrow P_1) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)) \rightarrow (\neg P_0 \vee P_2));$
 - 2) $((P_0 \vee \neg P_1) \wedge (P_0 \vee P_3) \rightarrow P_2) \leftrightarrow (\neg P_2 \wedge P_0);$
 - 3) $((P_1 \rightarrow \neg P_0) \vee (\neg P_3)) \leftrightarrow (\neg(P_2 \wedge \neg P_3));$
 - 4) $((P_0 \rightarrow P_1) \leftrightarrow (\neg P_3 \vee P_2 \vee P_1));$
 - 5) $((P_0 \rightarrow P_1) \rightarrow ((P_0 \rightarrow \neg P_1) \rightarrow \neg(P_1 \vee P_0))).$

- (4) Довести, що кожну формулу A , яка не є пропозиційною змінною, можна записати в одному з наступних виглядів $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ для деяких формул P та Q .
- (5) Довести, що результат заміни деякого входження формули A в формулу B знову є формулою.
- (6) Вивести такі секвенції числення висловлень:
- 1) $\vdash (\phi \rightarrow \phi)$;
 - 2) $(\phi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \chi), \phi \vdash \chi$;
 - 3) $\vdash (\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi)$;
 - 4) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), (\phi \rightarrow \psi), \phi \vdash \chi$;
 - 5) $(\phi \rightarrow \psi), \neg\psi \vdash \neg\phi$;
 - 6) $\phi, \neg\psi \vdash \neg(\phi \rightarrow \psi)$;
 - 7) $\vdash \phi \vee \phi \rightarrow \phi$;
 - 8) $\vdash \phi \rightarrow \phi \vee \psi$;
 - 9) $\phi \vdash \phi \vee \phi$;
 - 10) $\phi \vdash \phi \wedge \phi$.
- (7) Вивести такі секвенції:
- 1) $(\phi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\phi \rightarrow \chi)$;
 - 2) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \vdash (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
 - 3) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \vdash ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$;
 - 4) $((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$;
 - 5) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
 - 6) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\chi \rightarrow \phi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$;
 - 7) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\chi \wedge \phi) \rightarrow (\chi \wedge \psi))$;
 - 8) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\phi \wedge \chi) \rightarrow (\psi \wedge \chi))$;
 - 9) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\phi \vee \chi) \rightarrow (\psi \vee \chi))$;
 - 10) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash ((\chi \vee \phi) \rightarrow (\chi \vee \psi))$;
 - 11) $\neg\phi \vdash (\phi \rightarrow \psi)$;

- 12) $\phi \vdash (\neg\phi \rightarrow \psi);$
- 13) $\psi \vdash (\phi \rightarrow \psi);$
- 14) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\phi);$
- 15) $(\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash (\psi \rightarrow \neg\phi);$
- 16) $(\neg\phi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \phi);$
- 17) $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash (\psi \rightarrow \phi).$

(8) Вивести такі секвенції:

- 1) $(\phi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \phi) \vdash (\phi \leftrightarrow \psi);$
- 2) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\phi \rightarrow \psi);$
- 3) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \rightarrow \phi);$
- 4) $(\phi \leftrightarrow \psi), \phi \vdash \psi;$
- 5) $\vdash (\phi \leftrightarrow \phi);$
- 6) $(\phi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \chi) \vdash (\phi \leftrightarrow \chi);$
- 7) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \leftrightarrow \phi);$
- 8) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\neg\phi \leftrightarrow \neg\psi);$
- 9) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\phi \wedge \chi) \leftrightarrow (\psi \wedge \chi));$
- 10) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\chi \wedge \phi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi));$
- 11) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\phi \vee \chi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi));$
- 12) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\chi \vee \phi) \leftrightarrow (\chi \vee \psi));$
- 13) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\phi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\psi \rightarrow \chi));$
- 14) $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash ((\chi \rightarrow \phi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \psi));$
- 15) $\vdash (\neg\phi \vee \phi).$

(9) Вивести секвенції:

- 1) $\vdash ((\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \phi));$
- 2) $\vdash ((\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \phi));$
- 3) $\vdash ((\phi \wedge (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\psi \wedge \phi) \wedge \chi));$
- 4) $\vdash ((\phi \vee (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\psi \vee \phi) \vee \chi));$
- 5) $\vdash ((\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\psi \wedge \phi) \vee (\phi \wedge \chi)));$
- 6) $\vdash ((\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\psi \vee \phi) \wedge (\phi \vee \chi)));$

- 7) $\vdash (\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi))$;
 8) $\vdash (\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi))$;
 9) $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi))$;
 10) $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi))$.
 (10) Нехай ϕ — формула, ψ — її КНФ. Довести вивідність секвенції $\vdash (\phi \leftrightarrow \psi)$.
 (11) Довести, що для будь-якої тотожно істинної КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \chi_i$, де χ_i — елементарні диз'юнкції, секвенція $\vdash \bigwedge_{i=1}^m \chi_i$ — вивідна.
 (12) Звести такі формули алгебри висловлень до кон'юнктивної нормальної форми, врахувавши правила відновлення дужок:
 1) $A \wedge B \vee \neg C$;
 2) $A \wedge \neg B \vee C \wedge D$;
 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge C$;
 4) $\neg(A \rightarrow B \wedge C) \vee B \wedge D$;
 5) $(A \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg D)$;
 6) $A \vee \neg(\neg A \rightarrow B)$;
 7) $\neg(A \rightarrow B)$;
 8) $(A \rightarrow \neg(B \wedge C)) \vee (A \wedge D)$;
 9) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \wedge C)$;
 10) $\neg(A \wedge B \wedge C) \rightarrow (A \rightarrow B)$.
 (13) Звести такі формули алгебри висловлень до диз'юнктивної нормальної форми:
 1) $\neg(A \leftrightarrow B) \wedge (A \wedge C \vee \neg B)$;
 2) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (\neg B \leftrightarrow C)$;
 3) $(\neg A \rightarrow B) \wedge C \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$;
 4) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg C)$;
 5) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$;

- 6) $((\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow B \wedge C) \wedge (B \rightarrow A);$
- 7) $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B \wedge C) \wedge (B \rightarrow A);$
- 8) $(\neg A \leftrightarrow \neg B \wedge C) \rightarrow \neg(A \wedge D \wedge \neg B);$
- 9) $\neg(\neg A \wedge B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C;$
- 10) $\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A));$
- 11) $\neg((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)));$
- 12) $(A \rightarrow B \vee C) \wedge (A \rightarrow \neg(B \vee C)).$

(14) Звести до диз'юнктивної та кон'юнктивної нормальній форми

- 1) $((((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C));$
- 2) $(((((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C) \rightarrow C);$
- 3) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg B))).$

(15) Довести, що коли ϕ знаходиться у кон'юнктивній нормальній формі та ϕ є тотожно істинною, то для будь-якої елементарної диз'юнкції формули ϕ існує така пропозиційна змінна p , що p та $\neg p$ входять в цю диз'юнкцію.

(16) Довести, що коли ϕ знаходиться у диз'юнктивній нормальній формі та ϕ є тотожно хибною, то для будь-якої елементарної кон'юнкції формули існує така пропозиційна змінна p , що p та $\neg p$ входять в цю кон'юнкцію.

(17) Звести до досконалої кон'юнктивної нормальної форми, тобто знайти $\Delta K N \Phi$, еквівалентну даній формулі:

- 1) $((C \rightarrow A) \rightarrow (\neg(B \vee C) \rightarrow A));$
- 2) $(\neg((A \wedge B) \rightarrow A) \vee (A \wedge (B \vee C)));$
- 3) $(\neg(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)).$

(18) Звести до досконалої диз'юнктивної нормальної форми, тобто знайти $\Delta D N \Phi$, еквівалентну даній формулі:

- 1) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow (A \wedge C)));$
- 2) $((((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)))) ;$

$$3) \ (\neg((A \wedge B) \rightarrow \neg A) \wedge \neg((A \wedge B) \rightarrow \neg B)).$$

- (19) Звести до досконалої кон'юнктивної нормальної форми і до досконалої диз'юнктивної нормальної форми, тобто знайти ДКНФ і ДДНФ, еквівалентну даній формулі:
- 1) $((C \rightarrow A) \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow C;$
 - 2) $((A \wedge B) \rightarrow \neg C) \vee (A \wedge (\neg B \rightarrow C));$
 - 3) $((A \leftrightarrow ((C \wedge B) \rightarrow A)) \vee (B \wedge \neg C));$
 - 4) $((A \leftrightarrow (B \vee C)) \rightarrow (B \wedge \neg A)) \rightarrow (B \vee \neg C);$
 - 5) $((A \wedge B) \leftrightarrow \neg C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \vee \neg B);$
 - 6) $(\neg(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (A \vee \neg C))).$
- (20) При яких значеннях змінних X, Y, Z, U, V, W наступні формули хибні
- 1) $((X \rightarrow (Y \wedge Z)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow \neg Y;$
 - 2) $((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (U \wedge V) \vee (U \wedge W) \vee (V \wedge W) \vee (\neg X \wedge \neg U);$
 - 3) $((X \vee Y) \vee Z) \rightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z));$
 - 4) $((X \vee Y) \wedge ((Y \vee Z) \wedge (Z \vee X))) \rightarrow ((X \wedge Y) \wedge Z);$
 - 5) $((X \vee Y) \rightarrow ((\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y))).$
- (21) Довести, що коли формули ϕ та $(\phi \rightarrow \psi)$ тотожно істинні, то і формула ψ тотожно істинна.
- (22) Довести, що
- 1) якщо формули $(\phi \vee \psi)$ та $(\neg\phi \vee \chi)$ тотожно істинні, то і формула $(\psi \vee \chi)$ тотожно істинна;
 - 2) якщо формули $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \chi)$ та $(\psi \rightarrow \sigma)$ тотожно істинні, то і формула $\chi \vee \sigma$ тотожно істинна;
 - 3) якщо формули $(\neg\phi \vee \psi)$ та $(\neg\chi \vee \neg\psi)$ тотожно істинні, то і формула $(\phi \rightarrow \neg\chi)$ тотожно істинна.
- (23) Побудувати формулу ϕ так, щоб записана нижче формула була тотожно істинною:

- 1) $((\phi \wedge Q) \rightarrow \neg P) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \phi));$
 - 2) $((R \rightarrow (\neg Q \wedge P)) \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \wedge (P \rightarrow Q) \wedge R)).$
- (24) Побудувати формулу від двох змінних, яка істинна тоді і тільки тоді, коли рівно дві змінні є хибними.
- (25) Побудувати формулу від трьох змінних, яка приймає таке ж значення, як і більшість (меншість) змінних.
- (26) Чи є логічно правильним таке міркування. Обґрунтувати відповідь на основі поняття логічного наслідку. Для цього запишіть кожне речення у вигляді формули чи слення висловлень і перевірте, чи є висновок логічним наслідком ко'нюнкції посилань.
- 1) *Студент не складе екзамен, якщо погано до нього підготується. Якщо ж він не складе екзамен, то не буде отримувати стипендію. Отоже, якщо студент погано підготується до екзамену, то він не буде мати стипендії.*
 - 2) *Якщо студент одягає плаща, то надворі дощ, або ж сильний вітер. Якщо надворі сильний вітер, то, якби було ще й холодно, студент вдягнуся б значно тепліше. Але це не так. Отоже, надворі нема сильного вітру.*
 - 3) *Якщо студент п'є багато горілки, то у студента червоний ніс. У студента червоний ніс. Отоже, він п'є багато горілки.*
 - 4) *Якщо Петро є членом футбольної команди, то він обов'язково хоробрий і добре володіє технікою удару. Але він не належить до нашої команди. Отоже, він або не хоробрий, або ж не володіє технікою удару.*

- 5) Якщо йде дощ, то або ми нікуди не підемо, або ми підемо в кіно. Якщо ми підемо в кіно, то в кіно є квітки. Квітків у кіно нема. Отже, якщо піде дощ, то ми нікуди не підемо.
- 6) Якщо кут вписано в коло, то можливий один з трьох випадків: діаметр кола, проведений з вершини кута, лежить за кутом, є його стороною, або лежить всередині кута. У кожному з цих випадків доводиться, що кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається. Отже, довільний кут, вписаний в коло, вимірюється половиною дуги, на яку спирається.
- 7) Студентка або перевтомилася, або є хворою. Якщо перевтомлюється, то вона стає роздратованою. Але студентка не роздратована. Отже, вона хвора.
- 8) Якщо я поїду автобусом, а автобус запізниється, то я пропущу важливу зустріч. Якщо я пропущу зустріч і це мене засмутить, мені не варто їхати додому. Якщо я не отримаю цю роботу, то це мене засмутить і мені не варто буде їхати додому. Отже, якщо я поїду автобусом і автобус запізниється, то я отримаю цю роботу.
- 9) Якщо Олександра переможе на виборах, вона буде задоволена, а якщо вона буде задоволена, то вона поганий борець у передвиборчій кампанії. Але якщо вона програє на виборах, то втратить довіру партії. Олександра поганий борець у передвиборчій кампанії, якщо вона втратить довіру партії.

Якщо вона поганий борець у передвиборчій кампанії, вона повинна вийти з партії. Олександра або переможе на виборах, або програє. Отже, вона повинна вийти з партії.

- 10) *Намічена атака пройде вдало, якщо почнетися несподівано для суперника, або ж його позиції будуть погано захищені. Захопити його зненацька можна лише тоді, коли він досить безпечний. Але, якщо його позиції погано захищені, він не буде безпечним. Отже, атака не вдастися.*
- 11) *Якщо будувати протиатомні сковища, то інші держави будуть почувати себе в небезпеці, а у нашого народу буде хибне уявлення про свою безпеку. Якщо інші держави будуть почувати себе в небезпеці, то вони можуть почати превентивну війну. Якщо у нашого народу буде хибне уявлення про свою безпеку, то він послабить свої зусилля, спрямовані на збереження миру. Якщо ж не будувати протиатомні сковища, то ми ризикуємо мати величезні втрати у випадку війни. Отже, або інші країни можуть почати превентивну війну і наш народ послабить свої зусилля, спрямовані на збереження миру, або ми ризикуємо мати величезні втрати у випадку війни.*

- 12) Якщо капіталовкладення залишатсья незмінними, то зростуть урядові видатки або виникне безробіття. Якщо урядові видатки не зростуть, то податки будуть знижені. Якщо податки будуть знижені і капіталовкладення залишатсья незмінними, то безробіття не буде. Отже, урядові видатки зростуть.
- 13) Якщо D не зустрічав цієї ночі C , то або C був убивцею, або D бреше. Якщо C не був убивцею, то D не зустрічав C цієї ночі і вбивство відбулося після опівночі. Якщо вбивство мало місце після опівночі, то або C був убивцею, або D бреше. Отже, C був убивцею.
- 14) Якщо 2 просте число, то це найменше просте число. Якщо 2 найменше просте число, то 1 не просте число. Число 1 не є простим. Отже, 2 просте число.
- 15) Або Аня та Ваня одного віку, або Аня старша за Ваню. Якщо Аня та Ваня одного віку, то Оксана та Ваня не одного віку. Якщо Аня старша за Ваню, то Ваня старший за Віктора. Отже, або Оксана та Ваня не одного віку, або Ваня старший за Віктора.
- (27) Перевірити сумісність кожної з множин речень. Для цього запишіть речення у вигляді формул числення висловлень і перевірте, чи є їх кон'юнкція суперечністю.

- 1) Або свідок не був заляканий, або, якщо Генрі покінчив з життям самогубством, то записку знайдено. Якщо свідок був заляканий, то Генрі не покінчив з життям самогубством. Якщо записку було знайдено, то Генрі покінчив з життям самогубством.
- 2) Якщо вечір нудний, то або Аліса починає плакати, або Анатоль розповідає смішні історії. Якщо Сильвестр приходить на вечір, то або вечір нудний, або Аліса починає плакати. Якщо Анатоль розповідає смішні історії, то Аліса не починає плакати. Сильвестр приходить на вечір тоді і тільки тоді, коли Анатоль не розповідає смішні історії. Якщо Аліса починає плакати, то Анатоль розказує смішні історії.
- 3) Якщо курс цінних паперів зростає або процентна ставка знижується, то або падає курс акцій, або податки не зростають. Курс акцій знижується тоді і тільки тоді, коли зростає курс цінних паперів і зростають податки. Якщо процентна ставка спадає, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не зростає. Або зростають податки, або знижується курс акцій і знижується процентна ставка.
- 4) Договір буде виконано тільки в тому випадку, якщо будинок буде добудований у жовтні. Якщо ми добудуємо будинок у жовтні, то ми зможемо переїхати 1 листопада. Якщо ми не зможемо переїхати

1 листопада, то ми повинні будемо внести квартплату за листопад. Якщо договір не буде виконано, то ми повинні будемо внести квартплату за листопад. Ми не платитимемо квартплату за листопад.

- (28) На далекій планеті мешкають дві раси. Представники однієї завжди говорять тільки правду, представники іншої — завжди брешуть. Турист зупинився біля двох аборигенів і запитав у першого: «Ви завжди говорите тільки правду?» Той відповів: «Каліфінк-каліфінк». «Він сказав „так”», — пояснив другий, — «але він страшний бреxун». До якої раси належить кожен з аборигенів?

Розділ 3

ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

Числення висловлень, що розглядалось у попередніх розділах, є занадто бідним для опису та аналізу найпростіших логічних міркувань науки і практики. Так, навіть фразу “Всі люди смертні” не можна записати засобами цього числення. Неможливо нічого сказати про правильність такого міркування “Кожен птах має крила. Всі, хто має крила, можуть літати. Пінгвін має крила. Отже, пінгвін може літати.” Якщо в посиланнях йдеться про властивості або відношення між елементами деякої множини, а в ролі логічних наслідків бажано отримати інші властивості або відношення між елементами даної множини, то числення висловлень для цієї цілі виявляється непридатним.

У цьому розділі вивчається логічна система, яка носить назву *числення предикатів*. Цю ж систему інколи називають *логікою першого порядку*, або *елементарною логікою*. Числення предикатів будється, як і числення висловлень, за класичною схемою побудови формальних математичних теорій. Загальний підхід полягає в тому, що спочатку фіксується логіко-математична мова, а потім визначається система правил, які б дозволили проводити логічні міркування для отримання нетривіальних правильних висновків з урахуванням будови і змісту припущень. Важливість мови числення предикатів полягає в тому, що за її допомогою можна виразити значну частину математичних знань, відомих на даний час.

3.1. Алгебраїчні структури

Поняття математичної структури (чи математичної моделі) є фундаментальним для всієї математики. Воно ефективно використовується в багатьох розділах математики і природно заслуговує на більш детальний розгляд. Для осмислення математичних структур необхідно глибоко розуміти роль багатомісних відношень та загальних алгебраїчних операцій.

3.1.1. Алгебраїчні операції. В курсі загальної алгебри часто виникає необхідність розглядати різноманітні бінарні алгебраїчні операції. Тут розглянемо довільні n -арні операції. Нагадаємо, що коли X_1, X_2, \dots, X_n — деякі множини, то їх декартів добуток визначається як множина $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$. Для цього добутку часто використовують також скорочене позначення $\prod_{i=1}^n X_i$. Якщо $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, то використовують позначення $\prod_{i=1}^n X_i = X^n$. Множину X^n називають n -м декартовим степенем множини X . Приймемо $X^0 = \{*\}$, де $*$ означає деякий елемент. Тому X^0 — одноелементна множина, при $X \neq \emptyset$, вираз \emptyset^0 не має смісту. Зрозуміло, що $X^1 = X$.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.1. *n -арною алгебраїчною операцією* на множині X називається відображення $f: X^n \rightarrow X$ n -го декартового степеня множини X в саму множину X . Число $n \in \mathbb{N}$ називається *арністю* алгебраїчної операції.

Іншими словами, n -арна алгебраїчна операція — це деякий закон, який ставить у відповідність кожному впорядкованому n -елементному набору (x_1, x_2, \dots, x_n) елементів з X елемент з цієї

множини. Оскільки $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x \in X$, то природно називати елемент x *результатом виконання операції* f над елементами x_1, x_2, \dots, x_n в множині X . Використовується також термін “добуток елементів x_1, x_2, \dots, x_n стосовно операції f ”. При цьому інколи використовують такі записи: $fx_1x_2 \cdots x_n$, або $x_1x_2 \cdots x_nf$.

Історично першими виникли поняття бінарної ($n = 2$) та унарної ($n = 1$) алгебраїчної операції. *Унарна операція* на множині X — це відображення $\omega: X \rightarrow X$, тобто ендоморфізм цієї множини. При $n = 3$ отримуємо поняття *тернарної* алгебраїчної операції.

Нульарна операція ($n = 0$) визначається як відображення $\omega: X^0 \rightarrow X$, тобто $\omega: \{\ast\} \rightarrow X$. При цьому $\omega: \ast \mapsto x \in X$, тобто це операція вибору одного фіксованого елемента множини X . Отже *нульарні операції* на множині X — це фіксовані елементи множини X , їх також називають *виділеними елементами*.

ПРИКЛАД 3.1.2. (1) В групі задана одна нульарна операція — нейтральний елемент групи e .

В довільному кільці (полі) задано дві нульарні алгебраїчні операції — виділені елементи 0 і 1.

- (2) Перехід до оберненого елемента в групі G , тобто відображення $^{-1}: G \rightarrow G$, де $^{-1}(g) = g^{-1}$ для кожного $g \in G$, є унарною операцією в групі G .
- (3) Нехай V — лінійний простір над полем P , $\lambda \in P$ — фіксований елемент. Унарна операція $f_\lambda: V \rightarrow V$ — множення на скаляр λ — задається правилом: $f_\lambda(u) = \lambda \cdot u$, $u \in V$. Операція f_λ називають “розтягом” у λ разів або гомотетією з коефіцієнтом λ .

Отже, гомотетії, що виникли в геометрії, можна розглядати як унарні алгебраїчні операції.

- (4) Диференціювання можна розглядати як унарну алгебраїчну операцію на множині нескінченно диференційовних функцій.
- (5) Додавання і множення дійсних чисел є бінарними алгебраїчними операціями.
- (6) Прикладом тернарної операції на множині дійсних чисел \mathbb{R} є відображення $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$.
- (7) Знаходження найбільшого спільного дільника трьох натуральних чисел є прикладом тернарної операції на множині натуральних чисел \mathbb{N} .
- (8) Обчислення середнього арифметичного (середнього геометричного) n дійсних чисел є n -арною операцією на множині додатних дійсних чисел.

3.1.2. n -місні відношення і предикати. З курсу дискретної математики студенти знайомі з поняттям бінарного відношення на множині. Тут ми розглянемо загальніше поняття — n -арного відношення.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.3. *n -місним (n -арним) відношенням на множині X* називається будь-яка підмножина n -ого декартового степеня X^n множини X :

$$R \subseteq X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ разів}}.$$

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.4. *n -місним (n -арним) предикатом на множині X* називається відображення $\theta: X^n \rightarrow \{0, 1\}$.

При цьому кожному n -елементному набору (x_1, x_2, \dots, x_n) відповідає єдиний елемент — 0 або 1.

Набори, на яких предикат приймає значення 1, називаються *елементами істинності предиката*, а набори, на яких він приймає значення 0, — *елементами хибності*. Предикат — це, насправді, характеристична функція деякої підмножини в X^n , тобто деякого відношення. Отже, n -місні предикати можна ототожнити з характеристичними функціями відповідних n -місних відношень. Таким чином відношення і предикати перебувають у взаємно однозначній відповідності. Одномісні предикати $p: X \rightarrow \{0, 1\}$ виражают властивості елементів множини X , на якій вони визначені, а двомісні, тримісні тощо (взагалі кажучи, n -місні, $n > 1$) виражают відношення між елементами множини.

Висловлення можна розглядати як нульарні предикати. n -місні предикати можна розглядати як “висловлення від n змінних”. Якщо цим змінним надати конкретні значення, він перетвориться на висловлення.

ПРИКЛАД 3.1.5. (1) Нехай $X = \mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Тоді відображення

$$Q(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ — парне;} \\ 0, & \text{якщо } m \text{ — непарне} \end{cases}$$

є одномісним предикатом на множині цілих чисел \mathbb{Z} .

(2) Предикатом на множині натуральних чисел \mathbb{N} є відображення

$$P(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ — просте число;} \\ 0, & \text{якщо } m \text{ не просте.} \end{cases}$$

- (3) Прикладом двомісного предикату на множині дійсних чисел \mathbb{R} є властивість пар чисел бути координатами точки, що лежить на даному колі L :

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in L; \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin L. \end{cases}$$

- (4) Предикат порядку

$$O(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x < y; \\ 0, & \text{якщо } x \geq y \end{cases}$$

на множині дійсних чисел є бінарним предикатом.

- (5) Двомісний предикат подільності на множині натуральних чисел

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ ділиться на } y; \\ 0, & \text{якщо } x \text{ не ділиться на } y. \end{cases}$$

- (6) Одномісний предикат $P(x) = “\sin^2 x + \cos^2 x = 1”$ на множині дійсних чисел є тотожно істинним.

- (7) Предикат суми

$$S(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a + b = c; \\ 0, & \text{якщо } a + b \neq c \end{cases}$$

є тернарним предикатом на множині дійсних чисел.

- (8) Предикат добутку

$$M(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } ab = c; \\ 0, & \text{якщо } ab \neq c \end{cases}$$

є тернарним предикатом на множині дійсних чисел.

3.1.3. Алгебраїчні системи та сигнатура. Алгебраїчною системою називають непорожню множину разом із заданими на ній операціями та відношеннями (різних арностей). Загальна теорія алгебраїчних систем сформувалася на початку 50-х рр. ХХ-го ст. на межі алгебри та математичної логіки. Алгебраїчні системи розрізняють за їх сигнатурою.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.6. Сигнатураю називається впорядкована трійка $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$, для якої виконуються такі умови:

- (1) $R \cap F = \emptyset$;
- (2) μ є відображенням $\mu: R \cup F \rightarrow \mathbb{N}$, яке ставить у відповідність елементам з множини $R \cup F$ натуральні числа \mathbb{N} .

Тобто, сигнатура алгебраїчної системи — це сукупність відношень та операцій на основній множині цієї алгебраїчної системи разом з їх арностями. Іншими словами, сигнатура визначає операції, відношення та їх арності.

Множина R називається *множиною символів відношень*, а її елементи — *символами відношень*; множина F називається *множиною символів алгебраїчних операцій* або *функціональних символів*, а її елементи — *символами операцій* або *функціональними символами*. Відображення μ називають *відображенням арності* або *місності* для сигнатури Σ .

Якщо $r \in R$, то число $\mu(r) = n$ називається *арністю* (*місністю*) символа *відношення* r . Якщо $f \in F$, то $\mu(f) = m$ називається *арністю* (*місністю*) символа *алгебраїчної операції* f .

Множину сигнатурних символів відношень можна записати так: $R = \{r_1^{n_1}, r_2^{n_2}, \dots\}$. Цей запис означає, що функція μ приймає значення n_1 на символі r_1 , тобто символ r_1 має місність n_1 , символ r_2 має місність n_2 , і т.д. Множина $F = \{f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, \dots\}$ —

множина сигнатурних операцій. Операція f_1 має арність m_1 , f_2 має арність m_2 і т.д. 0-місний функціональний символ називається *символом константи* або просто *константою*.

Якщо множини R і F скінченні або зліченні, то сигнатурні операції і відношення часто виписують у явному вигляді:

$$\Sigma = \langle r_1^{n_1}, r_2^{n_2}, \dots, f_1^{m_1}, r_2^{m_2}, \dots, c_1, c_2, \dots \rangle.$$

В загальному вигляді сигнатуру зручно записувати так:

$$\Sigma = \langle \{r_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{f_j^{m_j}\}_{j \in J}, \{c_k^{l_k}\}_{k \in K} \rangle.$$

Означення 3.1.7. Алгебраїчною системою \mathfrak{A} сигнатури $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ називається непорожня множина A , для якої задано множину символів операцій F і множину символів відношень R , причому

- (1) для довільного символа відношення $r_i^{n_i} \in R$ визначене відношення $\bar{r}_i^{n_i} \subseteq A^{n_i}$;
- (2) для кожного функціонального символу $f_j^{m_j} \in F$ задана алгебраїчна операція $\bar{f}_j^{m_j} : A^{m_j} \rightarrow A$.

Множина A називається *носієм* алгебраїчної системи \mathfrak{A} .

Тобто алгебраїчна система — це непорожня множина A , де кожному предикатному символу співставлено предикат на A , кожному функціональному символу співставлено операція на A , а кожній предметній константі співставлено деякий елемент множини A . Предикати, операції, константи позначають тими ж символами, що відповідні сигнатурні символи.

Алгебраїчну систему \mathfrak{A} записують так:

$$\mathfrak{A} = \{A; \{\bar{r}_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{\bar{f}_j^{m_j}\}_{j \in J}\}.$$

Алгебраїчні системи прийнято позначати готичними буквами \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , ..., можливо з індексами, а їх носії — відповідними латинськими буквами A , B , ..., можливо з відповідними індексами.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.8. Якщо множина операцій F порожня, то алгебраїчну систему $\mathfrak{A} = \{A; \{\bar{r}_i^{n_i}\}_{i \in I}\}$ сигнатури Σ називають *моделлю*. Тобто модель — це алгебраїчна система, яка не містить функціональних символів.

Якщо множина відношень R порожня, то алгебраїчну систему $\mathfrak{A} = \{A; \{\bar{f}_j^{m_j}\}_{j \in J}\}$ називають *універсальною алгеброю*.

ПРИКЛАД 3.1.9. Групи, кільця, лінійні простори, лінійні алгебри, лінійно впорядковані множини, бульові алгебри, гратки тощо є класичними прикладами алгебраїчних систем. Розглянемо детальніше їх та їх сигнатури.

- (1) Сигнатура групи складається з одної бінарної операції (групова операція), одної унарної операції (перехід до оберненого елемента) та одної 0-арної операції (нейтральний елемент групи): $\Sigma = \langle \circ, ^{-1}, e \rangle$.

Не всі алгебраїчні системи сигнатури Σ є групами.

Алгебраїчна система $\mathfrak{A} = \langle G; \circ, ^{-1}, e \rangle$ сигнатури Σ є групою, якщо виконуються три відомі аксіоми групи.

- (2) Сигнатурата кільця з одиницею складається з двох бінарних операцій (додавання та множення), однієї унарної операції (перехід до оберненого елемента стосовно додавання) та двох 0-арних операцій (елементів 0 і 1): $\Sigma = \langle +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$.

Алгебраїчна система $\mathfrak{A} = \langle R; +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ сигнатури Σ є кільцем, якщо виконуються аксіоми кільця.

- (3) Алгебраїчна система $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ сигнатурі $\Sigma = \langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$ називається *арифметикою натуральних чисел* або просто *арифметикою*.
- (4) Множина цілих чисел з двома бінарними операціями додавання і множення та відношенням порядку " $<$ ".
- (5) Сигнатура дійсних чисел містить відношення порядку.
- (6) Якщо сигнатура $\Sigma = \langle q \rangle$ алгебраїчної системи \mathfrak{A} складається з одного символа двомісного відношення q , то $\mathfrak{A} = \langle A, q \rangle$ називається *графом*.

Припустимо, що серед символів відношень в сигнатурі Σ є символ рівності, який на системі A інтерпретується самим відношеннем рівності, визначенним на множині A . 0–арні операції позначатимемо так само як і елементи, якими вони інтерпретуються.

Так само як у випадках груп, кілець, лінійних просторів, тощо, можна визначити поняття *підсистеми* \mathfrak{C} алгебраїчної системи \mathfrak{A} .

Означення 3.1.10. Алгебраїчна система $\mathfrak{C} = \langle C; \{\bar{r}'_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{\bar{f}'_j^{m_j}\}_{j \in J} \rangle$ називається *підсистемою* алгебраїчної системи $\mathfrak{A} = \langle A; \{\bar{r}_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{\bar{f}_j^{m_j}\}_{j \in J} \rangle$, якщо вона задоволяє умови:

- (1) множина C є підмножиною множини A ;
- (2) відношення $\bar{r}'_i^{n_i}$ та функції $\bar{f}'_j^{m_j}$ на підмножині C є обмеженнями відношень $\bar{r}_i^{n_i}$ та функцій $\bar{f}_j^{m_j}$ з множини A на підмножину C .

Нехай $\mathfrak{A} = (A, \bar{r}_i^{n_i}, \bar{f}_j^{m_j})_{i \in I, j \in J}$ і $\mathfrak{B} = (B, \bar{r}'_i^{n_i}, \bar{f}'_j^{m_j})_{i \in I, j \in J}$ — дві алгебраїчні системи одної і тої ж сигнатурі Σ .

Означення 3.1.11. Віображення $\varphi: A \rightarrow B$ називається *гомоморфізмом алгебраїчних систем* сигнатурі Σ , якщо:

(1) для кожного n_i -місного відношення $\bar{r}_i^{n_i}$ множини A іожної впорядкованої послідовності $(a_1, a_2, \dots, a_{n_i}) \in A^{n_i}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n_i}) \in \bar{r}_i^{n_i} \Leftrightarrow (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_{n_i})) \in \bar{r}'_i^{n_i};$$

(2) для кожного n_j -місної функції $\bar{f}_j^{m_j}$ на множині A іожної впорядкованої послідовності $(a_1, a_2, \dots, a_{m_j}) \in A^{m_j}$

$$\varphi(\bar{f}_j^{m_j}(a_1, \dots, a_{m_j})) = \bar{f}_j^{m_j}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{m_j})).$$

Тобто гомоморфізм алгебраїчних систем — це відображення φ , яке зберігає всі операції та відношення сигнатури Σ .

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.12. Біективний гомоморфізм φ алгебраїчних систем називають *ізоморфізмом*.

ЗАУВАЖЕННЯ 15. Алгебраїчні системи різних сигнатур не можуть бути ізоморфні, так само як і алгебраїчні системи різних потужностей (носії яких є множинами різних потужностей).

3.2. Мова числення предикатів

Основною формальною мовою теорії алгебраїчних систем є мова першого порядку. Розглянемо побудову мови числення предикатів. Схема побудови числення предикатів така ж, як і схема побудови числення висловлень. Спочатку фіксується мова, в якій визначаються правильно побудовані “змістовні” вирази, потім визначаються аксіоми та правила виведення.

Мова числення предикатів є розширенням мови числення висловлень. Мова, у свою чергу, складається з алфавіту, слів та речень. Деякі слова, тобто скінченні послідовності букв алфавіту,

називаються формулами теорії, а певного типу речення (послідовності слів) — секвенціями, аксіомами та теоремами формальної теорії. Послідовності секвенцій, тобто речень певного виду, називають доведеннями.

3.2.1. Алфавіт мови числення предикатів. Нехай $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ — деяка сигнатура.

Означення 3.2.1. *Алфавіт \mathcal{A}_Σ мови числення предикатів* складається з таких груп символів:

- (1) *символи (предметних) змінних*: їх є зліченна множина, яка позначається $V = \{v_1, \dots, v_n, \dots\} = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$;
- (2) *сигнатурні символи*:
 - *символи алгебраїчних операцій* (або *функціональні символи*): F — множина символів алгебраїчних операцій (функціональних символів) (серед них символи констант $c_1, \dots, c_n \dots$, які можна розглядати як 0-місні алгебраїчні операції) та
 - *предикатні символи*: R — множина предикатних символів;
- (3) *логічні символи*: \neg (заперечення), \wedge (кон'юнкція), \vee (диз'юнкція), \rightarrow (імплікація);
- (4) *знаки кванторів*: квантори загальності \forall та існування \exists ;
- (5) *допоміжні символи*: ліва та права дужки — “(” і “)”, кома — “,” та символ вивідності — “ \vdash ”.

Далі символи (предметних) змінних називатимемо *предметними змінними* або просто *zmінними*. Отже,

$$\mathcal{A}_\Sigma = V \bigcup F \bigcup R \bigcup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\} \bigcup \{\forall, \exists\} \bigcup \{(,), , , \vdash\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 16. Вважатимемо, що множина R містить символ “=” для позначення рівності елементів алгебраїчних систем.

ЗАУВАЖЕННЯ 17. Символи логічних зв’язок \neg , \wedge , \vee , \rightarrow розглядаються як букви алфавіту, а не логічні операції, що їм відповідають.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.2. *Слово* в алфавіті числення предикатів — це довільна скінчenna (можливо порожня) послідовність букв алфавіту числення предикатів. Слово β називається *підсловом* слова α , якщо $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2$ для деяких слів α_1 , α_2 .

У кожній мові нас цікавлять правильно побудовані вирази цієї мови. У мові числення предикатів є два види правильно побудованих виразів: терми і формули.

3.2.2. Терми сигнатури Σ . Вже звично терми логіки предикатів строго визначаються індуктивним шляхом. Перший пункт означення є базою індукції (в ньому безпосередньо вказується, які комбінації символів слід вважати найпростішими термами), а інші — кроком індукції (правила побудови) — правила, за якими будуються інші терми. Якщо вже побудовані деякі терми, то з них за цими правилами можна побудувати інші, складніші терми. Вважається, що всі терми будуються з термів з першого пункту індуктивного означення за допомогою послідовного використання цих правил побудови. Дамо тепер формальне означення термів.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.3. Нехай Σ — фіксована сигнатура. Терми сигнатури Σ визначаються за індукцією:

- (1) Символи предметних змінних $v_1, \dots, v_k, \dots \in V$ і предметних констант $c_1, \dots, c_p, \dots \in C$ терми сигнатури Σ довжини 1;

- (2) Якщо t_1, \dots, t_n — терми сигнатури Σ , і f^n — деякий n -арний функціональний символ сигнатури Σ , то слово $f^n(t_1, \dots, t_n)$ також є термом сигнатури Σ ;
- (3) Слово в алфавіті \mathcal{A}_Σ є термом тоді й лише тоді, коли воно отримується за правилами (1) і (2).

Отже, терм — це вираз, який будується з предметних змінних, предметних констант і допоміжних символів за допомогою скінченого числа застосувань алгебраїчних операцій з множини F . Тому кожний терм є або константою, або змінною, або має вигляд $f(t_1, \dots, t_n)$, де f — деякий n -арний функціональний символ сигнатури Σ , а t_1, \dots, t_n — терми.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.4. Кількість букв у термі називається *довжиною терма*.

Множину всіх термів сигнатури Σ позначатимемо через Tm_Σ .

ЗАУВАЖЕННЯ 18. Множина термів Tm_Σ завжди нескінчена, оскільки містить предметні змінні сигнатури Σ (навіть якщо в сигнатурі відсутні функціональні символи і константи).

- ПРИКЛАД 3.2.5.**
- (1) Якщо v_1, v_2, v_3 — символи предметних змінних, c_1, c_2 — символи предметних констант, $f_1^2, f_2^3, f_3^1, f_4^2$ — функціональні символи (2-місний, 3-місний та 1-місний відповідно), то слова $f_1^2(v_1, v_2), f_2^3(v_1, v_1, f_1^2(v_2, v_3)), f_2^3(f_3^1(v_2), f_1^2(f_3^1(v_3)), v_2), f_2^3(f_3^1(v_1), v_2, v_2)), f_4^2(f_1^2(c_1, v_2), f_1^2(v_1, f_1^2(c_2, v_3)))$ є термами.
 - (2) Нехай сигнатура $\Sigma = \{+, \cdot\}$ містить два двомісні функціональні символи $+$ і \cdot . Тоді слова $v_1 + v_2, (v_1 \cdot v_2) + v_2, (v_1 + v_2) \cdot v_3 + v_1 + v_1 \cdot v_1, 0 \cdot v_1 + (v_2 + 0 \cdot v_3)$ є термами довжини 3, 7, 13 та 11 відповідно. Ці слова є термами, наприклад, сигнатури кілець.

Зауважимо, що верхній індекс у позначенні алгебраїчної операції вказує на її арність.

3.2.3. Формули числення предикатів. Найпростішими формулами будь-якого числення, зокрема числення предикатів сигнатури Σ є, так звані, *атомарні формули*. Нагадаємо, що у численні висловлень атомарними формулами були самі пропозиційні змінні. Проте в численні предикатів атомарні формули вже мають складніший вигляд.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.6. *Атомарною формулою* числення предикатів сигнатури Σ називають слово одного з наступних двох типів:

- (1) Рівність двох термів, тобто формула вигляду $t_1 = t_2$, де t_1, t_2 — довільні терми сигнатури Σ ;
- (2) Якщо $r \in R$ — n -арний предикатний символ і t_1, t_2, \dots, t_n — терми, то слово $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ є атомарною формулою сигнатури Σ .

Зокрема кожна пропозиційна (нульмісна) буква r є атомарною формулою.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.7. Атомарні формули, які містять не більше одного сигнатурного символу, називаються *атомними*.

Атомні формули — це формули одного з таких видів: $v_i = x_j$, $v_i = c$, $c = v_i$, $v_i = f(v_1, \dots, v_n)$, $f(v_1, \dots, v_n) = v_i$, $r(v_1, \dots, v_n)$.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.8. *Формули числення предикатів* сигнатури Σ будуються за індукцією.

- (1) Кожна атомарна формула є формулою;
- (2) Якщо ϕ і ψ — формули числення предикатів сигнатури Σ , то слова

$$\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi)$$

є формулами;

- (3) Якщо ϕ — формула числення предикатів сигнатури Σ , а x — предметна змінна, то слова

$$\forall x \phi, \exists x \phi$$

є формулами;

- (4) Слово в алфавіті мови числення предикатів є формулою тоді й лише тоді, коли це випливає з пунктів 1 – 3.

Множину всіх формул сигнатури Σ надалі позначатимемо через Fm_{Σ} .

Процес переходу від ϕ до $\forall x \phi$ називається *навішуванням квантора загальності* на формулу ϕ , аналогічно формула $\exists x \phi$ отримується з ϕ *навішуванням квантора існування* на предметну змінну x .

Зрозуміло, що формули числення предикатів сигнатури Σ отримуються з атомарних (які містять терми) за допомогою з'єднання скінченної їх кількості за допомогою символів логічних операцій $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ та застосувань скінченної кількості процедур навішування кванторів \exists, \forall за деякими предметними змінними. При цьому будь-який з кванторів за предметною змінною x можна навішувати на формулу числення предикатів ϕ навіть тоді, коли x не має жодних явних входжень в формулу ϕ .

Означення 3.2.9. *Довжина формули* числення предикатів — це кількість букв алфавіту числення предикатів, які входять у цю формулу.

ПРИКЛАД 3.2.10. (1) Нехай алфавіт мови першого порядку \mathcal{L} містить двомісний предикатний символ r , одномісний функціональний символ f , двомісний функціональний символ g та символ константи c . Тоді слова

$$\forall v_1 \exists v_2 (r(v_2, f(v_3)) \vee \neg v_4 = g(v_1, v_1)),$$

$$\forall v_1 \exists v_3 (f(r(v_1, v_2)) \wedge \exists v_1 g(v_1, v_3)) \rightarrow \exists v_2 g(v_1, v_2),$$

є формулами мови \mathcal{L} . Тут v_1, v_2, v_3, v_4 — символи предметних змінних.

- (2) Припустимо, що алфавіт мови першого порядку \mathcal{L} містить двомісний предикатний символ \leq , два двомісні функціональні символи $+$ і \cdot та символ константи 1. Нехай $x, y, z, t, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ — символи предметних змінних. Тоді кожне зі слів

$$(\forall x x^2 + y^2 = 1 \vee (x = y \rightarrow \exists z xt = 1));$$

$$(\exists z xy \leq z \rightarrow \forall x \forall y xy + z^2 + 1 \leq t);$$

$$\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_{n+1} \exists x y_{n+1} x^n + y_n x^{n-1} + \dots + y_1 x + y_1 = 0.$$

є формулами мови \mathcal{L} . Зауважимо, що тут $x^2 = x \cdot x, x^n = \underbrace{x \cdot (x \cdot (x \cdot \dots \cdot x))}_n \dots$ і т.п.

- (3) Не є формулами такі слова:

$v_i = v_j \forall v_1$ (бо квантор $\forall v_1$ розміщений на не належному місці);

$c = v_1 \vee v_2 = c$ (бо немає зовнішніх дужок);

$(\forall v_1 r(f(v_3), v_2))$ (бо зайві зовнішні дужки);

$(\exists v_1 : r(v_1, v_2, v_3) \vee c = v_3)$, де r — двомісний предикат (бо слово $r(v_1, v_2, v_3)$ записане не за правилами мови \mathcal{L} ; крім цього, алфавіт не містить символу “:”).

ЗАУВАЖЕННЯ 19. Зауважимо, що кожну формулу числення висловлень можна розглядати як формулу числення предикатів

деякої сигнатури, якщо символи пропозиційних змінних вважати нульмісними предикатними символами.

Означення 3.2.11. Формула, яка не містить кванторів, називається *безкванторною*.

Так само як у численні висловлень визначаємо поняття підформули та входження підформули.

Означення 3.2.12. Якщо φ — формула, то підслово ψ слова φ називають *підформулою* формули ϕ , якщо слово ψ саме є формулою.

ПРИКЛАД 3.2.13. Для формули $\exists x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$, де P, Q — бінарні предикатні символи, наступні слова є підформулами: $\exists x \forall y P(x, y)$, $\forall y P(x, y)$, $P(x, y)$, $\forall x \exists y Q(x, y)$, $\exists y Q(x, y)$, $Q(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$. Проте слово $P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$, яке є частиною даної формули, не є її підформулою.

Точно так само як це було зроблено для мови числення висловлень можна довести такий факт.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.2.14. (1) *Кожну неатомарну формулу ϕ сигнатури Σ можна однозначно записати в одному з таких виглядів: $\neg\phi_1$, $\forall x\phi_1$, $\exists x\phi_1$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$, де ϕ_1 і ϕ_2 — деякі однозначно задані формули числення предикатів сигнатури Σ .*

(2) *Кожне входження символу $($, \neg , \forall , \exists однозначно визначає деяку підформулу формули ϕ сигнатури Σ .*

3.2.4. Вільні та зв'язані змінні і терми. Неважаючи на те, що доведення у численні предикатів дуже схожі на доведення числення висловлень, все ж виникають деякі ускладнення.

Зокрема, не завжди можна замінити входження змінної (точніше символу змінної) у формулу термом. Щоб зрозуміти у яких випадках це можна робити, введемо спочатку поняття *вільного* та *зв'язаного входження змінної* у формулу числення предикатів.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.15. Поняття вільного входження змінної в формулу вводиться індуктивно:

- (1) Кожне входження змінної x в атомарну формулу вільне;
- (2) Якщо входження змінної x у формулах ϕ, ϕ_1 і ϕ_2 вільне, і $y \neq x$ — інша змінна, то входження змінної x у формулах $\neg\phi, \forall y \phi, \exists y \phi, (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ залишається вільним.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.16. Якщо входження змінної x не є вільним, то це входження називають *зв'язаним*.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.17. Кожна змінна x , яка має хоч одне вільне входження у формулу ϕ , називається *вільною змінною формули* ϕ . Змінна, яка має хоч одне зв'язане входження у формулу ϕ , називається *зв'язаною змінною формули* ϕ .

Формула може містити як вільні, так і зв'язані входження одної й тої ж змінної x . Входження змінної може бути зв'язаним в деякій формулі і одночасно вільним у деякій іншій підформулі.

ПРИКЛАД 3.2.18. (1) У формулі $r_1^2(v_1, v_2)$ всі входження змінних v_1 та v_2 вільні.

- (2) У формулі $r_1^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_1 r_1^1(v_1)$ перше входження змінної v_1 вільне, а друге і третє — зв'язані; всі входження змінної v_2 вільні.

- (3) Для формулі $\forall v_1(r_1^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_1 r_1^1(v_1))$ всі входження змінної v_1 зв'язані, а всі входження змінної v_2 вільні.

(4) У формулі

$$\exists x((f(x, y) = z \vee \exists x \neg r(x, z))) \vee \neg \exists y r(y, x)$$

перше і друге входження змінної x зв'язані, а третє входження змінної x вільне, перше входження змінної y вільне, а друге її входження зв'язане. Обидва входження змінної z вільні.

Відзначимо, що запис $\phi(x_1, \dots, x_n)$ завжди означатиме, що всі змінні x_1, \dots, x_n входять вільно у формулу ϕ .

За твердженням 3.2.14 кожне входження одного з кванторів \forall або \exists у формулу ϕ визначає деяку її підформулу, яку надалі називатимемо *областю дії цього квантора*.

ПРИКЛАД 3.2.19. У формулі $\exists x(\exists z x = y^2 + z \rightarrow \forall y x + y = 1)$ формула $\exists z x = y^2 + z \rightarrow \forall y x + y = 1$, записана в дужках, є обlastю дії квантора $\exists x$, формула $\exists z x = y^2 + z$ – обlastю дії квантора $\exists z$ і формула $\forall y x + y = 1$ – обlastю дії квантора $\forall y$.

У цих термінах означення вільного і зв'язаного входження змінної можна переформулювати інакше. Входження змінної x у формулу ϕ є *зв'язаним*, якщо воно знаходиться в обlastі дії деякого входження квантора загальності \forall або існування \exists , за яким йде символ x . В іншому випадку воно є *вільним*.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.20. Формулу числення предикатів, яка не містить вільних предметних змінних, називають *реченням* (або *закненою формулово*).

ПРИКЛАД 3.2.21. Наступні формули є реченнями:

$$(1) \forall x p(x) \wedge \exists x q(x, x) \rightarrow \exists y r(x, y)$$

$$(2) \exists x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y);$$

- (3) $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge (R(x, z) \wedge R(z, y))))$;
- (4) $\exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 (\neg(v_1 = v_2) \wedge \neg(v_1 = v_3) \wedge \neg(v_2 = v_3))$. Це речення означає, що існує принаймні три різні елементи.
- (5) Вираз $\forall y \exists x f(x) = y$ є реченням. Формули $\exists x f(x) = y$ та $f(x) = y$ є підформулами цього речення, але жодна з них сама не є реченням.
- (6) Вираз $\exists x P(x, y) \vee \forall x Q(x, y)$ є формулою, але не реченням, бо змінна y є вільною.

Для будь-якої замкненої формулі (речення) ϕ сигнатури Σ і будь-якої алгебраїчної системи \mathfrak{A} сигнатури Σ можна говорити про істинність чи хибність формулі ϕ в цій алгебраїчній системі (інтерпретації) \mathfrak{A} .

ПРИКЛАД 3.2.22. Якщо предикат $R(x, y)$ заданий на множині дійсних чисел \mathbb{R} , то речення $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge (R(x, z) \wedge R(z, y))))$ інтерпретується як істинне. Проте, якщо цей самий предикат розглядати на множині натуральних чисел \mathbb{N} , це речення хибне.

Нехай t — терм. Якщо він залежить від змінних x_1, \dots, x_n і не залежить від інших змінних (тобто у його повному записі фігурують лише змінні зі списку x_1, \dots, x_n), то пишуть $t(x_1, \dots, x_n)$ і кажуть, що t залежить від змінних x_1, \dots, x_n і не залежить від інших змінних.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.23. Терм t називається *вільним для змінної x* в формулі ϕ , якщо жодне вільне входження змінної x в формулу ϕ не лежить в області дії жодного квантора $\forall y$ чи $\exists y$, де y — змінна, яка входить в терм t .

- ПРИКЛАД 3.2.24.
- (1) Терм y вільний для змінної x в формулі $r_1^1(x)$.
 - (2) Терм y не вільний для змінної x в формулі $\forall y r_1^1(x)$.
 - (3) Терм $f_1^2(x, y)$ вільний для змінної x в формулі $\forall y r_1^2(x, y) \rightarrow r_1^1(x)$.
 - (4) Терм $f_1^2(x, y)$ не вільний для змінної x в формулі

$$\exists z \forall y r_1^2(x, y) \rightarrow r_1^1(x).$$

3.2.5. Підстановка термів у формули. Далі з'ясуємо питання про те, коли можна здійснювати підстановку термів у формули замість змінних.

ОЗНАЧЕННЯ 3.2.25. Нехай x — змінна, t — терм, ϕ — формула. Терм t називається *допустимим для підстановки замість x у φ* , якщо виконуються такі умови:

- (1) Якщо ϕ — атомарна, то t допустимий для підстановки замість x у φ ;
- (2) Якщо $\phi = (\neg\psi)$, то t допустимий для підстановки замість x у ϕ тоді й лише тоді, коли t допустимий для підстановки замість x у ψ ;
- (3) Якщо $\phi = (\alpha \star \beta)$, де $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, то t допустимий для підстановки замість x у ϕ тоді й лише тоді, коли t допустимий для підстановки замість x у формулу α і у формулу β ;
- (4) Якщо $\phi = \nabla y \delta$, де $\nabla \in \{\forall, \exists\}$ і $y \neq x$ — змінна, то t допустимий для підстановки замість x у ϕ тоді й лише тоді, коли або
 - (а) x не входить вільно у ϕ , або
 - (б) якщо t не залежить від y і терм t допустимий для підстановки замість x у δ .

Таким чином, терм t допустимий для підстановки у формулу ϕ замість змінної x , якщо для кожної змінної y , що входить в t , формула ϕ не містить підформул вигляду $\forall y \psi$ і $\exists y \psi$, де x входить вільно у ψ ; тобто після підстановки жодна з вільних змінних, яка входить в терм t не опиниться під дією квантора \forall або \exists .

Результат підстановки замість всіх вільних входжень змінної x у формулу ϕ допустимого для підстановки терма t позначаємо ϕ_t^x .

ПРИКЛАД 3.2.26. (1) Якщо x — змінна, то терм x завжди допустимий для підстановки замість самого себе у кожну формулу φ і φ_x^x — це знову формула φ .

(2) Нехай x і y — змінні. Терм y не допустимий для підстановки замість x у формулу $\forall y x = y$, оскільки, якщо x замінити на y , то нова поява y попадає в область дії квантора $\forall y$. Це спричиняє зміну істинності формули. Істинність формули $\forall y x = y$ залежить від потужності носія структури у якій її інтерпретувати — вона істинна, якщо структура має лише один елемент і хибна в іншому випадку, а формула $\forall y y = y$ істинна в кожній структурі. Зауважимо, що друга формула отримується з першої заміною змінної x на терм y .

Цей приклад вказує на необхідність бути акуратним при підстановці термів замість змінних, а допустимі для підстановки терми можна підставляти на законний підставі.

(3) Розглянемо формулу $\phi = \exists y x + y = 2 \rightarrow x^3y = x + u$ і терм $t = xy$. Терм t допустимий для підстановки у цю формулу замість змінних y та u і не допустимий для

підстановки замість змінної x . У цьому випадку маємо такі результати заміни: $\phi_t^y = \exists y x + y = 2 \rightarrow x^4y = x + u$, $\phi_t^u = \exists y x + y = 2 \rightarrow x^3y = x + xy$.

- (4) Терм $t = x_1^2 + x_2^2$ допустимий для підстановки у формулу $\phi = \exists x_1 \forall x_2 x_1 x_3 = x_2 + x_3 \vee \exists x_3 x_2 x_3 = x_1$ замість змінної x_1 . Результатом підстановки буде формула $\phi_t^{x_1} = \exists x_1 \forall x_2 x_1 x_3 = x_2 + x_3 \vee \exists x_3 x_2 x_3 = x_1^2 + x_2^2$.
- (5) Нехай $\phi = (\exists x_1 - x_1 = x_3 \wedge \forall x_2 (x_3^2 + x_4^2) \cdot x_2 = 1)$. Розглянемо терми $t_1 = x_1^2 + x_2^2$, $t_2 = x_3$, $t_3 = x_1 \cdot x_2$, $t_4 = x_4$. Входження змінних x_1 і x_2 у цю формулу є зв'язаними, а входження змінних x_3 і x_4 – вільні. Терми t_1 , t_2 і t_4 допустимі для підстановки у ϕ замість змінних x_1 , x_2 і x_4 , а терм t_3 не допустимий для підстановки у ϕ замість змінної x_3 . Результатом підстановки буде формула $\phi_{t_1, t_2, t_4}^{x_1, x_2, x_4} = \phi$.

3.3. Аксіоми і правила виведення числення предикатів

3.3.1. Секвенції та аксіоми. Продовжуємо розглядати мову числення предикатів сигнатури

$$\Sigma = \langle \{r_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{f_j^{m_j}\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K} \rangle,$$

яку позначатимемо через \mathcal{L}_Σ . Вважаємо, що множина предикатних символів містить символ рівності $=$. Того ж ефекту можна було б досягти, ввівши символ рівності в алфавіт.

Множину всіх формул мови \mathcal{L}_Σ позначимо через F_Σ . Якщо $\phi \in F_\Sigma$ (ϕ – форма мови \mathcal{L}_Σ) і всі її вільні змінні належать множині $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, то пишемо $\phi = \phi(v_1, \dots, v_n)$ або $FV(\phi) \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$.

Якщо t_1, t_2, \dots, t_n – терми, допустимі для підстановки у формулу ϕ замість змінних v_1, \dots, v_n , то через $\phi_{t_1, \dots, t_n}^{v_1, \dots, v_n}$ позначають

формулу, отриману заміною вільних входжень кожної змінної x_i на терм t_i . Допустимість термів для підстановки означає, що після підстановки жодна з вільних змінних, яка входить хоч в один з термів t_1, t_2, \dots, t_n , не опиниться під дією квантора \forall або \exists .

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.1. Як і в численні висловлень, *секвенції мови числення предикатів* \mathcal{L}_Σ — це слова одного з чотирьох типів:

- (1) $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$;
- (2) $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$;
- (3) $\vdash \phi$;
- (4) \vdash ,

де $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ — формули мови \mathcal{L}_Σ .

Для скорочення записів позначатимемо великими буквами грецького алфавіту $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ набори формул. Зокрема, секвенції вигляду (1) і (2) скорочено записуватимемо так: $\Gamma \vdash \phi$, $\Gamma \vdash$.

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.2. *Схемами аксіом числення предикатів* сингнатури Σ є схеми секвенцій одного з трьох типів:

- $\phi \vdash \phi$, де $\phi \in F_\Sigma$;
- $\vdash x = x$, де x — предметна змінна;
- $x = y, \phi_x^z \vdash \phi_y^z$, де z — предметна змінна, а x і y — терми, допустимі для підстановки замість змінної z .

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.3. *Аксіомою числення предикатів* називається слово, що одержується з схеми аксіом підстановкою замість символу ϕ конкретної формули числення предикатів.

Інтуїтивний зміст цих аксіом зрозумілий. Проте про їх істинність ми поки-що не можемо сказати нічого. Відкладемо це питання до того часу, коли буде означене загальне поняття істинності секвенцій на довільних алгебраїчних системах.

3.3.2. Правила виведення. *Правило виведення* — це часткова функція багатьох змінних, визначена на множині наборів секвенцій числення предикатів, яка приймає значення з множини секвенцій. Всі правила виведення та допустимі правила виведення числення висловлень з розділу 2 є правилами виведення числення предикатів. Правда, оперують з секвенціями числення предикатів, а не з формулами числення висловлень.

В численні предикатів є такі правила виведення:

1. $\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\phi \wedge \psi)}$ — правило введення кон'юнкції;
читається: “якщо з множини формул Γ виводиться форма
ла ϕ і з множини формул Γ виводиться форма
ла ψ , то з множини формул Γ виводиться форма
ла $(\phi \wedge \psi)$.”
2. $\frac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \phi}$ — правило усунення кон'юнкції справа;
3. $\frac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ — правило усунення кон'юнкції зліва;
4. $\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash (\phi \vee \psi)}$ — правило введення диз'юнкції справа;
5. $\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \phi)}$ — правило введення диз'юнкції зліва;
6. $\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \psi; \Gamma_2, \chi \vdash \psi; \Gamma_3 \vdash (\phi \vee \chi)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \psi}$ — правило розбору ви-
падків (усунення диз'юнкції);
7. $\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)}$ — правило дедукції Ербрана (введення іmpli-
кації);
8. $\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \Gamma_2 \vdash (\phi \rightarrow \psi)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}$ — *modus ponens* (правило усунення
іmplікації);

9. $\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash}{\Gamma \vdash \phi}$ – правило міркування від супротивного (уснення заперечення);
10. $\frac{\Gamma_1 \vdash \phi; \quad \Gamma_2 \vdash \neg\phi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$ – правило виявлення суперечності;
11. $\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \chi}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \chi}$ – правило перестановки посилань;
12. $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$ – правило введення додаткових посилань (розширення).
- a) $\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash}$ – перестановка посилань не впливає на суперечність секвенцій;
- б) $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \psi \vdash}$ – долучення додаткових посилань не впливає на суперечність секвенцій;
- в) $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \phi}$ – з суперечливої множини формул можна вивести будь-яку формулу;
- г) $\frac{\Gamma, \phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\phi}$ – правило виведення заперечення;
- д) $\frac{\Gamma_1 \vdash \psi; \quad \Gamma_2, \psi \vdash \chi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \chi}$ – правило добутку виведень;
- е) $\frac{\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi}{\chi_1, \dots, \chi_m \vdash \phi}$, якщо $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ – розширене правило введення додаткових посилань, яке дозволяє долучати до посилань довільну скінченну множину формул;
- ж) $\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi}{\Gamma \vdash}$;
- з) $\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash}$.

Числення предикатів має ще додаткові правила виведення, зв'язані з кванторами:

1_p *Правило введення квантора загальності у висновок*

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x \phi},$$

якщо x не входить вільно у формули з набору $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.

2_p Правило введення квантора загальності у посилання

$$\frac{\Gamma, \phi_t^x \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \phi \vdash \psi},$$

де терм t допустимий для підстановки замість змінної x у формулу ϕ ;

3_p Правило введення квантора існування у висновок

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \phi},$$

де терм t допустимий для підстановки замість змінної x у формулу ϕ ;

4_p Правило введення квантора існування у посилання

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \phi \vdash \psi},$$

якщо x не входить вільно у формули з набору $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ та у формулу ψ .

3.3.3. Доведення у численні предикатів. Формальне доведення у численні предикатів цілком аналогічне вже розглянутому відповідному поняттю числення висловлень. Є лише дві відмінності. По-перше, тут ми маємо три схеми аксіом замість однієї, як у численні висловлень. По-друге, у доведеннях застосовується більше правил виведення: поряд з правилами, які використовуються у численні висловлень, у численні предикатів є ще чотири правила, зв'язані з кванторами.

Означення 3.3.4. Лінійним доведенням секвенції S у численні предикатів називають послідовність секвенцій $S_1, \dots, S_n = S$ числення предикатів, у якій секвенція S_1 є аксіомою числення предикатів і для кожного i , $1 < i \leq n$ секвенція S_i є або аксіомою або отримується з попередніх секвенцій за одним з правил виведення числення предикатів .

Як правило, зручніше вписувати та аналізувати доведення у вигляді дерева.

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.5. Дерево доведення у численні предикатів вводять індуктивно:

- (1) кожна секвенція S є деревом;
- (2) якщо D_1, \dots, D_l дерева, то вираз $D = \frac{D_1, \dots, D_l}{S}$ теж дерево;
- (3) кожне дерево будується з секвенцій числення предикатів за допомогою застосування скінченної кількості комбінацій двох попередніх властивостей 1) і 2).

З цього означення випливає, що запис дерева містить секвенції та риски. Секвенція, під якою немає риски, називається *заключною*, секвенції, над якими немає риски, називаються *початковими*, а частина дерева, що складається з риски та секвенцій над рискою та під рискою називається *переходом*. Дерево секвенцій D називається *доведенням секвенції S у вигляді дерева*, якщо його початкові секвенції є аксіомами, переходи є застосуваннями правил виводу, і S — заключна секвенція.

Як і в численні висловлень концепції лінійного доведення та доведення секвенції у вигляді дерева еквівалентні. Використовуючи точно ті ж міркування, що й у розділі 2 можна довести таку теорему.

ТЕОРЕМА 3.3.6. *Секвенція числення предикатів має доведення у вигляді дерева тоді і тільки тоді, коли вона має лінійні доведення.*

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.7. Секвенції, які мають доведення, називаються *теоремами* (або *вивідними секвенціями*).

Означення 3.3.8. Формулу ϕ ЧП називають *теоремою* (або *вивідною*), якщо секвенція $\vdash \phi$ є вивідною.

Вивчаючи числення висловлень, ми переконалися, що кожна теорема числення висловлень є тавтологією, тобто тотожно істинною формулою.

Означення 3.3.9. *Тавтологією числення предикатів* називають довільну формулу числення предикатів, отриману з деякої тавтології числення висловлень за допомогою заміни всіх її пропозиційних змінних на довільні формули числення предикатів.

Легко переконатися, що будь-яка тавтологія числення предикатів є загальнозначущою формулою (тобто тотожно істинною на всіх алгебраїчних структурах сигнатури Σ). Зауважимо, що коли в доведенні з числення висловлень в усіх секвенціях усі пропозиційні букви замінити формулами числення предикатів, то отримаємо доведення у численні предикатів. Зокрема, кожна тавтологія у численні предикатів є вивідною у численні предикатів.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.3.10. *Нехай ϕ – формула числення предикатів сигнатури Σ ($\phi \in \mathcal{L}_\Sigma$), x_1, \dots, x_n – предметні змінні, t_1, \dots, t_n – терми, допустимі для підстановки замість змінних x_1, \dots, x_n у формулу ϕ . $\phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ – формула, отримана заміною всіх вільних входжень змінних x_1, \dots, x_n термами t_1, \dots, t_n відповідно.*

Тоді в \mathcal{L}_Σ вивідні такі секвенції:

- (1) $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \phi \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n};$
- (2) $\phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \phi.$

ДОВЕДЕННЯ. Тут зручно написати лінійні доведення. Для доведення секвенції 1) почнемо з аксіоми $\phi_{t_1, n, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ і

застосуємо n разів правило 2_p) — введення квантора загальності у посилання:

$$\begin{array}{ll}
 \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} & \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \\
 \forall x_n \phi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^{x_1, \dots, x_{n-1}} & \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \\
 \forall x_{n-1} \forall x_n \phi_{t_1, \dots, t_{n-2}}^{x_1, \dots, x_{n-2}} & \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \\
 \dots & \dots \quad \dots \\
 \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \phi & \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}.
 \end{array}$$

Доведення 2) аналогічне до 1) з використанням правила 3_p) — введення квантора існування у висновок. Пропонуємо читачеві написати його самостійно. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 3.3.11. Якщо секвенція $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \phi$ вивідна в \mathcal{L}_Σ , і терм t допустимий для підстановки замість змінної x у формули $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi$, то секвенція

$$(\phi_1)_t^x, \dots, (\phi_n)_t^x \vdash \phi_t^x$$

теж є вивідна.

ДОВЕДЕННЯ. Запишемо лінійне доведення секвенції $(\phi_1)_t^x, \dots, (\phi_n)_t^x \vdash \phi_t^x$ (E означає застосування правила дедукції Ербрана, (MP) — правила modus ponens, (\forall) — правила введення квантора

загальності, і (3.4.2) — застосування твердження (3.4.2)):

$$\begin{aligned}
 \phi_1, \dots, \phi_n &\vdash \phi, & (E) \\
 \phi_1, \dots, \phi_{n-1} &\vdash \phi_n \rightarrow \varphi, & (E) \\
 \phi_1, \dots, \phi_{n-2} &\vdash \phi_{n-1} \rightarrow (\phi_n \rightarrow \varphi), & (E) \\
 \dots &\vdash \dots & (E) \\
 &\vdash (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow \phi) \dots)), & (E) \\
 &\vdash \forall x (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow \phi) \dots)), & (\forall) \\
 &\vdash (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow \phi) \dots))_t^x, & (3.3.10) \\
 (\phi_1)_t^x &\vdash (\phi_1)_t^x, \quad \vdash (\phi_1)_t^x \rightarrow ((\phi_2)_t^x \rightarrow \dots ((\phi_n)_t^x \rightarrow (\phi)_t^x \dots)), & (MP) \\
 (\phi_1)_t^x &\vdash (\phi_2)_t^x \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow \phi) \dots))_t^x & (MP) \\
 \dots &\vdash \dots & (MP) \\
 (\phi_1)_t^x, \dots, (\phi_1)_t^x &\vdash \phi_t^x. & (MP)
 \end{aligned}$$

□

НАСЛІДОК 20. Якщо секвенція $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \phi$ вивідна в \mathcal{L}_Σ , і терми t_1, \dots, t_n допустимі для підстановки замість змінних x_1, \dots, x_n у формули $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi$ то секвенція

$$(\phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$$

теж вивідна.

ДОВЕДЕННЯ. Застосувати n разів твердження 3.3.11. □

Ми будемо використовувати всі допустимі правила виведення з числення висловлень, вписані у твердження 2.1.29 і допустимі правила виведення, властиві численню предикатів. З тверджень 3.3.10 та наслідку 20 випливає, що правило виведення

$$\frac{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \phi}{(\phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \phi_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}} (*)$$

допустиме у численні предикатів.

ОЗНАЧЕННЯ 3.3.12. Дерева, початкові секвенції яких є аксіомами, а в переходах використовуються допустимі правила, називають *квазідоведеннями*.

З кожного квазідоведення можна отримати доведення, замінивши допустимі правила їх доведеннями.

Використовуючи допустиме правило (*), можемо довести секвенції з наступного твердження 3.3.13, що виражають властивості рівності термів. Для формулювання цього твердження необхідно ввести такі позначення: $t, q, s, q_1, q_2, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$ - терми мови \mathcal{L}_Σ . Вважаємо, що терми $q_1, q_2, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$ допустимі для підстановки замість змінних x_1, x_2, \dots, x_n , що входять у формулу ϕ . Запис $(t)_{q_1 \dots q_n}^{x_1 \dots x_n}$ означає терм, отриманий з терма $t(x_1, \dots, x_n)$ заміною змінних $x_1 \dots x_n$ на терми $q_1 \dots q_n$, відповідно.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.3.13. *Нехай $t, q, s, q_1, q_2, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$ - терми мови \mathcal{L}_Σ ; ϕ - формула мови \mathcal{L}_Σ - така, що записи $(\phi)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n}$ і $(\phi)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$ коректні (тобто терми $q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$ допустимі для підстановок і після підстановки вільні змінні не стають зв'язаними). Тоді в \mathcal{L}_Σ наступні секвенції вивідні:*

- a) $\vdash t = t$;
- б) $t = q \vdash q = t$;
- в) $t = q, q = s \vdash t = s$;
- г) $q_1 = s_1, \dots, q_n = s_n \vdash (t)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n} = (t)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$;
- д) $q_1 = s_1, \dots, q_n = s_n, (\phi)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\phi)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$.

ДОВЕДЕННЯ. а) Це безпосередній наслідок допустимого правила виведення (*) при $n = 1$, застосованого до аксіоми $\vdash x = x$.

б) Нехай x, y і z — символи змінних. Доведемо спочатку секвенцію $x = y \vdash y = x$. Для цього розглянемо дерево секвенцій

$$\frac{\frac{\frac{\vdash x = x}{x = y \vdash x = x} \quad \frac{x = y, (z = x)_x^z \vdash (z = x)_y^z}{x = y, x = x \vdash y = x}}{x = y \vdash x = x \rightarrow y = x}}{x = y \vdash y = x},$$

коренем якого є секвенція $x = y \vdash y = x$. Тепер досить застосувати допустиме правило виведення (*) до термів t і q та змінних x і y .

в) Тут зручніше написати лінійне доведення, що складається з секвенцій

$$\begin{aligned} &x = y, (x_1 = z)_y^{x_1} \vdash (x_1 = z)_x^{x_1}, \\ &x = y, y = z \vdash x = z, \\ &t = q, q = s \vdash t = s, \end{aligned}$$

у якому перша секвенція є аксіомою, друга — це просто інший запис першої, а третя отримується з другої за допустимим правилом виведення (*).

Оскільки секвенція г) є частковим випадком секвенції д), то досить довести д). Далі, якщо ми доведемо секвенцію д) для випадку $n = 1$, тобто доведемо секвенцію $q_1 = s_1, (\phi)_{q_1}^{x_1} \vdash (\phi)_{s_1}^{x_1}$, а тоді повторимо ще $n - 1$ разів проведене міркування, то отримаємо доведення цієї секвенції у загальному випадку. Але у випадку $n = 1$ секвенція д) — це просто аксіома 3) числення предикатів. \square

3.4. Еквівалентність формул числення предикатів

Ми розглянемо синтаксичну еквівалентність, яка базується на понятті вивідності формул. Існує ще інша, так звана сематична еквівалентність, заснована на понятті істинності формул. Проте таку еквівалентність ми ще не можемо тут розглядати.

3.4.1. Означення і початкові властивості.

ОЗНАЧЕННЯ 3.4.1. Дві формули $\phi, \psi \in \mathcal{L}_\Sigma$ називаються *еквівалентними*, якщо секвенції $\phi \vdash \psi$ і $\psi \vdash \phi$ вивідні в L_Σ . Якщо формули ϕ і ψ еквівалентні, то пишуть $\phi \equiv \psi$.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.2. *Відношення синтаксичної еквівалентності формул числення предикатів є відношенням еквівалентності на множині формул мови \mathcal{L}_Σ .*

ДОВЕДЕННЯ. Перевірка того, що відношення синтаксичної еквівалентності є рефлексивним, симетричним і транзитивним проводиться так само, як і в численні висловлень. \square

Дляожної еквівалентності формул у численні висловлень аналогічна еквівалентність зберігається і для формул числення предикатів. Крім цього, синтаксична еквівалентність формул узгоджена з логічними зв'язками та кванторами, що й складає сміст твердження 3.4.3.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.3. *Нехай $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ - формули мови \mathcal{L}^Σ . Припустимо, що $\phi_1 \equiv \phi_2$ і $\psi_1 \equiv \psi_2$. Тоді*

- 1) $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$;
- 2) $(\phi_1 \star \psi_1) \equiv (\phi_2 \star \psi_2)$, де $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$;
- 3) $\forall x \phi_1 \equiv \forall x \phi_2$, $\exists x \phi_1 \equiv \exists x \phi_2$.

ДОВЕДЕННЯ. Еквівалентності 1) і 2) можна довести буквально повторивши міркування, за допомогою яких у Розділі 2 були доведені аналогічні еквівалентності для формул числення висловлень.

Щодо 3), то запишемо такі лінійні квазідоведення:

$$\phi_1 \vdash \phi_2, \forall x \phi_1 \vdash \phi_2, \forall x \phi_1 \vdash \forall x \phi_2; \quad \phi_1 \vdash \phi_2, \phi_1 \vdash \exists x \phi_2, \exists x \phi_1 \vdash \exists x \phi_2.$$

У першому з них ми спочатку застосували правило 2_p), враховуючи що терм (змінна) x завжди допустимий для підстановки замість x у кожну формулу, і що $(\phi_1)_x^x = \phi_1$. Після цього до другої секвенції застосовуємо правило 1_p), оскільки x не входить вільно у $\forall x \phi_1$. У другому квазідоведенні спочатку застосовується правило 3_p), враховуючи, що $(\phi_2)_x^x = \phi_2$, а потім правило 4_p). \square

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.4. *Для формул мови \mathcal{L}_Σ виконуються такі еквівалентності:*

- ε) $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi;$
- ж) $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi;$
- з) $(\phi \vee \psi) \vee \chi \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi);$
- і) $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi);$
- к) $(\phi \wedge \psi) \vee \chi \equiv (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi);$
- л) $(\phi \vee \psi) \wedge \chi \equiv (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi).$

ДОВЕДЕННЯ. Всі ці еквівалентності можна довести буквально повторивши міркування, використані при доведеннях відповідних еквівалентностей формул числення висловлень. \square

3.4.2. Теорема про заміну. Як і в численні висловлень, покажемо, що при заміні деякого входження підформули на синтаксично еквівалентну формулу, отримуємо формулу, синтаксично еквівалентну початковій.

ТЕОРЕМА 3.4.5 (Про заміну). *Нехай ϕ – формаула мови числення предикатів \mathcal{L}_Σ , і нехай ψ – підформула формули ϕ . Припустимо, що $\psi' \equiv \psi$, і нехай ϕ' отримується з формули ϕ заміною деякого входження підформули ψ у формулу ϕ на формулу ψ' . Тоді $\phi \equiv \phi'$.*

ДОВЕДЕННЯ. Доведення дуже схоже на доведення відповідного результата у численні висловлень. А саме, використовуємо індукцію за побудовою формул (тобто за кількістю входжень логічних символів $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$ у формулу ϕ). Зауважимо, що коли $\phi = \psi$, то доводити нічого. Основа індукції — це випадок коли формула ϕ зовсім не містить логічних символів. У цьому випадку формула ϕ є атомарною, і тому вона не містить власних підформул. Зрозуміло, що в цьому випадку теорема очевидна.

Для продовження доведення припустимо, що формула ϕ не атомарна. Нехай ϕ має вигляд $\exists x \phi_1$, причому ϕ_1 має менше входжень логічних символів ніж ϕ і $\phi \neq \psi$. Тоді зрозуміло, що за індуктивним означенням ψ є підформулою формули ϕ_1 . Познавчивши через ϕ'_1 формулу, отриману заміною у ϕ_1 підформули ψ формулою ψ' . За припущенням індукції $\phi'_1 = \phi_1$, і з твердження 3.4.3 отримуємо, що $\phi = \exists x \phi_1 \equiv \exists x \phi'_1 = \phi'$.

Так само розглядаються випадки коли ϕ має вигляд $\forall x \phi_1$ або вигляд $\neg\phi_1$.

Нехай тепер $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$. Якщо $\phi \neq \psi$, то входження ψ є входженням в одну з підформул ϕ_1 або ϕ_2 . Не зменшуючи загальності припустимо, що ψ є підформулою формули ϕ_1 . Тоді, замінивши входження ψ у ϕ_1 формулою ψ' , за припущенням індукції отримуємо формулу $\phi'_1 \equiv \phi_1$. Застосовуючи твердження 3.4.3, маємо $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv (\phi'_1 \wedge \phi_2) = \phi'$.

Цілком аналогічно розглядаються випадки коли ϕ має вигляд $(\phi_1 \vee \varphi_2)$ або вигляд $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$. \square

3.4.3. Основні еквівалентності.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.6. *Нехай φ і ψ дві формулі мови \mathcal{L}^Σ . Маємо такі еквівалентності:*

- a) $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi);$

- б) $\neg\neg\phi \equiv \phi$ – закон подвійного заперечення;
- в) $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$ – закон заперечення кон'юнкції;
- г) $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ – закон заперечення диз'юнкції;
- д) $\phi \equiv \phi \wedge \phi$ – ідемпотентність кон'юнкції;
- е) $\phi \equiv \phi \vee \phi$ – ідемпотентність диз'юнкції.

ДОВЕДЕННЯ. Доведення очевидне, бо при заміні пропозиційних змінних на формули мови \mathcal{L}^Σ доведення ЧВ перейдуть у доведення мови \mathcal{L}^Σ . \square

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.7. *Нехай ϕ, ψ – формули мови \mathcal{L}_Σ . Припустимо, що змінна x не входить вільно у формулу ψ , а змінна у зовсім не входить у формулу ϕ . Тоді маємо такі еквівалентності формул числення предикатів:*

- а) $\neg\exists x \phi \equiv \forall x \neg\phi$;
- б) $\neg\forall x \phi \equiv \exists x \neg\phi$;
- в) $\forall x \phi \wedge \psi \equiv \forall x (\phi \wedge \psi)$, де x не входить вільно в ψ ;
- г) $\exists x \phi \wedge \psi \equiv \exists x (\phi \wedge \psi)$, де x не входить вільно в ψ ;
- д) $\exists x \phi \vee \psi \equiv \exists x (\phi \vee \psi)$;
- е) $\forall x \phi \vee \psi \equiv \forall x (\phi \vee \psi)$;
- ж) $\forall x \phi \equiv \forall y (\phi)_y^x$;
- з) $\exists x \phi \equiv \exists y (\phi)_y^x$.

ДОВЕДЕННЯ. а) Запишемо таке лінійне квазідоведення (згадаємо, що $\phi = \phi_x^x$):

1. $\phi \vdash \phi_x^x$ аксіома
2. $\phi \vdash \exists x \phi$ правило 3_p
3. $\neg \exists x \phi \vdash \neg \exists x \phi$ аксіома
4. $\neg \exists x \phi, \phi \vdash \exists x \phi$ правило введення додаткових посилань до 2
5. $\neg \exists x \phi \vdash$ правило виявлення суперечності (з 3 і 4)
6. $\neg \exists x \phi \vdash \neg \phi$ допустиме правило
7. $\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$ правило 1_p
8. $\neg \phi, \phi \vdash$
9. $\forall x \neg \phi, \phi \vdash$ правило 2_p
10. $\forall x \neg \phi, \exists x \phi \vdash$ правило 4_p
11. $\forall x \neg \phi \vdash \neg \exists x \phi$ допустиме правило

Отже секвенції 7 і 11 тут є теоремами, тому еквівалентність а) доведена.

б) Тут простіше замість явної побудови квазідоведення вивести б) з а). Оскільки в а) ϕ — довільна формула, то можемо її замінити формулою $\neg \phi$: $\neg \exists x \neg \phi \equiv \forall x \neg \neg \phi$. Скориставшись еквівалентністю $\neg \neg \phi \equiv \phi$ та теоремою про заміну, отримуємо $\neg \exists x \neg \phi \equiv \forall x \phi$. Далі, за твердженням 3.4.3 звідси отримуємо, що $\neg \neg \exists x \neg \phi \equiv \neg \forall x \phi$. Нарешті, використавши еквівалентність $\neg \neg \exists x \neg \phi \equiv \exists x \neg \phi$, отримуємо $\exists x \neg \phi \equiv \neg \forall x \phi$.

в) У цьому випадку запишемо два квазідоведення у вигляді дерев. Перше з них таке:

$$\frac{\frac{\frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \phi} 2_p \quad \frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \psi} 2_p}{\forall x (\phi \wedge \psi) \vdash \forall x \phi} 1_p \quad \frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \psi} 2_p}{\forall x (\phi \wedge \psi) \vdash \forall x \phi \wedge \psi}$$

Тут деякі переходи помічені символами 1_p або 2_p , які вказують які правила виведення використовуються на даному переході. Такий самий зміст ці символи мають і в наступному дереві, яке є доведенням секвенції $\forall x \phi \wedge \psi \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$:

$$\begin{array}{c}
 2_p \frac{\phi \vdash \phi}{\forall x \phi \vdash \phi} \\
 \frac{\forall x \phi, \psi \vdash \phi}{\forall x \phi \wedge \psi \vdash \phi} \quad \frac{\forall x \phi \wedge \psi \vdash \forall x \phi \wedge \psi}{\forall x \phi \wedge \psi \vdash \psi} \\
 \hline
 \frac{\forall x \phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\forall x \phi \wedge \psi \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)} \quad 1_p
 \end{array}$$

г) Як і у попередньому випадку в) запишемо квазідоведення у вигляді двох дерев.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\phi \wedge \psi \vdash \phi \quad 3_p}{\phi \wedge \psi \vdash \exists x \phi} \quad \frac{\phi \wedge \psi \vdash \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \exists x \phi \wedge \psi} \\
 \hline
 \exists x (\phi \wedge \psi) \vdash \exists x \phi \wedge \psi \quad 4_p
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \wedge \psi \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)} \quad 3_p \\
 \hline
 \frac{\exists x \phi, \psi \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)}{\exists x \phi \wedge \psi \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)} \quad 4_p
 \end{array}$$

д) Тут уже нема потреби писати доведення (хоч можна це робити). Замість цього скористаємося вже доведеними еквівалентностями, твердженням 3.4.3 та теоремою про заміну. Нам вже відомо, що $\forall x \phi \wedge \psi \equiv \forall x (\phi \wedge \psi)$. Підставивши тут $\neg\phi$ замість ϕ , $\neg\psi$ замість ψ і розглянувши заперечення обох частин, отримаємо, беручи до уваги твердження 3.4.3, що

$$\neg\forall x \neg\phi \wedge \neg\psi \equiv \neg\forall x \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Звідси випливає, використовуючи еквівалентність б) та закони де Моргана, вже доведені у Розділі 2, така еквівалентність

$$\exists x \neg\neg\phi \vee \neg\neg\psi \equiv \exists x (\neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi).$$

Тепер, застосувавши теорему про заміну та еквівалентності $\neg\neg\phi \equiv \phi$, $\neg\neg\psi \equiv \psi$, отримуємо

$$\exists x \phi \vee \psi \equiv \exists x (\phi \wedge \psi),$$

що й вимагається.

е) Ця еквівалентність доводиться так само як і д). Пропонуємо читачеві внести самостійно необхідні зміни у щойно проведенню доведенні або написати своє формальне доведення.

ж) Враховуючи очевидну рівність $\phi = (\phi_y^x)_x^y$ маємо два доведення:

$$\frac{\frac{\phi \vdash \phi}{\forall x \phi \vdash (\phi_y^x)_x^y} 2_p}{\forall x \phi \vdash \forall y \varphi_y^x} 1_p \quad \frac{\frac{(\phi_y^x)_x^y \vdash (\phi_y^x)_x^y}{\forall y \phi_y^x \vdash (\phi_y^x)_x^y} 2_p}{\forall y \phi_y^x \vdash \forall x \phi} 1_p$$

з) Знову для різноманітності виведемо цю еквівалентність з попередньої, використовуючи твердження 3.4.3. Як і раніше, за- мінимо у ж) ϕ на $\neg\phi$, і розглянемо заперечення від обох частин отриманого співвідношення:

$$\forall x \neg\phi \equiv \forall y \neg\phi_y^x; \exists x \neg\neg\phi \equiv \exists y \neg\neg\phi_y^x; \exists x \phi \equiv \exists y \phi_y^x.$$

□

3.4.4. Пренексна нормальна форма. Синтаксична еквівалентність формул мови \mathcal{L}^Σ є відношенням еквівалентності, яке розбиває множину всіх формул мови \mathcal{L}^Σ на класи еквівалентності. Надалі формули мови \mathcal{L}^Σ будуть нас цікавити з точністю до еквівалентності. Зрозуміло, що всі вивідні формули мови \mathcal{L}^Σ утворюють один клас еквівалентності. Тому важливою задачею є знаходження в класі еквівалентності формули найпростішого, порівняно з іншими, вигляду. Такими формулами є так звані нормальні форми, серед яких розглянемо диз'юнктивну нормальну форму та пренексну нормальну форму.

ОЗНАЧЕННЯ 3.4.8. Кажуть, що формула числення предикатів знаходиться у *диз'юнктивній нормальній формі*, якщо її можна

отримати з деякої формули числення висловлень, яка знаходитьться у діз'юнктивній нормальній формі шляхом заміни її пропозиційних букв на деякі атомарні формули числення предикатів.

Аналогічно визначається кон'юнктивна нормальна форма числення предикатів.

ОЗНАЧЕННЯ 3.4.9. Формула числення предикатів знаходитьться у *кон'юнктивній нормальній формі*, якщо її можна отримати з деякої формули числення висловлень, яка знаходитьться у кон'юнктивній нормальній формі шляхом заміни її пропозиційних букв на деякі атомарні формули числення предикатів.

ОЗНАЧЕННЯ 3.4.10. Кажуть, що формула ψ числення предикатів \mathcal{L}_Σ знаходитьться у *пренексній нормальній формі*, якщо вона має такий вигляд:

$$\psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi,$$

де Q_i — деякі квантори, а ϕ — формула числення предикатів у діз'юнктивній нормальній формі.

Вираз $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ називається *кванторною приставкою*, а формула ϕ — *матрицею формули* ψ . Якщо всі квантори $Q_i = \forall$, то ψ називається *універсальною*. Якщо всі квантори $Q_i = \exists$, то ψ називається *екзистенціальною формулою*.

ПРИКЛАД 3.4.11. (1) Розглянемо сигнатуру $\Sigma = \{=, <, +, \cdot\}$,

де $<$ — двомісний символ відношення, і два двомісні функціональні символи $+$ і \cdot . Розглянемо формулу $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge p_2)$ числення висловлень, яка знаходитьться у діз'юнктивній нормальній формі. Замінивши у цій формулі змінні p_1, p_2 і p_3 відповідно атомарними формулами

$x < y$, $x + y = xy$ та $x = y$, отримуємо формулу числення предикатів

$$(x < y \wedge \neg x + y = xy) \vee (\neg x = y \wedge x + y = xy),$$

що має диз'юнктивну нормальну форму.

(2) У сигнатурі Σ з попереднього прикладу формула

$$\exists x \forall y \exists z ((x < y \wedge \neg x + y = xy) \vee (\neg x = y \wedge x + y = xy))$$

знаходиться у пренексній нормальній формі.

ТЕОРЕМА 3.4.12. *Будь-яка формула ϕ числення предикатів еквівалентна деякій формулі ψ числення предикатів, яка має пренексну нормальну форму.*

ДОВЕДЕННЯ. Доведення розіб'ємо на декілька кроків.

Крок 1. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що формула ϕ не містить входжень символу імплікації \rightarrow . Справді, кожне входження цього символу визначає підформулу вигляду $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$. Використаємо еквівалентність $(\phi_1 \rightarrow \phi_2) \equiv (\neg \phi_1 \vee \phi_2)$. За теоремою про заміну після заміни підформули $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ формулою $(\neg \phi_1 \vee \phi_2)$, отримаємо формулу, еквівалентну формулі ϕ , яка містить менше символів \rightarrow . Повторюючи такий прийом декілька разів, отримаємо формулу, еквівалентну початковій формулі ϕ , яка не містить жодного входження символу \rightarrow .

Крок 2. Припустимо, що формула ϕ не містить кванторів. У такому випадку замінимо атомарні формули на пропозиційні змінні (причому різні атомарні формули замінимо різними пропозиційними змінними). Отримаємо формулу числення висловлень. Звівши її до диз'юнктивної нормальної форми і виконавши обернену заміну пропозиційних змінних на атомарні формули, отримаємо пренексну нормальну форму.

Крок 3. Припустимо, що формула ϕ містить квантори. У такому випадку використаємо індукцію за довжиною формул ϕ , причому під довжиною ми тут розуміємо сумарну кількість входжень логічних символів та атомарних формул.

Якщо формула має довжину 1, то вона є атомарною, і доводити нічого. В іншому випадку формула ϕ має один з виглядів:

- а) $\forall x \phi_1$,
- б) $\exists x \phi_1$,
- в) $\neg\phi_1$
- г) $(\phi_1 \star \phi_2)$, де $\star \in \{\vee, \wedge, \}$.

Припустимо, що теорема доведена для формул меншої довжини, зокрема для формул ϕ_1 і ϕ_2 . Якщо формула ϕ має вигляд $\forall x \phi_1$ або $\exists x \phi_1$, то за припущенням індукції формулі ϕ_1 і ϕ_2 зводяться до пренексної нормальної форми, а тому й формулі $\forall x \phi_1$ і $\exists x \phi_1$ теж зводяться до пренексної нормальної форми.

Якщо формула ϕ має вигляд $\neg\phi_1$, то за припущенням індукції формула ϕ_1 зводиться до пренексної нормальної форми

$$\phi_1 = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi_1,$$

де ψ_1 має диз'юнктивну нормальну форму, і кожен з символів Q_1, \dots, Q_n є одним з кванторів \forall або \exists . Використовуючи еквівалентності а) і б) твердження 3.4.7, отримуємо

$$\neg\phi_1 = \neg Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1 \equiv Q'_1 x_1 \dots Q'_m x_m \neg\psi_1,$$

$$\text{де } Q'_i = \begin{cases} \exists, & \text{якщо } Q_i = \forall, \\ \forall, & \text{якщо } Q_i = \exists. \end{cases}$$

Тепер зауважимо, що $\neg\psi_1$ має меншу довжину ніж формула ϕ . Тому $\neg\psi_1$ зводиться до пренексної нормальної форми. Звідси випливає, що і формула $\phi = \neg\phi_1$ зводиться до пренексної нормальної форми.

Крок 4. Залишається розглянути випадок, коли формула ϕ має вигляд $(\phi_1 \star \phi_2)$, де $\star \in \{\vee, \wedge\}$, причому принаймні одна з формул ϕ_1, ϕ_2 містить хоч один квантор. За припущенням індукції можемо вважати, що формули ϕ_1 і ϕ_2 мають пренексну нормальну форму.

Нехай $\phi_1 = Qx \phi'_1 \star \phi_2$, де $Q \in \{\forall, \exists\}$. Беручи до уваги еквівалентності ж) і з) твердження 3.4.7 можемо замінити формулу ϕ_2 еквівалентною формулою ϕ'_2 , такою що ϕ'_2 не містить жодного входження змінної x . Тому використовуючи еквівалентності в) — е) твердження 3.4.7, отримуємо

$$\phi = (\phi_1 \star \phi_2) \equiv (Qx \phi'_1 \star \phi'_2) \equiv Qx (\phi'_1 \star \phi'_2). \quad (**)$$

Нарешті, формула $\phi'_1 \star \phi'_2$ має меншу довжину ніж довжина ϕ , а тому вона зводиться до пренексної нормальної форми. Отже за $(**)$ і формула ϕ теж зводиться до пренексної нормальної форми.

□

ПРИКЛАД 3.4.13. Зведемо формулу числення предикатів

$$\exists x \forall y \ x < y \rightarrow (\forall x \ xy = x + y \vee \exists y \ x + y = x)$$

до пренексної нормальної форми. Для цього просто запишемо таку низку очевидних еквівалентностей:

$$\begin{aligned} & \exists x \forall y \ x < y \rightarrow (\forall x \ xy = x + y \vee \exists y \ x + y = x) \\ \equiv & \neg \exists x \forall y \ x < y \vee (\forall x \ xy = x + y \vee \exists y \ x + y = x) \\ \equiv & \forall x \exists y \ \neg x < y \vee (\forall x \ xy = x + y \vee \exists z \ x + z = x) \\ \equiv & \exists z \ \forall x \exists y \ \neg x < y \vee (\forall x \ xy = x + y \vee x + z = x) \\ \equiv & \exists z (\forall t \exists v \neg t < v \vee \forall x (xy = x + y \vee x + z = x)) \\ \equiv & \exists z \forall t \exists v \forall x (\neg t < v \vee xy = x + y \vee x + z = x). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що для зведення довільної формули ЧВ до КНФ (ДНФ) потрібно спочатку виключити логічні зв'язки \leftrightarrow та \rightarrow ,

усунути всі нещільні заперечення та подвійні заперечення, використовуючи закони де Моргана за властивості заперечення формул з кванторами, перейменувати зв'язані змінні, якщо це потрібно, і, нарешті, винести квантори у префікс, використовуючи еквівалентності з твердження 3.4.7.

3.5. Інтерпретація числення предикатів

Дотепер ми ще не досліджували істинності формул числення предикатів. Щоб описати процедуру перевірки істинності чи хибності тої чи іншої формули на фіксованій алгебраїчній системі використовують поняття інтерпретації.

Нехай маємо сигнатуру $\Sigma = \{R, F, C\}$, де R — множина предикатних символів, F — множина функціональних символів, і C — множина символів констант. Нагадаємо, що в означення сигнатури входить відображення “арності” $\mu: R \cup F \rightarrow \mathbb{N}$. Якщо для $r \in R$, $\mu(r) = n$, то кажемо, що r — n -арний (або n -місний) предикатний символ. Так само, якщо для $f \in F$, $\mu(f) = m$, то f називаємо m -арним (або m -місним) функціональним символом. За допомогою предикатних та функціональних символів позначають відношення та функції на конкретній множині A .

Алгебраїчна система \mathcal{A} сигнатури Σ — це множина A , така що

- 1) для кожного $r \in R$ з $\mu(r) = n$ на множині A існує n -арне відношення (яке позначаємо тою ж буквою r) $r \subset A^n$;
- 2) для кожного $f \in F$ з $\mu(r) = n$ на множині A існує n -арне відображення (яке позначаємо тою ж буквою) $f: A^n \rightarrow A$, тобто існує n -арна алгебраїчна операція на множині A ;
- 3) для кожного $c \in C$ у множині A виділено елемент (який позначаємо тою ж буквою) $c \in C$.

Формули і секвенції числення предикатів сигнатури Σ інтерпретують в алгебраїчних системах \mathcal{A} сигнатури Σ . Це буде зроблено у наступних пп. 3.5.1 і 3.5.2.

3.5.1. Інтерпретація термів та атомарних формул. *Інтерпретація змінних та констант.*

Нехай \mathcal{A} — деяка алгебраїчна система сигнатури Σ , A — носій цієї алгебраїчної системи.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.1. *Інтерпретацією змінних в алгебраїчній системі \mathcal{A} називається відображення $\lambda: V \cup C \rightarrow A$, де $V = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — множина символів предметних змінних, і C — множина символів констант.*

Якщо $\lambda(x_i) = a_i$, то кажуть, що при інтерпретації λ змінна x_i інтерпретується елементом $a_i \in A$. Так само, $\lambda(c_k) = \bar{c}_k$ є елементом множини A , що інтерпретує константний символ $c_k \in C$.

Інтерпретація термів. Кожну інтерпретацію λ змінних в алгебраїчній системі \mathcal{A} можна однозначно продовжити до інтерпретації множини термів $T = T(\Sigma)$ сигнатури Σ .

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.2. Інтерпретація λ термів визначається за індукцією за кількістю кроків у побудові термів:

- якщо терм t є змінною або константою, то елемент $\lambda(t)$ вже визначений;
- якщо t_1, \dots, t_n — терми, причому їх інтерпретації $\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_n)$ вже визначені, а f — n -арний функціональний символ (і, як ми домовилися раніше щодо позначень, f також позначає n -арну функцію на A), то $\lambda(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_n))$.

Отже терми інтерпретуються елементами множини A .

Інтерпретація атомарних формул. У численні предикатів сингнатури Σ маємо два типи атомарних формул: рівність термів $t_1 = t_2$ та формули типу $r(t_1, \dots, t_n)$, де t_1, \dots, t_n — терми і r — n -арний предикатний символ.

- формула $t_1 = t_2$ істинна в алгебраїчній системі \mathcal{A} при інтерпретації λ (означення: $\mathcal{A} \models_{\lambda} t_1 = t_2$), якщо $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$ в A , тобто рівні елементи $\lambda(t_1)$ і $\lambda(t_2)$ множини A .
- формула $r(t_1, \dots, t_n)$ істинна в алгебраїчній системі \mathcal{A} при інтерпретації λ (означення: $\mathcal{A} \models_{\lambda} r(t_1, \dots, t_n)$), якщо $r(\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_n))$ як елемент з A^n , задоволяє відношення r (нагадаємо, що ми домовилися позначати символи відношень та відповідні їм при інтерпретації λ відношения однаковими буквами).

ПРИКЛАД 3.5.3. Розглянемо алгебраїчну систему, базовою множиною якої є множина дійсних чисел \mathbb{R} , на якій задані звичайна операція додавання $+$ та звичайний порядок \leq . Нехай x, y і z — змінні і λ_1 — інтерпретація, для якої $\lambda_1(x) = \lambda_1(y) = 1$, $\lambda_1(z) = 2$. Атомарні формули $x + y = z$, $x \leq y$, $x \leq z$, $y \leq z$ істинні в цій алгебраїчній системі при інтерпретації λ_1 .

Нехай λ_2 — інша інтерпретація, для якої $\lambda_2(x) = 3$, $\lambda_2(y) = 0$ і $\lambda_2(z) = 3$. Стосовно інтерпретації λ_2 формула $x + y = z$ істинна, а формула $x \leq y$ ні.

3.5.2. Інтерпретація формул та секвенцій.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.4. Після того, коли інтерпретація атомарних формул λ в алгебраїчній системі \mathcal{A} вже задана, то інтерпретація

всіх формул визначається за індукцією за довжиною формул:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models_{\lambda} (\phi_1 \vee \phi_2) &\iff \mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_1 \text{ або } \mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_2; \\
 \mathcal{A} \models_{\lambda} (\phi_1 \wedge \phi_2) &\iff \mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_1 \text{ і } \mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_2; \\
 \mathcal{A} \models_{\lambda} (\phi_1 \rightarrow \phi_2) &\iff \mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_2 \text{ або } \mathcal{A} \not\models_{\lambda} \phi_1; \\
 \mathcal{A} \models_{\lambda} \neg\phi &\iff \mathcal{A} \not\models_{\lambda} \phi; \\
 \mathcal{A} \models_{\lambda} \forall x \phi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{для кожної інтерпретації } \lambda_1, \\ \text{що збігається з } \lambda \text{ на множині} \\ \text{вільних змінних формули } \forall x \phi, \\ \text{формула } \phi \text{ істинна для інтерпретації } \lambda_1; \\ \text{існує інтерпретація } \lambda_1, \\ \text{що збігається з } \lambda \text{ на множині} \\ \text{вільних змінних формули } \exists x \phi, \\ \text{для якої формула } \phi \text{ істинна.} \end{array} \right. \\
 \mathcal{A} \models_{\lambda} \exists x \phi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{для кожної інтерпретації } \lambda_1, \\ \text{що збігається з } \lambda \text{ на множині} \\ \text{вільних змінних формули } \forall x \phi, \\ \text{формула } \phi \text{ істинна для інтерпретації } \lambda_1; \\ \text{існує інтерпретація } \lambda_1, \\ \text{що збігається з } \lambda \text{ на множині} \\ \text{вільних змінних формули } \exists x \phi, \\ \text{для якої формула } \phi \text{ істинна.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.5. Формула ϕ числення предикатів сигнатури Σ називається *тотожно істинною* на алгебраїчній системі \mathcal{A} , якщо ϕ істинна в \mathcal{A} при будь-якій інтерпретації $\lambda: V \rightarrow A$.

Символічно ця ситуація записується як $\mathcal{A} \models \phi$.

ПРИКЛАД 3.5.6. В алгебраїчній системі $\{\mathbb{R}; =, \leq, +, \cdot, 0, 1\}$ формула $\forall x x^2 + y^2 + 1 \leq 0$ хибна для кожної інтерпретації, формула $\exists x x^2 + y \leq 1$ для деяких інтерпретацій істинна, а для деяких хибна, а формула $\neg x = 0 \rightarrow \exists y xy = 1$ істинна для кожної інтерпретації.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.7. Формулу числення предикатів, яка не містить вільних входжень змінних, називається *реченням*.

Виявляється, що істинність чи хибність речень не залежить від інтерпретації.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.5.8. Якщо ϕ – речення і існує інтерпретація λ , для якої $\mathcal{A} \models_{\lambda} \phi$, то $\mathcal{A} \models_{\lambda_1} \phi$ для кожної інтерпретації λ_1 .

ДОВЕДЕННЯ. Якщо слово ϕ не містить змінних, то твердження очевидне. В іншому випадку кожна предметна змінна формули ϕ перебуває в області дії деякого квантора. Якщо ϕ істинна при деякій інтерпретації λ , то, оскільки множина вільних змінних формули ϕ є порожньою, з означення інтерпретації отримуємо бажаний результат. \square

ПРИКЛАД 3.5.9. Розглянемо два речення $\forall x \exists y x < y$ і $\exists y \forall x x < y$. В алгебраїчній системі $\{\mathbb{R}, <\}$ перше з них істинне для кожної інтерпретації, а друге хибне для кожної інтерпретації.

Цей приклад також показує, що істинність чи хибність формул в загальному випадку залежить від порядку кванторів.

Залишилося проінтерпретувати секвенції.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.10. *Інтерпретація секвенцій.* Позначення інтерпретації секвенцій цілком аналогічне до позначень інтерпретацій формул.

- $\mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A} \models_{\lambda} \phi$ або існує формула ϕ_i , для якої $\mathcal{A} \not\models_{\lambda} \phi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ істинна в алгебраїчній системі \mathcal{A} при інтерпретації λ тоді й лише тоді коли істинна формула ϕ , або хибна хоч одна з формул ϕ_1, \dots, ϕ_n .

- $\mathcal{A} \models_{\lambda} \phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ тоді і тільки тоді, коли існує формула ϕ_i , для якої $\mathcal{A} \not\models_{\lambda} \phi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ істинна в алгебраїчній системі \mathcal{A} при інтерпретації λ тоді й лише тоді коли хибна хоч одна з формул ϕ_1, \dots, ϕ_n .

- $\mathcal{A} \models_{\lambda} \vdash \phi$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A} \models_{\lambda} \phi$.

Секвенція $\vdash \phi$ істинна в алгебраїчній системі \mathcal{A} при інтерпретації λ тоді й лише тоді коли істинна формула ϕ .

г) Секвенція \vdash хибна для кожної інтерпретації.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.11. Кажемо, що секвенція виконується на алгебраїчній системі \mathcal{A} , якщо існує хоча б одна інтерпретація λ на \mathcal{A} , для якої ця секвенція істинна на \mathcal{A} .

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.12. Кажуть, що формула ϕ виконується, якщо секвенція $\vdash \phi$ виконується.

ОЗНАЧЕННЯ 3.5.13. Секвенцію S називають тотожно істинною в алгебраїчній системі \mathcal{A} , якщо вона істинна для кожної інтерпретації λ на \mathcal{A} . Якщо секвенція тотожно істинна на кожній алгебраїчній системі, то вона називається *тотожно істинною*.

ЗАУВАЖЕННЯ 21. Інтерпретацію секвенцій можна звести до інтерпретації формул: секвенцію $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ — до формули $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow \phi) \dots)$, секвенцію $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ — до формули $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots (\phi_n \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi) \dots))$, де ϕ — довільна формула.

3.5.3. Тотожна істинність вивідних секвенцій. Як і для числення висловлень, кожна теорема ЧП є тотожно істинною.

ТЕОРЕМА 3.5.14. Якщо секвенція S є теоремою, то вона тотожно істинна.

ДОВЕДЕННЯ. Для доведення цієї теореми досить перевірити два факти: по-перше, тотожну істинність аксіом числення предикатів, і, по-друге, що в результаті застосування правил виведення до тотожно істинних секвенцій отримуються тотожно істинні секвенції.

Тотожна істинність аксіом $\phi \vdash \phi$ та $\vdash x = x$ очевидна. Якщо $x = y$, то за означенням інтерпретації формули ϕ_x^z і ϕ_y^z стверджують одну і ту ж властивість елементів носія алгебраїчної системи \mathcal{A} . Це й означає тотожну істинність аксіоми $x = y, \phi_x^z \vdash \phi_y^z$.

Залишається перевірити, що правила виведення зберігають тотожну істинність. Ми не будемо перевіряти це для всіх правил виведення, а обмежимося лише правилом розбору можливих випадків та правилами, які зв'язані з кванторами, залишаючи читачеві перевірку інших правил.

6) Правило розбору можливих випадків виглядає так:

$$\frac{\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash \varphi; \quad \phi_1, \dots, \phi_n, \psi \vdash \varphi; \quad \phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi \vee \psi}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi}.$$

Припустимо, що всі три секвенції над рискою тотожно істинні. Якби секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi$ під рискою не була тотожно істинною, то для деякої інтерпретації λ всі формули ϕ_1, \dots, ϕ_n були б істинними, а формула φ була б хибною. Тоді з істинності першої секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash \varphi$ над рискою отримуємо, що формула ϕ хибна, і так само з істинності другої секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi \vdash \varphi$ над рискою випливає хибність формули ψ . Тому формула $\phi \vee \psi$ хибна. Це суперечить істинності третьої секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi \vee \psi$ над рискою.

Тепер розглянемо правила виведення $1_p - 4_p$, зв'язані з кванторами.

$$1_p. \quad \frac{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \forall x \phi},$$

де x не входить вільно у формули ϕ_1, \dots, ϕ_n .

Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує інтерпретація λ , для якої секвенція під рискою хибна. Тоді для цієї інтерпретації всі формули ϕ_1, \dots, ϕ_n істинні, а формула $\forall x \phi$ хибна. Це, в свою чергу, означає, що для всіх інтерпретацій λ_1 , які збігаються з λ на множині вільних змінних формули ϕ , формула ϕ хибна при інтерпретації λ_1 . Тому, зокрема, формула ϕ хибна при

інтерпретації λ .

$$2_p. \quad \frac{\phi_1, \dots, \phi_n, \phi_t^x \vdash \phi}{\phi_1, \dots, \phi_n, \forall x \phi \vdash \psi},$$

де терм t допустимий для підстановки замість змінної x у формулу ϕ .

Знову, міркуючи від супротивного, припустимо, що існує інтерпретація λ , для якої секвенція під рискою хибна. Як і раніше, це означає, що всі формулі $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ істинні для інтерпретації λ , а формула ψ хибна. Але тоді з означення інтерпретації формули $\forall x \phi$ випливає істинність формули ϕ для інтерпретації λ . Тому з істинності секвенції над рискою отримуємо істинність формули ψ .

$$3_p. \quad \frac{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_t^x}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \exists x \psi},$$

де терм t допустимий для підстановки замість змінної x у формулу ψ .

Припустимо, що існує інтерпретація λ , для якої секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \exists x \psi$ хибна, в той час як секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_t^x$ істинна для кожної інтерпретації. Для цієї інтерпретації λ всі формули ϕ_1, \dots, ϕ_n істинні, а формула $\exists x \psi$ хибна. Отже формула ψ_t^x повинна бути хибною. Це суперечить істинності секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_t^x$ для інтерпретації λ .

Залишається ще одне правило виведення

$$4_p. \quad \frac{\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash \psi}{\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x \phi \vdash \psi},$$

де x не входить вільно у формули $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$.

Припустимо, що існує інтерпретація λ , для якої секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x \phi \vdash \psi$ хибна, а секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash \psi$ істинна. Для такої інтерпретації всі формули $\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x \phi$ істинні, отже й всі формули $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi$ істинні, а формула ψ хибна.

Але оскільки секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash \psi$ істинна для інтерпретації λ , то формула ψ теж повинна бути істинною. Отримана суперечність завершує доведення цього правила.

Перевірку інших правил виведення залишаємо читачеві. \square

3.6. Теорема Геделя про повноту

3.6.1. Несуперечливі теорії.

Означення 3.6.1. *Теорією* у мові першого порядку \mathcal{L}_1 називають підмножину T формул мови \mathcal{L}_1 , замкнену стосовно довільних застосувань правил виведення, тобто, якщо $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$ і секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ має доведення, то $\phi \in T$.

Означення 3.6.2. Теорію T називають *несуперечливою*, якщо існує формула ϕ мови \mathcal{L}_1 , що не належить до T .

ТВЕРДЖЕННЯ 3.6.3. *Наступні умови еквівалентні:*

- (1) *теорія T несуперечлива;*
- (2) *не існує такого скінченного набору формул $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$, для якого секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ мала б доведення.*

ДОВЕДЕННЯ. (1) \implies (2). Міркуючи від супротивного, припустимо, що для деякого набору формул $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$ секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ має доведення. Тоді для довільної формули ϕ секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \neg\phi \vdash$ теж має доведення (за правилом введення додаткових посилань). Тому за правилом міркування від супротивного формула ϕ належить до T .

(2) \implies (1). Знову міркуємо від супротивного. Якщо всі формули містяться в T , то для кожної формули ϕ , $\phi \wedge \neg\phi \in T$. Але оскільки секвенція $\phi \wedge \neg\phi \vdash$ є теоремою, то це суперечить умові (2). \square

ОЗНАЧЕННЯ 3.6.4. Скажемо, що теорія T має модель, якщо існують такі алгебраїчні системи \mathcal{M} і інтерпретація λ , що всі формули теорії T істинні при інтерпретації λ . Цей факт символічно позначають $\mathcal{M} \models_{\lambda} T$.

Алгебраїчну систему \mathcal{M} називають *моделлю теорії T* .

ОЗНАЧЕННЯ 3.6.5. Скажемо, що теорія T задовольняє умову $(*)$, якщо

для кожної формулі ϕ числення предикатів одна, $(*)$
і лише одна з формул ϕ , $\neg\phi$ належить T .

ОЗНАЧЕННЯ 3.6.6. Теорію, яка задовольняє умову $(*)$ іноді називають *повною*.

ОЗНАЧЕННЯ 3.6.7. Скажемо, що теорія T задовольняє умову $(**)$, якщо

для кожної формулі $\exists x \psi(x) \in T$ $(**)$
існує така предметна змінна y , що $\psi_y^x \in T$.

3.6.2. Лема Цорна. Пригадаємо деякі поняття, зв'язані з порядком.

Нехай M — частково впорядкована множина (тобто множина, на якій задане відношення порядку). Підмножина N множини M називається *лінійно впорядкованою*, якщо для довільних елементів $m, n \in N$ або $m \leq n$ або $n \leq m$. Частково впорядковану множину M називають *індуктивною*, якщо довільна лінійно впорядкована підмножина $N \subset M$ має верхню грань.

ЛЕМА 3.6.8 (Лема Цорна). Якщо частково впорядкована множина M індуктивна, то M має максимальний елемент.

3.6.3. Три леми про розширення теорій.

ОЗНАЧЕННЯ 3.6.9. Якщо T і T' — дві теорії і $T \subset T'$, то теорію T' називають *розширенням теорії T* .

ЛЕМА 3.6.10. *Нехай T — несуперечлива теорія. Тоді існує розширення T' теорії T , яке задовольняє умову (*).*

ДОВЕДЕННЯ. Використаємо стандартний спосіб застосування леми Цорна. Розглянемо множину \mathcal{N} всіх таких теорій \tilde{T} , що $T \subset \tilde{T}$ і \tilde{T} несуперечлива. Покажемо, що множина \mathcal{N} індуктивна.

Нехай $K = \{\tilde{T}_i \mid i \in I\}$ — лінійно впорядкована (стосовно включення) підмножина множини \mathcal{N} . Розглянемо об'єднання $\bar{T} = \bigcup_{i \in I} \tilde{T}_i$. Очевидно, що $T \subset \bar{T}$.

Доведемо, що теорія \bar{T} несуперечлива. Справді, якщо існують формулі $\phi_1, \dots, \phi_n \in \bar{T}$, для яких секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ є теоремою, то кожна формула ϕ_k , $1 \leq k \leq n$ належить до деякої теорії \tilde{T}_{i_k} . Оскільки всі \tilde{T}_{i_k} належать до лінійно впорядкованої множини K , то знайдеться індекс $i_0 \in \{i_1, \dots, i_n\}$, для якого $\tilde{T}_{i_k} \subset \tilde{T}_{i_0}$ для всіх k , $1 \leq k \leq n$. Секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash$ є теоремою в \tilde{T}_{i_0} , що суперечить несуперечливості теорії \tilde{T}_{i_0} . Ми довели, що \mathcal{N} індуктивна множина, тому за лемою Цорна існує максимальний елемент T' множини \mathcal{N} .

Перевіримо, що теорія T' задовольняє умову (*). Справді, якщо це не так, то існує формула ϕ з властивостями $\phi \notin T'$ і $\neg\phi \notin T'$. Розглянемо теорії $T_1 = T' \cup \{\phi\}$ і $T_2 = T' \cup \{\neg\phi\}$. Вони обидві суперечливі, оскільки T' максимальна несуперечлива теорія. З суперечливості теорії T_1 випливає існування такого набору формул $\phi_1, \dots, \phi_n \in T_1$, що секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi \vdash$ має доведення. Аналогічно, з суперечливості теорії T_2 отримуємо вивідну секвенцію $\psi_1, \dots, \psi_m, \neg\phi \vdash$ для деяких формул $\psi_1, \dots, \psi_m \in$

T' . За правилом введення додаткових посилань обидві секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_m, \phi \vdash$ та $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_m, \neg\phi \vdash$ є теоремами, а звідси випливає, що й $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_m \vdash$ має доведення. Це неможливо, оскільки теорія T' несуперечлива. \square

Далі, нам потрібно розширити мову \mathcal{L} . Розглянемо мову \mathcal{L}' , яка відрізняється від мови \mathcal{L} лише тим, що \mathcal{L}' містить більше символів змінних: якщо $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — множина символів змінних мови \mathcal{L} , то $\{x_1, \dots, x_n, \dots, y_1, \dots, y_n, \dots\}$ — множина символів змінних мови \mathcal{L}' .

ЛЕМА 3.6.11. *Нехай T — несуперечлива теорія з мовою \mathcal{L} . Тоді існує несуперечливе розширення $T' \supset T$ теорії T з мовою \mathcal{L}' , що задоволяє умову (**).*

ДОВЕДЕННЯ. Нагадаємо, що ми розглядаємо лише зліченні мови першого порядку. Тому всі теорії у таких мовах є зліченними.

Розглянемо всі формули теорії T , які мають вигляд $\phi = \exists x \psi$, і кожній такій формулі поставимо у відповідність спочатку змінну $y = y_\phi$, а тоді формулу $\psi(y) = \psi_y^x$. У такий спосіб ми розширюємо мову \mathcal{L} , долучаючи до \mathcal{L} нові символи змінних і розширюємо теорію T , долучаючи до T нові формули $\psi(y)$. Позначимо отриману теорію через T' .

Доведемо, що T' несуперечлива теорія. Досить показати, що для кожної формули $\psi(y)$ множина $T \cup \{\psi(y)\}$ несуперечлива. Якби це було не так, то існував би такий набір формул $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$, що секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi(y) \vdash$ мала б доведення. Тоді секвенція $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \neg\psi(y)$ теж має доведення. Оскільки y не входить у формули ϕ_1, \dots, ϕ_n , то звідси отримуємо доведення секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \forall y \neg\psi(y)$. Але $\forall y \neg\psi(y) \equiv \forall x \neg\psi(x) \equiv \neg\exists x \psi(x)$, тому

секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \neg \exists x \psi(x)$ і $\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x \psi(x) \vdash \neg \exists x \psi(x)$ також вивідні. В результаті маємо доведення секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x \psi(x)$ що неможливо, оскільки теорія T несуперечлива. \square

ЛЕМА 3.6.12. *Нехай T — несуперечлива теорія у мові \mathcal{L} . Існує розширення \mathcal{L}' мови \mathcal{L} та розширення T' теорії T , такі що*

- а) T' — несуперечлива теорія у мові \mathcal{L}' ;
- б) T' задоволює умови $(*)$ і $(**)$.

ДОВЕДЕННЯ. Побудуємо за індукцією два зростаючих ланцюжки

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 &\subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \dots \subset \mathcal{L}_n \subset \dots, \\ T = T_0 &\subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset \dots,\end{aligned}$$

а тоді візьмемо $\mathcal{L}' = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$ і $T' = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. Припустимо, що $n > 0$ і мови $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{n-1}$ та теорії T_0, \dots, T_{n-1} вже побудовані. Побудуємо мову \mathcal{L}_n та теорію T_n , розширюючи спочатку теорію T_{n-1} до теорії R_{n-1} за лемою 3.6.10 а тоді теорію R_{n-1} розширимо до теорії T_n за лемою 3.6.11. Зауважимо, що проміжна теорія R_{n-1} задоволює умову $(*)$, а теорія T_n задоволює умову $(**)$.

Розглянемо об'єднання $T' = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ теорій T_i , і доведемо, що теорія T' задоволює обидві умови $(*)$ і $(**)$.

Нехай ϕ — довільна формула числення предикатів у мові $\mathcal{L}' = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$. Покажемо, що $\phi \in T'$ або $\neg \phi \in T'$. Якщо $\phi \notin T'$ і $\neg \phi \notin T'$, то знайдеться $m > 0$, для якого $\phi \notin T_m$ і $\neg \phi \notin T_m$. Це суперечить умові $(*)$ для T_m .

Залишається перевірити умову $(**)$ для T' . Нехай $\phi = \exists x \psi \in T'$. Тоді $\phi \in T_m$ для деякого m . За побудовою теорії T' , існує змінна y , така що $\psi(y) \in T_{m+1} \subset T'$. Це завершує доведення леми 3.6.3. \square

3.6.4. Теорема про існування моделі.

ТЕОРЕМА 3.6.13. Якщо теорія T задовільняє умову (*), то T має модель.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай теорія T має сигнатуру

$$\Sigma = \{c_1, c_2, \dots, x_1, x_2, \dots, f_1, f_2, \dots, r_1, r_2, \dots\}$$

Побудуємо модель \mathcal{M} для теорії T .

Елементами множини M моделі \mathcal{M} будуть терми теорії T' , побудованої раніше у лемі 3.6.3. Для побудови інтерпретації формул теорії T починаємо, як звичайно, з інтерпретації атомарних формул.

Нехай t, s, t_1, \dots, t_n — терми теорії T і r — n -місний предикатний символ. Тоді атомарні формули $t_1 = t_2, r(t_1, \dots, t_n)$ інтерпретуємо як істинні у моделі \mathcal{M} , якщо для них існує доведення у теорії T' . (Оскільки множина речень теорії є замкненою стосовно доведень, то це означає, що формули $t_1 = t_2, r(t_1, \dots, t_n)$ належать до T' .)

Взагалі, формула ϕ істинна при даній інтерпретації, якщо вона має доведення у теорії T' .

Перевіримо, що виділене твердження справді задовільняє стандартне означення інтерпретації (див. п. 3.5.2).

- а) Формула $\neg\phi$ істинна тоді й лише тоді, коли $\neg\phi$ має доведення у T' . Оскільки T' несуперечлива, то це можливо тоді й лише тоді, коли $\phi \notin T'$, тобто тоді й лише тоді, коли ϕ хибна.
- б) Формула $\phi \vee \psi$ істинна тоді й лише тоді, коли $\phi \in T'$ або $\psi \in T'$. (Це переформулювання стандартного факту, перевірка якого використовує правила введення диз'юнкції та правило розбору можливих випадків.)

- в) Так само, використовуючи правила введення та вилучення кон'юнкції перевіряємо, що $\phi \wedge \psi$ істинна тоді й лише тоді, коли $\phi \in T'$ і $\psi \in T'$.
- г) Формула $\phi \rightarrow \psi$ істинна тоді й лише тоді, коли $\psi \in T'$ або $\neg\phi \in T'$. Це випливає з синтаксичної еквівалентності формул $\phi \rightarrow \psi$ і $\neg\phi \vee \psi$.
- д) Розглянемо формулу $\exists x\psi(x)$. За означенням нашої інтерпретації ця формула істинна тоді й лише тоді, коли вона має доведення у теорії T' . Ось це доведення: $\psi(y) \vdash \psi(y), \psi(y) \vdash \exists x\psi(x)$.
- е) Формула $\forall x \psi(x)$ істинна \iff формула $\neg\forall x \psi(x)$ хибна $\iff \exists x \neg\psi(x)$ хибна \iff дляожної змінної y мови \mathcal{L}' теорії T' формула $\neg\psi(y)$ невивідна у T' . За умовою (*) тоді всі формулі $\psi(y)$ вивідні у T' , отже формула $\forall x \psi(x)$ належить до T' .

□

3.6.5. Теорема Геделя про повноту. Нагадаємо, що формулу ϕ числення предикатів називають *тотожно істинною*, якщо вона істинна у кожній моделі числення предикатів при будь-якій інтерпретації.

ТЕОРЕМА 3.6.14 (Теорема Геделя про повноту). *Формула ϕ числення предикатів є теоремою тоді й лише тоді, коли вона тотожно істинна.*

ДОВЕДЕННЯ. Враховуючи теорему 3.5.14 про тотожну істинність вивідних формул, досить довести, що тотожно істинні формулі мають доведення.

Якщо формула ϕ тотожно істинна, то вона, зокрема істинна для інтерпретації, побудованої у доведенні теореми 3.6.13, а тому

вона має доведення у теорії T' з леми 3.6.3. Це означає, що існують формули $\phi'_1, \dots, \phi'_n \in T'$, для яких секвенція $\phi'_1, \dots, \phi'_n \vdash \phi$ має доведення у T' . Замінивши у цьому доведенні всі символи y , додатково введені при розширенні теорії T до теорії T' , символами змінних x , що не входять у формули ϕ'_1, \dots, ϕ'_n , отримаємо формули ϕ_1, \dots, ϕ_n теорії T та доведення секвенції $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$ у рамках теорії T . \square

3.7. Варіанти числення предикатів першого порядку

Мова кожної теорії T починається з множини символів A , яку називають *алфавітом*, а елементи цієї множини — *буквами*. Раніше вже була побудована мова логіки предикатів першого порядку. Зауважимо, що її можна будувати, використовуючи логічні зв'язки \neg та \vee , та квантор існування \exists . Справді, ми можемо провести всі побудови як і раніше, а потім ввести такі скорочення:

- $(\varphi \wedge \psi)$ для $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, \wedge — *символ кон'юнкції*;
- $(\phi \rightarrow \psi)$ для $(\neg\phi \vee \psi)$, \rightarrow — *символ імплікації*;
- $\forall x\phi$ для $\neg\exists x\neg\phi$, \forall — *універсальний квантор*;

Зрозуміло, що в результаті отримаємо мову \mathcal{L}_Σ .

Щоб отримати інші можливі системи числення предикатів, потрібно змінювати систему аксіом, запропоновану в 3.3.

3.8. Задачі і вправи до розділу 3

- (1) Скільки різних n -арних предикатів можна визначити на скінченній множині з m елементів?
- (2) На множині цілих чисел задано такі предикати: $N(x) = “x — натурульне число”, P(x) = “x — просте число”, Q(x) = “x — парне число”, D(x, y) = “x ділиться на y”$. Сформулювати і знайти значення істинності таких речень:

- 1) $P(2) \wedge Q(2);$
- 2) $\forall x (D(x, 2) \rightarrow Q(x));$
- 3) $\exists x (Q(x) \wedge D(12, x));$
- 4) $\forall x (N(x) \rightarrow (Q(x) \vee \neg Q(x)));$
- 5) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge D(y, x)));$
- 6) $\forall x \forall y (\neg Q(x) \rightarrow (P(y) \rightarrow D(y, x)));$
- 7) $\forall x \forall y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \neg D(x, y));$
- 8) $\forall x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow D(x, y));$
- 9) $\exists x \forall y ((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow D(x, y));$
- 10) $\forall x \exists y ((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow D(x, y)).$

(3) Задано предикати на множині дійсних чисел R:

- $P(x) = 1 \iff x$ — просте число;
- $R(x) = 1 \iff x$ — раціональне число;
- $I(x) = 1 \iff x$ — ірраціональне число;
- $Q(x) = 1 \iff x$ — парне число;
- $D(x, y) = 1 \iff x$ ділиться на y .

Знайти значення істинності таких речень:

- 1) $\exists x \exists y I(x) \wedge I(y) \rightarrow R(x - y);$
- 2) $\exists x P(x) \wedge D(x, -2);$
- 3) $\forall x D(x, x)$ на множині цілих чисел;
- 4) $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \wedge D(x, y)) \rightarrow (x = y);$
- 5) $\forall x \forall y \neg(x = 0) \wedge \neg(y = 0) \rightarrow \neg(xy = 0).$

(4) Записати подані речення мовою логіки предикатів.

- 1) *Не всі птахи вміють літати.*
- 2) *Ви можете обманювати декого весь час, ви можете обманювати всіх деякий час, але ви не можете обманювати всіх і весь час.*
- 3) *Кожний, хто є наполегливий, може вивчити логіку.*

- 4) Кожна форель — риба, але не кожна риба — форель.
- 5) Якщо сонце світить, то це комусь потрібно.
- 6) Всі риби, крім акул, люблять дітей.
- 7) Або кожен любить когось, і жоден не любить всіх, або деято любить всіх, і хтось не любить нікого.
- 8) Жодний політик не чесний.
- 9) Деято дотепній тільки коли п'яний.
- 10) Якщо кожен математик мислить логічно і деякі студенти допускають логічні помилки, то не всі студенти математики.
- (5) Записати заперечення таких формул логіки предикатів:
- 1) $\forall x \forall y \neg(x = 0) \wedge \neg(y = 0) \rightarrow \neg(xy = 0);$
 - 2) $\exists x(x^2 = 2);$
 - 3) $\forall x(((x > 0) \vee (x < 0)) \vee (x = 0)).$
- (6) Знайти значення істинності та побудувати заперечення поданих нижче речень, записавши їх попередньо в символічній формі.
- 1) Існують такі цілі числа, які не діляться самі на себе.
 - 2) Існує ціле число, яке не ділиться на жодне інше ціле число.
 - 3) Існує ціле число, на яке не ділиться жодне інше ціле число.
 - 4) Існує найменше ціле число, яке ділиться на задані цілі числа m та n .
 - 5) Довільне дійсне число є коренем деякого полінома з цілими коефіцієнтами.
- (7) Чи є термами такі слова:
- 1) $f^1(g^2(v_1, v_2));$

2) $g^2(f^1(v_2), h^3(v_1, v_2, v_3));$

3) $f^1(g^2(v_1), h^3(v_1, v_2, v_3))?$

(8) Описати множину всіх термів

1) від одної змінної v_1 і одномісного функціонального символа f^1 ;

2) від одної змінної v_1 і двомісного функціонального символа g^2 ;

3) від двох змінних v_1, v_2 і одномісного функціонального символа f^1 .

(9) Чи є формулами такі слова:

1) $q^3(v_1, f^1(V - 2), h^3(v_2, v_3, v_3));$

2) $(p^1(v_1) \rightarrow \forall v_2(q^3(v_1, v_2, v_3) \wedge p^1(g^2(v_1, v_2))));$

3) $f^1(h^3(v_1, v_2, v_3));$

4) $\exists v_1 \forall v_2 \dots \forall v_{v_1} (r^1(v_2) \wedge \dots \wedge r^1(v_{v_1}));$

5) $\forall x P(x, y) \vee \exists y Q(x, y);$

6) $x(Q \forall P)y \exists)(\vee;$

7) $(\forall y P(x, y) \rightarrow Q(x, y));$

8) $(\exists x P(x, y) \vee Q(x, y));$

9) $(\exists x \neg P(x, y) \wedge \neg \forall x Q(y, x));$

10) $\neg(\exists x \forall y \exists z R(x, y, z))?$

(10) Виписати всі підформули даної формули:

1) $q^2(f^1(v_1), g^2(v_1, v_2));$

2) $(\exists v_1 q^2(v_1, v_2) \rightarrow \neg(p^1(g^2(v_1, v_2)) \wedge \forall v_3 p^1(v_3)));$

3) $(\forall v_1 r^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_2 r^2(v_1, v_2));$

4) $(\forall v_2 \exists v_1 r_1^3(v_1, v_2, f_1^2(v_1, v_2))) \vee \neg \forall v_1 r_1^2(x_2, f_1^1(v_1));$

5) $\forall v_1 (\exists v_2 (\forall v_4 r_1^3(v_1, v_2, v_4))).$

(11) Визначити область дії кожного квантора. Вказати вільні і зв'язані входження змінних в такі формули. Для

кожної зв'язаної змінної вказати, яким саме квантором вона зв'язана.

- 1) $\forall v_3 (\forall v_1 r_1^2(v_1, v_2) \rightarrow r_1^2(v_3, v_1));$
 - 2) $\forall v_2 r_1^2(v_3, v_2) \rightarrow \forall v_3 r_1^2(v_3, v_2);$
 - 3) $(\forall v_2 \exists v_1 r_1^3(v_1, v_2, f_1^2(v_1, v_2))) \vee \neg \forall v_1 r_1^2(x_2, f_1^1(v_1));$
 - 4) $\forall v_1 (r^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_2 r^1(v_2));$
 - 5) $(\forall v_1 r^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_2 r^2(v_1, v_2));$
 - 6) $(\neg \exists v_2 r^2(v_2, v_2) \wedge r^1(f^2(v_1, v_2)));$
 - 7) $\forall v_1 r_1^1(v_1) \rightarrow r_1^2(v_1, v_2);$
 - 8) $\forall v_1 r_1^1(v_1) \vee r_1^2(v_1, v_2);$
 - 9) $\forall v_2 \neg r_1^1(v_1) \rightarrow r_2^3(v_1, v_2, v_3) \vee \forall v_1 r_2^1(v_1);$
 - 10) $\neg \forall v_1 r_1^1(v_1) \rightarrow (\exists v_2 r_2^1(v_2) \rightarrow r_1^2(v_1, v_2) \vee r_1^1(v_2));$
 - 11) $\forall v_1 (\exists v_2 (\forall v_4 r_1^3(v_1, v_2, v_4)));$
 - 12) $\forall v_1 \forall v_3 \forall v_4 r_1^1(v_1) \rightarrow r_2^1(v_3) \wedge \neg r_1^1(v_1);$
 - 13) $\exists v_1 \forall v_2 \exists v_3 r_1^1(v_1) \vee \exists v_2 \neg \forall v_3 r_1^3(v_3, v_2, v_1);$
 - 14) $\forall v_1 (r_1^1(f(v_1)) \wedge \exists v_1 r_1^2(v_1, v_3) \rightarrow \exists v_1 r_2^2(v_1, v_1)) \vee r_1^2(v_3, v_1);$
 - 15) $\forall v_3 (r_1^1(f(v_3)) \wedge \exists v_1 r_1^2(v_1, v_3) \rightarrow \exists v_2 r_2^2(v_3, v_2)) \vee r_1^2(v_3, v_1);$
 - 16) $\forall v_1 (r_1^1(f(v_1)) \wedge \exists v_1 r_1^2(v_1, v_3) \rightarrow \exists v_2 r_2^2(v_1, v_2)) \vee r_1^2(v_3, v_2);$
 - 17) $\forall v_1 (r_1^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_3 r_1^1(v_3) \wedge c_1) \vee r_1^1(v_1);$
 - 18) $\exists x (r^2(x, y) \vee \exists y r^2(y, x)).$
- (12) Які змінні є вільними, а які зв'язані у таких формулах:
- 1) $\forall x \phi(x, y, z);$
 - 2) $\exists x \phi(x, y, z);$
 - 3) $\forall x \forall y \phi(x, y, z);$
 - 4) $\exists x \exists y \phi(x, y, z);$
 - 5) $(\exists x \forall y \phi(x, y, z)) \rightarrow \psi(x, y, z);$
 - 6) $\forall x \forall y \phi(x, y, z) \wedge \forall x \psi(x, y, z);$
 - 7) $\forall x \phi(x, y, z) \rightarrow (\exists x (\exists y \psi(x, y, z) \wedge \forall x \theta(x, y, z)));$
 - 8) $\exists x (\phi(x, y, z) \rightarrow \psi(x, x, y)) \rightarrow (\exists x \exists y (\psi(x, x, y) \wedge \theta(x, y, y)));$

- 9) $\exists x (x < y \vee x < z);$
 10) $\exists x \forall y ((x < y) \rightarrow (x < z) \wedge (z < y));$
 11) $\exists x \forall y (x|y \wedge x|z \rightarrow x|z);$
 12) $(\forall x \exists y x < y) \vee (x < z);$
 13) $\exists x (x < x \vee x < z).$
 14) $\forall v_0 (p(v_0, v_1) \rightarrow \forall v_1 q(v_1));$
 15) $(\forall v_0 p(v_0, v_1) \rightarrow \forall v_1 r(v_0, v_1));$
 16) $(\neg \exists v_2 q(v_2, v_2) \wedge r(f(v_1, v_2)));$
 17) $\forall v_3 (\forall v_1 p(v_1, v_2) \rightarrow p(v_3, v_1));$
 18) $(\forall v_2 p(v_3, v_2) \rightarrow \forall v_3 r(v_3, v_2));$
 19) $((\forall v_2 \exists v_1 q(v_1, v_2, f(v_1, v_2))) \vee \neg \exists v_1 r(v_2, g(v_1, v_2)));$
 20) $p(v_0, v_1) \rightarrow \forall v_1 q(v_1)?$
- (13) Чи вільний терм t для змінної x в формулі ϕ , якщо
- 1) $t = f_1^2(v_1, v_2)$, $x = v_1$, $\phi = r_1^2(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_2 r_1^1(v_2);$
 - 2) $t = f_1^2(v_1, v_2)$, $x = v_1$, $\phi = (\forall v_2 r_1^2(v_2, c_1)) \vee \exists v_2 r_1^2(v_1, v_2);$
 - 3) $t = f(v_1, v_4)$, $x = v_1$, $\phi = \forall v_1 r^2(v_1, v_2);$
 - 4) $t = f(v_2, v_3)$, $x = v_1$, $\phi = (r^2(v_2, v_3) \rightarrow \exists v_3 q^1(v_3));$
 - 5) $t = f(v_2, v_3)$, $x = v_3$, $\phi = (r^2(v_2, v_3) \rightarrow \exists v_3 q^1(v_3))?$
- (14) Довести такі твердження:
- 1) Будь-який терм, що не містить змінних, вільний для будь-якої змінної в будь-який формулі;
 - 2) Терм t вільний для будь-якої змінної в формулі ϕ , якщо жодна змінна терма t не є зв'язною в ϕ ;
 - 3) x вільна для x в будь-який формулі;
 - 4) Будь-який терм вільний для змінної x в формулі ϕ , якщо ϕ не має вільних входжень змінної x .
- (15) Обчислити результати таких підстановок:
- 1) $\exists y P(x, y, z)_{f(x,y)}^x;$
 - 2) $\exists y P(x, y, z)_{f(x,y)}^y;$

- 3) $\exists y P(x, y, z)^x_{f(x,z)}$;
 4) $\exists z \forall y P(x, y) \rightarrow Q(x)^x_{f(x,z)}$;
 5) $\forall y P(x, y) \rightarrow Q(x)^x_{f(x,z)}$;
 6) $P(x, y) \rightarrow \forall y Q(y)^{x,y}_{f(x,z),z}$;
 7) $\forall y P(y, z) \vee \exists y R(x, y)^{x,y}_{f(x,z),z}$;
 8) $\exists y P(z, y, x)^{x,y,z}_{z,z,y}$;
 (16) Нехай $\Sigma = \{+, <, 1, 2, 3\}$ — сигнатура, де $+$ — бінарний функціональний символ, $<$ — бінарний предикатний символ, $1, 2, 3$ — символи констант. Позначатимемо $+(x, y) = x + y$, $< (x, y) = x < y$. Для наступних формул сигнатури Σ визначити:
 а) Які з цих формул є реченнями?
 б) Скільки атомарних підформул є в кожній з цих формул?
 в) Виписати всі терми з цих формул.
 г) Виписати всі її підформули.
 д) Які з цих формул є тавтологіями? Які з цих формул виконувані?
 1) $\forall x \exists y (x + y = 1)$;
 2) $\forall x \neg x < 1$;
 3) $(1 + 1 = 2)$;
 4) $2 < 1$;
 5) $\forall x 2 < 1 \rightarrow x + 2 < x + 1$;
 6) $\forall x \forall y \exists z x + y = z$;
 7) $\forall x \forall y \forall z ((x + 3 = y + 3 = z) \rightarrow y = z)$;
 8) $\forall x \forall y \forall z ((x + y = 3 \wedge x + z = 3) \rightarrow y = z)$;
 9) $\forall x \forall y ((x + 3 < y + 3) \rightarrow x < y)$;
 10) $\forall x \forall y (x < 2 \rightarrow x + 3 = 4)$.

- (17) Нехай сигнатура Σ складається з бінарного відношення P та унарного відношення F : $\Sigma = \{P, F\}$. Предикат $P(x, y)$ означає, що “ x є предком (батьком або матір’ю) для y ”, а $F(x)$ означає, що “ x є жінкою”. Записати у цій сигнатурі формулу від вказаної кількості змінних, яка означає, що
- 1) $\phi_B(x, y)$: x є братом y ;
 - 2) $\phi_A(x, y)$: x є тіткою y ;
 - 3) $\phi_C(x, y)$: x та y – двоюрідні;
 - 4) $\phi_O(x)$: x – єдина дитина в сім’ї;
 - 5) $\phi_T(x)$: x має рівно два брати.
 - 6) Навести приклад відношення в цій сім’ї, яке не можна виразити формулою в цій сигнатурі.
- (18) Нехай на множині людей задано предикати:
- $B(x, y) = 1 \iff x$ є батьком y ;
 - $M(x, y) = 1 \iff x$ є матір’ю y ;
 - $S(x, y) = 1 \iff x$ є сином y ;
 - $D(x, y) = 1 \iff x$ є дочкою y .
- Виразити через них такі формулі:
- 1) x брат y ;
 - 2) x тітка y ;
 - 3) x дядько y ;
 - 4) x та y внучки z ;
 - 5) x та y двоюрідні брати;
 - 6) x дід y ;
 - 7) x та y двоюрідні сестри;
 - 8) x та y племінники z ;
 - 9) x та y сестри;
 - 10) x, y та z брати.

- (19) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати формулу з одною вільною змінною x , істинну в \mathfrak{A} тоді і тільки тоді, коли
- 1) $x = 0$;
 - 2) $x = 1$;
 - 3) $x = 2$;
 - 4) $x = 4$;
 - 5) x — парне число;
 - 6) x — непарне число;
 - 7) x — просте число;
 - 8) x не є простим числом.
 - 9) $x > 3$;
 - 10) $x \leq 7$.
- (20) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати формулу з двома вільними змінними x та y , істинну в \mathfrak{A} тоді і тільки тоді, коли
- 1) $x = y$;
 - 2) $x \leq y$;
 - 3) $x < y$;
 - 4) x ділить y ;
 - 5) x та y є простими числами-близнюками;
 - 6) x та y — взаємно прості числа;
 - 7) 2 є найвищим степенем простого числа y , на яке ділиться x ;
 - 8) $x \equiv y \pmod{5}$;
 - 9) x найменший простий дільник y ;
 - 10) x та y мають однуакову парність.

- (21) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати формулу з трьома вільними змінними x , y та z , істинну в \mathfrak{A} тоді і тільки тоді, коли
- 1) z — найменше спільне кратне x та y ;
 - 2) z — найбільший спільний дільник x та y ;
 - 3) числа x та y є єдиними простими дільниками числа z .
- (22) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати речення, яке в моделі \mathfrak{A} виражає
- 1) комутативність додавання;
 - 2) асоціативність додавання;
 - 3) комутативність множення;
 - 4) асоціативність множення;
 - 5) дистрибутивність додавання стосовно множення;
 - 6) нескінченність множини простих чисел;
 - 7) будь-яке число є сумою чотирьох квадратів;
 - 8) існування найбільшого спільного кратного та найменшого спільного дільника для чисел, відмінних від нуля;
 - 9) нескінченність множини простих чисел-близнюків;
 - 10) те, що кожне парне число, більше за 2, є сумою двох простих.
- (23) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати речення, які в моделі \mathfrak{A} виражають
- 1) для дії множення натуральних чисел існує нейтральний елемент;

- 2) сума непарних чисел завжди є число парне;
- 3) добуток парних чисел є число парне;
- 4) сума довільних двох простих чисел є число непросте;
- 5) сума парного і непарного чисел є число непарне;
- 6) якщо число має парну останню цифру, то воно ділиться на 2;
- 7) якщо сума двох чисел і один з доданків ділиться на 3, то і другий доданок ділиться на 3;
- 8) існують такі прості числа p , що число $p - 1$ є повним квадратом;
- 9) кожне просте число є сумою трьох квадратів;
- 10) існують як завгодно великі проміжки натуральних чисел, які не містять простих чисел.
- (24) Нехай $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; S^3, M^3 \rangle$ — алгебраїчна система, де $S^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$, $M^3(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z$. Записати речення, які в моделі \mathfrak{A} виражаютъ
- 1) неіснування одиниці;
 - 2) скінченість множини простих чисел;
 - 3) кожне парне число є сумою трьох простих чисел;
 - 4) кожне число можна записати як суму двох квадратів;
 - 5) для кожного числа існує строго менше число;
 - 6) існування найбільшого натурального числа;
 - 7) рівняння $3x^2 + 2x + 1 = 0$ має рівно два різні корені;
 - 8) система рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ не має розв'язку.

Чи істинні ці речення в моделі \mathfrak{A} ?

- (25) Нехай M — множина точок, прямих та площин тривимірного евклідового з наступними предикатами:

- $T(x) = 1 \Leftrightarrow x$ — точка;
- $\text{Пр}(x) = 1 \Leftrightarrow x$ — пряма;
- $\Pi(x) = 1 \Leftrightarrow x$ — площини;
- $\Lambda(x, y) = 1 \Leftrightarrow x$ лежить на y ;
- $\Pi(x, y) = 1 \Leftrightarrow x$ і y паралельні.

Записати у вигляді формул такі твердження:

- 1) через кожні дві точки можна провести пряму; якщо ці точки різні, то така пряма єдина;
 - 2) через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину;
 - 3) якщо будь-які три з чотирьох точок лежать на одній прямій, то й усі чотири точки лежать на одній прямій;
 - 4) якщо кожна з двох прямих паралельна третьій, то вони паралельні;
 - 5) якщо кожні три з чотирьох прямих перетинаються в одній точці, то всі прямі перетинаються в одній точці;
 - 6) дві прямі перетинаються не більш ніж в одній точці;
 - 7) x — точка перетину прямих y та z ;
 - 8) точки x, y лежать на прямій, що паралельна прямій z ;
 - 9) прямі x, y, z перетинаються в одній точці;
 - 10) прямі x, y , проходять через точки u, v і є паралельними;
- (26) В моделі з одним двомісним предикатом $R(x, y)$ записати, що даний предикат $R(x, y)$:
- а) рефлексивний;
 - б) симетричний;

- в) транзитивний;
 г) $R(x, y)$ — відношення еквівалентності.
- (27) Нехай A — частково впорядкована множина і $Q^2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$. Записати, що:
- 1) x є найменший елемент;
 - 2) x є мінімальний елемент;
 - 3) x лежить між y та z ;
 - 4) множина цілком впорядкована;
 - 5) кожний максимальний елемент є мінімальним.
- (28) Нехай $X = P(A)$, де A — деяка множина і $Q^2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \subseteq y$. Записати, що:
- 1) x є перетином y та z ;
 - 2) x є об'єднанням y та z ;
 - 3) $x = \emptyset$;
 - 4) $x = A$;
 - 5) x є доповненням y .
- (29) Розглянемо $\mathfrak{A} = \langle P(A); =, f^2, g^2 \rangle$, де A — деяка множина, $f^2(x, y) = x \cap y$, $g^2(x, y) = x \cup y$, $=$ — предикат рівності множин. Записати, що
- а) $x \subseteq y$;
 - б) x є одноелементною множиною.
- (30) Записати в сигнатурі $\tau = \langle \leq, = \rangle$, де \leq та $=$ — двомісні предикати, аксіоми таких систем:
- 1) частково впорядкованої множини;
 - 2) лінійно впорядкованої множини.
 - 3) впорядкованої множини з найбільшим і найменшим елементом;
 - 4) булевої алгебри;
- (31) Записати у відповідній сигнатурі аксіоми:

- 1) групи;
- 2) абелевої групи;
- 3) кільця;
- 4) комутативного кільця;
- 5) тіла.

(32) Нехай формула ϕ не містить вільних входжень змінної x . Довести вивідність таких секвенцій числення предикатів:

- 1) $\vdash (\forall x\phi \equiv \phi)$;
- 2) $\vdash (\exists x\phi \equiv \phi)$;
- 3) $\vdash (\forall x\forall y\psi(x, y) \equiv \forall y\forall x\psi(x, y))$;
- 4) $\vdash (\exists x\exists y\psi(x, y) \equiv \exists y\exists x\psi(x, y))$;
- 5) $\vdash (\forall x\forall y\psi(x, y) \rightarrow \forall x\psi(x, x))$;
- 6) $\vdash (\exists x\psi(x, x) \rightarrow \exists x\exists y\psi(x, y))$;
- 7) $\vdash (\exists x\psi(x) \equiv \neg\forall x\neg\psi(x))$;
- 8) $\vdash (\forall x\psi(x) \equiv \neg\exists x\neg\psi(x))$;
- 9) $\vdash (\neg\forall x\psi(x) \equiv \exists x\neg\psi(x))$;
- 10) $\vdash (\neg\exists x\psi(x) \equiv \forall x\neg\psi(x))$;
- 11) $\vdash ((\forall x\psi(x) \wedge \forall x\chi(x)) \equiv \forall x(\psi(x) \wedge \chi(x)))$;
- 12) $\vdash ((\exists x\psi(x) \vee \exists x\chi(x)) \equiv \exists x(\psi(x) \vee \chi(x)))$;
- 13) $\vdash ((\phi \wedge \forall x\psi(x)) \equiv \forall x(\phi \wedge \psi(x)))$;
- 14) $\vdash ((\phi \vee \exists x\psi(x)) \equiv \exists x(\phi \vee \psi(x)))$;
- 15) $\vdash ((\phi \wedge \exists x\psi(x)) \equiv \exists x(\phi \wedge \psi(x)))$;
- 16) $\vdash ((\phi \vee \forall x\psi(x)) \equiv \forall x(\phi \vee \psi(x)))$;
- 17) $\vdash (\exists x(\psi(x) \wedge \chi(x)) \rightarrow (\exists x\psi(x) \wedge \exists x\chi(x)))$;
- 18) $\vdash ((\forall x\psi(x) \vee \forall x\chi(x)) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(x)))$;
- 19) $\vdash ((\phi \rightarrow \forall x\psi(x)) \equiv \forall x(\phi \rightarrow \psi(x)))$;
- 20) $\vdash ((\exists x\psi(x) \rightarrow \phi) \equiv \forall x(\psi(x) \rightarrow \phi))$;
- 21) $\vdash ((\forall x\psi(x) \rightarrow \phi) \equiv \exists x(\psi(x) \rightarrow \phi))$;

$$22) \vdash (\exists x (\phi \rightarrow \psi(x)) \equiv (\phi \rightarrow \exists x \psi(x))).$$

- (33) Нехай $\phi(x)$ не має вільних входжень y , y вільне для x в $\phi(x)$, $\phi(y)$ отримується з $\phi(x)$ заміною всіх вільних входжень x на y . Вивести секвенції:

$$(a) (\exists y \phi(y) \vdash \exists x \phi(x));$$

$$(b) (\forall x \phi(x) \vdash \forall y \phi(y)).$$

- (34) Довести, що вивідні такі секвенції:

$$1) (\phi \equiv \psi) \vdash (\neg\phi \equiv \neg\psi);$$

$$2) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\phi \wedge \chi) \equiv (\psi \wedge \chi));$$

$$3) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\chi \wedge \phi) \equiv (\chi \wedge \psi));$$

$$4) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\phi \vee \chi) \equiv (\psi \vee \chi));$$

$$5) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\chi \vee \phi) \equiv (\chi \vee \psi));$$

$$6) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\phi \rightarrow \chi) \equiv (\psi \rightarrow \chi));$$

$$7) (\phi \equiv \psi) \vdash ((\chi \rightarrow \phi) \equiv (\chi \rightarrow \psi));$$

$$8) \forall x (\phi \equiv \psi) \vdash (\forall x \phi \equiv \forall x \psi);$$

$$9) \exists x (\phi \equiv \psi) \vdash (\exists x \phi \equiv \exists x \psi);$$

$$10) \vdash ((\exists x (\psi(x) \rightarrow \chi(x))) \equiv (\forall x \psi(x) \rightarrow \exists x \chi(x))).$$

- (35) Звести до пренексної нормальної форми такі формули, якщо ϕ і ψ — безкванторні формули.

$$1) \neg \exists x \forall y \exists z \forall u \phi(x, y, z, u);$$

$$2) (\exists x \forall y \phi(x, y) \wedge \exists x \forall y \psi(x, y));$$

$$3) (\exists x \forall y \phi(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \psi(x, y));$$

$$4) (\exists x \forall y \phi(x, y) \vee \exists x \forall y \psi(x, y));$$

$$5) \forall x \phi \vee \forall x \psi;$$

$$6) \exists x \phi \wedge \exists x \psi;$$

$$7) \exists x \phi \rightarrow \forall x \psi;$$

$$8) \exists x \phi \rightarrow \exists x \psi;$$

$$9) \forall x \phi \rightarrow \forall x \psi;$$

$$10) \forall x \exists y ((\phi(x) \rightarrow \psi(y, z)) \rightarrow \exists z \forall z (\psi(x, z) \wedge \phi(y))).$$

(36) Звести до пренексної нормальній форми такі формули:

- 1) $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y));$
- 2) $\neg(\exists x \exists y \forall z \neg P(x, y, z)) \leftrightarrow \exists x \forall z \exists y \neg P(x, y, z);$
- 3) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall y (\forall z Q(x, z) \rightarrow \forall u P(u)));$
- 4) $\forall x P(x) \rightarrow \forall y (\exists z Q(x, y, z) \rightarrow (\neg \forall x (P(x) \wedge \wedge \exists x R(x, y))));$
- 5) $(\neg \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \vee \forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow P(y));$
- 6) $\exists x_1 P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 Q(x_1, x_2) \wedge \exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, x_3);$
- 7) $\forall x_2 \exists x_1 Q(x_1, x_2) \wedge \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \exists x_2 Q(x_3, x_2).$

Розділ 4

ТЕОРІЯ МОДЕЛЕЙ

Теорія моделей — розділ математичної логіки, який вивчає зв'язки між формальними логічними теоріями та їх інтерпретаціями. Вона виникла у 50-х роках ХХ-го століття у роботах А. Мальцева, А. Тарського, К. Геделя, Л. Левенгейма, Т. Скулема, А. Робінсона та інших математиків. Першими результатами теорії моделей прийнято вважати теорему Левенгейма-Скулема-Мальцевата та теорему компактності Геделя-Мальцева.

Основними задачами теорії моделей є вивчення можливостей формалізованої мови і класів структур, що визначаються засобами цієї мови.

4.1. Основні поняття теорії моделей

4.1.1. Теорії, структури та моделі. Нагадаємо, що сигнатурую називають трійку множин символів

$$\Sigma = \left(\{r_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{f_j^{m_j}\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K} \right),$$

де r_i — символи відношень, f_j — символи операцій, c_k — символи констант. Маючи сигнатуру Σ , можна розглядати алгебраїчні системи \mathfrak{A} сигнатури Σ :

$$\mathfrak{A} = \left\langle A, \{\bar{r}_i^{n_i}\}_{i \in I}, \left\{ \bar{f}_j^{m_j} \right\}_{j \in J}, \{\bar{c}_k\}_{k \in K} \right\rangle,$$

де $\bar{r}_i^{n_i}$, $\bar{f}_j^{m_j}$, \bar{c}_k — відповідні інтерпретації символів $r_i^{n_i}$, $f_j^{m_j}$, c_k в алгебраїчній системі \mathfrak{A} сигнатури Σ .

Раніше ми не розрізняли у позначеннях самі символи та їх інтерпретації. Цього дотримуватимемось і надалі.

Для вивчення теорій алгебраїчних систем ми побудували мову числення предикатів.

Нагадаємо, що формула називається *замкненою*, або *реченням*, якщо вона не містить жодного вільного входження жодної предметної змінної. Спочатку використовуватимемо при розгляді алгебраїчних систем лише реченням, зокрема в якості аксіом різних теорій будемо брати тільки речення.

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.1. Множина формул X числення предикатів сигнатури Σ називається *дедуктивно замкненою*, якщо будь-яка формула числення предикатів сигнатури Σ , яка виводиться зі скінченної підмножини формул множини X , сама належить до X .

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.2. *Модель* множини формул X — це така алгебраїчна система \mathfrak{A} сигнатури Σ , на якій істинні всі формули множини X . Це записують так: $\mathfrak{A} \models X$. Отже

$$\mathfrak{A} \models X \Leftrightarrow \forall \varphi \in X \mathfrak{A} \models \varphi$$

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.3. Множина формул X називається *сумісною*, якщо вона має хоча б одну модель.

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.4. *Теорією* називають дедуктивно замкнену множину речень.

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.5. Теорія називається *несуперечливовою*, якщо з неї не можна вивести жодного речення разом з його запереченнем. Таким чином,

$$T - \text{суперечлива} \iff \exists \varphi - \text{речення i } T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi).$$

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.6. Дві алгебраїчні системи \mathfrak{A} і \mathfrak{B} сигнатури Σ називаються *елементарно еквівалентними* (означення: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), якщо кожне речення сигнатури Σ , яке є істинним в \mathfrak{A} , є одночасно істинним в \mathfrak{B} , і навпаки.

Очевидно, що будь-які дві ізоморфні алгебраїчні системи є елементарно еквівалентними. Пізніше ми переконаємося, що обернене твердження невірне.

Далі для алгебраїчної системи \mathfrak{A} через $\text{Th}(\mathfrak{A})$ позначатимемо її теорію:

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\phi \mid \phi \text{ — речення сигнатури } \Sigma, \mathfrak{A} \vDash \phi\}.$$

Зрозуміло, що для двох алгебраїчних систем \mathfrak{A} і \mathfrak{B}

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B}).$$

4.1.2. Деякі приклади алгебраїчних систем.

4.1.2.1. *Сигнатура теорії кілець – Rings.* Сигнатура теорії кілець $\Sigma = \{+; -; \cdot; 0; 1\}$ має три бінарні функціональні символи $+$, $-$ і \cdot для позначення додавання, віднімання та множення елементів, причому символ \cdot , як правило, у записах пропускається, та двох символів констант 0 і 1, які інтерпретують нейтральні елементи стосовно додавання та множення відповідно.

Позначимо мову першого порядку з цією сигнатурою через $\mathcal{L}(\text{Rings})$. Теорія кілець — це множина речень в даній сигнатурі, які є наслідками шести аксіом кільця. Формули вигляду: $t_1 = t_2$, де t_1, t_2 — терми, будуть єдиними атомарними формулами. Формальна теорія кілець — це формальна логічна теорія, яка отримується з числення предикатів сигнатури кілець Σ додушенням аксіом кільця

$$(1) \forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z);$$

- (2) $\forall x \forall y \ x + y = y + z;$
- (3) $\forall x \ x + 0 = x;$
- (4) $\forall x \exists y \ x + y = 0;$
- (5) $\forall x \forall y \forall z \ (xy)z = x(yz);$
- (6) $\forall x \forall y \forall z \ ((x + y)z = xz + yz) \wedge (z(x + y) = zx + zy)$

до логічних аксіом числення предикатів.

4.1.2.2. *Сигнатура теорії полів.* Сигнатура теорії полів та ж, що й у теорії кілець.

Позначимо мову першого порядку з сигнатурою теорії полів через $\mathcal{L}(\text{Fields})$. Формальна теорія полів отримується з формальної теорії кілець додученням ще трьох аксіом

- (7) $\forall x \forall y \ xy = yx;$
- (8) $\forall x \ 1 \cdot x = x;$
- (9) $\forall x \ x \neq 0 \rightarrow \exists y \ xy = 1.$

Формальну теорію полів позначимо через Π .

Нехай R – деяке кільце. Додучимо до мови $\mathcal{L}(\text{Rings})$ множину константних символів по одному символу для кожного елемента з кільця R , і позначимо отриману розширену мову через $\mathcal{L}(\text{Rings}, R)$.

Кожна модель теорії Π є полем. Розширимо теорію Π , додувши рівності (вони задають так звану додатну діаграму кільця R):

$$a_1 + b_1 = c_1, \quad a_1 b_1 = c_1, \quad a_1, b_i, c_i \in R, \quad (1)$$

які є істинними в R . Позначимо отриману теорію через $\Pi(R)$. Моделлю для теорії $\Pi(R)$ є поле, що містить підмножину $\bar{R} = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, елементи якої задовольняють рівності

$$\bar{a}_1 + \bar{b}_1 = \bar{c}_1, \quad \bar{a}_1 \bar{b}_1 = \bar{c}_1,$$

якщо відповідні рівності з (1) істинні в R , тобто \bar{R} є гомоморфним образом R .

Якщо $R = K$ є полем, то \bar{K} – ізоморфна копія поля K . Тому моделями теорії $\Pi(K)$ будуть (з точністю до ізоморфізму) поля, які містять поле K , тобто розширення поля K .

Елементарне твердження про моделі теорії $\Pi(R)$ – це математичне твердження, що стосується моделей теорії $\text{Mod}(\Pi(R))$, і яке можна сформулювати у вигляді речення ϑ мови $\mathcal{L}(\text{Fields}, R)$.

ПРИКЛАД 4.1.7. Нехай $f(x_1, \dots, x_n)$ – поліном степеня d з коефіцієнтами з кільця R . Твердження “ $f(x_1, \dots, x_n)$ незвідний” є елементарним твердженням про моделі теорії $\Pi(R)$. Справді, воно еквівалентне кон'юнкції тверджень “не існує поліномів g і h степенів d_1 і d_2 відповідно, для яких $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$ ”, де (d_1, d_2) пробігає всі пари додатних чисел з властивістю $d_1 + d_2 = d$. Перепишемо твердження “не існує полінома $g(x_1, \dots, x_n)$ степеня d_1 ” у вигляді “ $\neg \exists u_1, \dots, \exists u_k$ ”, де u_1, \dots, u_k – змінні для коефіцієнтів полінома $g(x_1, \dots, x_n)$. Система рівностей між відповідними коефіцієнтами замінює рівність

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)h(x_1, \dots, x_n).$$

4.1.2.3. Сигнатура лінійних просторів. Нехай P – поле, V – лінійний простір над полем P . Сигнatura лінійних просторів $\Sigma = \{+; -; 0; \{\lambda\}_{\lambda \in P}\}$ складається з двох бінарних символів операцій $+$ і $-$ на V (додавання та віднімання векторів) і родини унарних операцій по одній для кожного елемента λ поля P (множення векторів простору V на скаляри λ). Кожен скаляр $\lambda \in P$ задає відображення $V \rightarrow V$, для якого $v \mapsto \lambda v$.

Терми в теорії лінійних просторів – це лінійні комбінації вигляду $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Проте слово $\forall \lambda \lambda x = y$ не є

формулою, оскільки в численні предикатів не можна навішувати квантори на символи операцій (у даному випадку унарних).

4.1.2.4. *Сигнатура арифметики Пеано.* Ця сигнатура складається з одного унарного функціонального символа s (операція наступності), двох бінарних функціональних символів $+$ і \cdot (додавання та множення чисел) та одного символу константи 0, який інтерпретує число 0. Отож $\Sigma = \{S, +, \cdot, 0\}$ — *сигнатура арифметики Пеано*.

ПРИКЛАД 4.1.8. Вираз $s(s(0) + x^2 + 3x^3)$ є одним з термів цієї сигнатури.

Аксіоматика формальної арифметики Пеано \mathcal{PA} отримується з аксіоматики числення предикатів долученням таких аксіом формальної арифметики:

- Q1. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$ (виражає ін'ективність s);
- Q2. $\forall x \neg s(x) = 0$ (означає, що 0 не має безпосередньо попереднього числа);
- Q3. $\forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y (x = s(y)))$ (формальний запис властивості: всі натуральні числа крім нуля мають безпосередньо попередні елементи);
- Q4. $\forall x x + 0 = x$ (0 — нейтральний елемент стосовно додавання);
- Q5. $\forall x \forall y x + s(y) = s(x + y)$ (рекурсивна властивість додавання);
- Q6. $\forall x x \cdot 0 = 0$ (поведінка 0 при множенні);
- Q7. $\forall x \forall y x \cdot s(y) = x \cdot y + x$ (рекурсивна властивість множення).

Введемо такі скорочення записів:

$$\begin{aligned}x \leq y &\Leftrightarrow \exists z (z + x = y); \\x < y &\Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge \neg(x = y)).\end{aligned}$$

Нехай $\phi(x)$ — будь-яка формула сигнатури Σ від однієї вільної змінної x . Тоді формула

$$\forall y ((\phi(0) \wedge \forall x (\phi(x) \rightarrow \phi(s(x)))) \rightarrow \phi(y))$$

виражає відому схему аксіом індукції. Зрозуміло, що множина натуральних чисел \mathbb{N} разом з операціями додавання та множення і функцією переходу до наступного елемента є моделлю теорії \mathcal{PA} .

4.1.2.5. Сигнатура теорії множин. Сигнатура мови першого порядку для описання теорії множин складається з двох предикатних символів “=” і “ \in ”. Для двох символів предметних змінних x і y атомарну формулу $x \in y$ читають “ x є елементом y ”, змінні x і y трактуються як множини, множина x є елементом множини y , якщо x входить у запис $x \in y$ на першому місці.

Формальна мова теорії множин \mathcal{L}_{Set} — це мова першого порядку в сигнатурі $\Sigma = \{\in\}$. Теорія множин ZF (Цермело-Френкеля) отримується додаванням до логічних аксіом додаткових аксіом, які стосуються множин:

ZF1 Аксіома об’ємності: $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

ZF2 Аксіома порожньої множини: $\exists x \forall y (\neg y \in x)$.

ZF3 Аксіома пари: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$.

ZF4 Аксіома об’єднання: якщо x — множина, то існує множина y , елементами якої є елементи елементів множини x і тільки вони: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t))$.

ZF5 Аксіома степеня: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$.

ZF6 Аксіома регулярності: $\forall x(\neg x = \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$, де $y \cap x = \emptyset$ — скорочений запис для $\neg \exists z(z \in y \wedge z \in x)$.

ZF7 Аксіома нескінченості: $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \{y\} \in x))$.

ZF8 Аксіома підстановки:

$$\begin{aligned} \forall z_1 \dots \forall z_n \forall u (\forall x(x \in u \rightarrow \exists! y P(x, y, z_1, \dots, z_n)) \rightarrow \\ \rightarrow \exists w \forall y(y \in w \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge P(x, y, z_1, \dots, z_n))). \end{aligned}$$

ZF9 Аксіома вибору:

$$\begin{aligned} \forall x \Big(\neg x = \emptyset \rightarrow \exists f \Big("f — відображення з x в \bigcup_{u \in x} u" \wedge \\ \wedge \forall u((u \in x \wedge \neg u = \emptyset) \rightarrow \exists v(v \in u \wedge "(u, v) \in f'')) \Big), \end{aligned}$$

Аксіома об'ємності стверджує, що кожна множина цілком визначається своїми елементами. Її ще можна прочитати так: дві множини x та y рівні тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини x належить до множини y і навпаки, кожний елемент з y належить і до x .

Тепер для зручності введемо ще одне відношення між множинами $x \subset y$ — це скорочення для формули $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$. Якщо $x \subset y$, то кажуть, що множина x є *підмножиною* множини y . Коли $x \subset y$ і $x \neq y$, то x — *власна підмножина* множини y . Запис $x \not\subset y$ означає, що існує елемент множини x , який не є елементом множини y .

Аксіома порожньої множини гарантує існування хоч одної множини. Множина x , існування якої стверджує аксіома ZF2, не має жодного елемента й називається *порожньою множиною*. Вона єдина за аксіомою об'ємності ZF_1 й позначається символом \emptyset .

Аксіома пари стверджує, що коли дано дві множини x та y , то існує множина, єдиними елементами якої є x і y . За аксіомою об'ємності ZF1 існує тільки одна така множина z . Її позначають через $\{x, y\}$ і називають *парою*, або *невпорядкованою парою*, множин x і y . Якщо $x = y$, то бачимо, що існує єдина множина $\{x, x\}$, що має єдиний елемент x . Множину $\{x, x\}$ позначають через $\{x\}$.

Потрібно розрізняти x і $\{x\}$. Наприклад, множина \emptyset не має елементів, а множина $\{\emptyset\}$ має точно один елемент, а саме \emptyset . Множину $\{x, \{x, y\}\}$ називають *впорядкованою парою* множин x та y . Впорядковану пару скорочено позначають (x, y) .

Аксіома об'єднання стверджує, що для кожної множини x існує множина y , елементами якої є елементи елементів множини x , і тільки вони. Цю множину y , називають *об'єднанням множин* t і позначають $\bigcup_{t \in x} t$. Якщо $x = \{a, b\}$ — пара, то об'єднання $\bigcup_{t \in x} t$ позначають $a \cup b$.

Аксіома степеня гарантує для кожної множини x існування множини y , що має своїми елементами тільки підмножини множини x . Множина y єдина за аксіомою ZF1. Її позначають 2^x і називають *множиною всіх підмножин* множини x або *буліаном* множини x .

Аксіома регулярності стверджує, що кожна непорожня множина не має спільних елементів з деяким своїм елементом.

Аксіома нескінченності гарантує існування множини, що містить елементи $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$, за допомогою яких у теорії множин вводяться натуральні числа $0, 1, 2, 3, \dots$

Наведене вище формулювання аксіоми підстановки містить нові позначення для формул мови \mathcal{L}_{Set} , які сприяють скороченню

записів. Вони вимагають певних пояснень. Нехай $P(y)$ — формула мови \mathcal{L}_{Set} , в яку входить вільно y . Надалі запис $\exists!yP(y)$ означатиме скорочення для формулі

$$\exists yP(y) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y).$$

Останню формулу можна прочитати так: “існує єдина множина y з властивістю P ”. Якщо в формулу P входять вільно інші змінні, крім y , то $\exists!y P(y)$ слід розуміти як запис факту, що P задає y як “неявну функцію” від цих інших змінних. Аксіому підстановки можна прочитати так: “якщо P задає y як функцію від $x \in u$ при довільних значеннях параметрів z_1, z_2, \dots, z_n , то образ множини u стосовно цієї функції є деякою множиною w .”

Аксіома підстановки є однією з найбільш складних і найменш очевидних аксіом теорії множин. Все ж, за словами одного з визначних спеціалістів з теорії множин П. Коена, “вона сформульована настільки продумано і акуратно, що (як прийнято вважати!) не приведе до суперечності”. Звернемо увагу на те, що аксіома підстановки — це не одна аксіома, а ціла родина аксіом, по одній аксіомі для кожної формули P . Щоб підкреслити цю обставину у даному випадку кажуть про “схему аксіом”.

Зі схеми аксіом підстановки виводять слабші твердження, які називають *схемами аксіом виділення*. Ми сформулюємо схему аксіом виділення у випадку, коли в формулу P входить одна вільна змінна z . Тоді $P(z)$ можна інтерпретувати як твердження про те, що множина z має властивість P .

На мові \mathcal{L}_{Set} аксіома виділення записується так:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z))). \quad (1)$$

Множина y , існування якої забезпечує аксіома виділення, єдина, за аксіомою об’ємності ZF1. Її познають $y = \{z \in x \mid P(z)\}$.

Аксіома виділення, як і аксіома підстановки, — теж не одна аксіома. Ми знову маємо тут “схему аксіом”, по одній аксіомі для кожної властивості P .

Спробуємо тепер взяти в ролі “аксіоми” наступне, дуже схоже на аксіому виділення, твердження: дляожної формули $P(z)$ існує множина y , що має своїми елементами множини, які мають властивість $P(z)$. Мовою \mathcal{L}_{Set} ця “аксіома” виражалася б так:

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow P(z)). \quad (2)$$

Вона негайно ж приводить до суперечностей. Справді, нехай $P(z)$ означає $z \notin z$. Тоді з (2) одержимо

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \notin z). \quad (3)$$

Приймемо в (3) $z = y$. Тоді

$$\exists y (y \in y \leftrightarrow y \notin y), \quad (4)$$

що є суперечністю (схожою на парадокс Рассела). Отже аксіома підстановки не дозволяє виводити у теорії множин суперечності типу парадоксу Рассела.

Аксіома виділення означає, що частина елементів z даної множини x , які задовольняють властивість P , утворює множину. Іншими словами, кожна властивість визначає підмножину заданої множини x .

Цікаво перевірити аксіому виділення на властивість $z \notin z$. Чи можлива тепер суперечність? Спробувавши, підставити в (1) $z \notin z$ замість $P(z)$, одержуємо

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z)). \quad (5)$$

Підставимо в (5) $z = y$ і отримаємо формулу

$$\forall x \exists y (y \in y \leftrightarrow (y \in x \wedge y \notin y)). \quad (6)$$

Тепер можна довести таку теорему.

ТЕОРЕМА 4.1.9. $\forall x \exists y y \notin x$.

ДОВЕДЕННЯ. Від супротивного. Якби $\exists x \forall y y \in x$, то з (6) випливало б, що $\exists y (y \in y \leftrightarrow y \notin y)$. Але останній запис виражає суперечність. \square

Теорема 4.1.9 стверджує, що для кожної множини x існує множина y , що не належить до x або, іншими словами, не існує множини, яка б мала своїми елементами всі множини. Тому тепер вже не дозволяється говорити про множину всіх множин.

Повернемось ще раз до формулі (3). Оскільки з неї ми одержали суперечність (4), то справедливе заперечення формулі (4) і, отже, доведена така теорема.

ТЕОРЕМА 4.1.10. *Істинне таке речення: $\neg \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \notin z)$.*

Теорема 4.1.10 стверджує, що не існує множини, яка мала б своїми елементами множини, що не містять себе в якості елемента. Тому в теорії множин не можна говорити про “множину всіх множин, що не містять себе в якості елемента” і цим самим парадокс Рассела остаточно знімається аксіоматикою ZF.

Нарешті, прокоментуємо поняття, що входять у формулювання аксіоми вибору. У її формулюванні беруть участь поняття функції та відображення. Нехай a і b множини. *Функцією* називається така множина впорядкованих пар (див. аксіому ZF3) (x, y) , де $x \in a$, $y \in b$, яка містить не більше ніж одну пару для кожного $x \in a$, тобто

$$((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \rightarrow y = z.$$

Якщо для кожного $x \in a$ існує такий $y \in b$, що $(x, y) \in f$, то функція f називається *відображенням* з множини a в множину b . Аксіома вибору стверджує, що коли задана непорожня множина x непорожніх множин u , то завжди можна вибрати з усіх множин u по елементу, причому одноактним прийомом.

Вираз ZF9 не є записом аксіоми вибору в мові \mathcal{L}_{Set} . Але цей вираз можна перетворити у слово мови \mathcal{L}_{Set} , якщо виразити в мові \mathcal{L}_{Set} фрагменти “ f – відображення” та використати повний запис скорочень $\neg x = \emptyset$ та $\neg u = \emptyset$. Пропонуємо це зробити читачеві самостійно.

Аксіома вибору відіграє особливу роль серед інших аксіом теорії множин. Вона дещо нагадує роль постулату Евкліда про паралельні прямі в геометрії. Нагадаємо, що, коли в геометрії замінити аксіому паралельності твердженням “через точку поза даною прямою можна провести дві прямі, паралельні до даної прямої”, то одержимо геометрію Лобачевського, несуперечливу, якщо несуперечлива геометрія Евкліда.

Нехай ZF^- – система аксіом Цермело-Френкеля без аксіоми вибору. Знаменитий австрійський математик К. Гедель довів у 1939 р., що коли ZF^- несуперечлива, то система аксіом $ZF^- \cup \{\text{аксіома вибору}\}$ залишається несуперечливою, тобто і вся система аксіом Цермело-Френкеля ZF несуперечлива. У 1963 р. американський математик П. Коен показав, що $ZF^- \cup \{\text{заперечення аксіоми вибору}\}$ залишається несуперечливою, якщо ZF^- несуперечлива.

Не всі математики беззастережно користуються аксіомою вибору. Деякі відносяться до неї з недовірою. Справа в тому, що з аксіоми вибору випливають досить дивні і несподівані наслідки, що не узгоджуються з нашою інтуїцією. Найбільш відомим

з них є так званий “парадокс Банаха-Тарського”, який ми тут не коментуємо.

Підсумовуючи, бачимо, що кожна сигнатура є цікавою сама по собі і вона підібрана достатньо оптимально, щоб бути зручною для тієї чи іншої конкретної теорії. Сучасна математика наслічена різноманітними теоріями, з якими читач або вже знайомий, або ще познайомиться в майбутньому.

4.2. Елементарні підструктури

Означення 4.2.1. Дві структури $\mathfrak{A} = \langle A, r_i, f_j, c_k \rangle$ і $\mathfrak{B} = \langle B, s_i, g_j, d_k \rangle$ мови $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu, \nu, K)$ ізоморфні, якщо існує біективне відображення $F : A \rightarrow B$, для якого

- $(a_1, \dots, a_{\mu(i)}) \in r_i \iff (F(a_1), \dots, F(a_{\mu(i)})) \in s_i \quad \forall i \in I;$
- $F(f(a_1, \dots, a_{\nu(j)})) = g_j(F(a_1), \dots, F(a_{\nu(j)})) \quad \forall j \in J;$
- $f(c_k) = d_k, \quad \forall k \in K.$

Інакше кажучи, \mathfrak{A} і \mathfrak{B} ізоморфні, якщо існує біективний гомоморфізм з \mathfrak{A} у \mathfrak{B} . У такому випадку пишемо $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Означення 4.2.2. Структури \mathfrak{A} і \mathfrak{B} називають *елементарно еквівалентними*, якщо $\mathfrak{A} \models \vartheta \iff \mathfrak{B} \models \vartheta$ для кожного речення ϑ мови \mathcal{L} . У такому випадку пишемо $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Зрозуміло, що коли $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Але, як ми переконаємося далі на прикладах, обернене твердження невірне.

Поля L і L' , що містять поле K , є ізоморфними як моделі теорії $\Pi(K)$ тоді й лише тоді, коли існує ізоморфізм полів L і L' , що залишає незмінними елементи поля K ; у такому випадку пишемо $L \cong_K L'$. Якщо ці поля ізоморфні як моделі теорії $\Pi(K)$, то пишемо $L \equiv_K L'$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.2.3. Структуру \mathfrak{A} називають *підструктурою* структури \mathfrak{B} , а структуру \mathfrak{B} — *розширенням* структури \mathfrak{A} і пишуть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, якщо $A \subseteq B$, $r_i = A^{\mu(i)} \cap s_i$ і для кожного $i \in I$, $f_j(a_1, \dots, a_{\nu(j)}) = g_j(a_1, \dots, a_{\nu(j)})$ для довільного $j \in J$ і довільних $a_1, \dots, a_{\nu(j)} \in A$ і $c_k = d_k$ для кожного $k \in K$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.2.4. Структуру \mathfrak{A} називають *елементарною підструктурою* структури \mathfrak{B} , а структуру \mathfrak{B} — *елементарним розширенням* структури \mathfrak{A} і пишуть $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, якщо $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, і для кожної формулі $\phi(x_1, \dots, x_n)$ мови \mathcal{L} і для довільних $a_1, \dots, a_n \in A$ і $c_k = d_k$ з істинності формулі $\phi(a_1, \dots, a_n)$ в \mathfrak{A} випливає її істинність у \mathfrak{B} .

Зокрема, речення ϑ мови \mathcal{L} істинне в \mathfrak{A} тоді й лише тоді, коли воно істинне в \mathfrak{B} (тобто $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$). Обернене твердження невірне (див. приклад нижче). Якщо, все ж, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ і ми розширимо мову \mathcal{L} , долучивши множину нових константних символів, що складається з усіх елементів множини A , то відношення $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ еквівалентне відношенню $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Транзитивність очевидна: з $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ і $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ випливає $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

ПРИКЛАД 4.2.5. (*Елементарні підполія*). Якщо K — елементарне підполе поля L , то K алгебраїчно замкнене в L . Справді, кожен поліном $X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$ з коефіцієнтами з K , що має корінь в L має корінь в K . Зокрема, якщо x — трансцендентний над \mathbb{Q} елемент, то $\mathbb{Q}(x^2) \cong \mathbb{Q}(x)$. Отже $\mathbb{Q}(x^2) \equiv \mathbb{Q}(x)$ але $\mathbb{Q}(x^2)$ не є елементарним підполем поля $\mathbb{Q}(x)$, оскільки в полі $\mathbb{Q}(x)$ існує корінь рівняння $y = x^2$, а в полі $\mathbb{Q}(x^2)$ це рівняння не має коренів.

4.3. Критерій елементарної підструктур

Наведемо критерій того, щоб одна структура була елементарною підструктурою іншої.

Для кардинального числа m розглянемо трансфінітну послідовність $\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < m\}$ для мови $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu, \nu, K)$, де $\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, r_{\alpha i}, f_{\alpha j}, c_{\alpha k} \rangle$. Припустимо, що $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ для всіх $\alpha \leq \beta < m$, і означимо *об'єднання* $\bigcup_{\alpha < m} \mathfrak{A}_\alpha$ як структуру $\mathfrak{A}_m = \langle A_m, r_{mi}, f_{mj}, c_{mk} \rangle$, де $A_m = \bigcup_{\alpha < m} A_\alpha$, $R_{mi} = \bigcup_{\alpha < m} R_{\alpha i}$, $F_{mj}(x_1, \dots, x_{\nu(j)}) = F_{\alpha j}(x_1, \dots, x_{\nu(j)})$ якщо $x_1, \dots, x_{\nu(j)} \in A_\alpha$, і $c_{mk} = c_{0k}$. Тоді $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_m$ для всіх $\alpha < m$. Зафіксувавши ці позначення, можемо сформулювати таку лему.

- ЛЕМА 4.3.1. а) Якщо $\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{A}_\beta$ для всіх $\alpha \leq \beta < m$, то $\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{A}_m$ для кожного $\alpha < m$.
б) Якщо \mathfrak{B} – інша структура для \mathcal{L} , для якої $\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{B}$ для всіх $\alpha < m$, то $\mathfrak{A}_m \prec \mathfrak{B}$.

ДОВЕДЕННЯ. а) Індукцією за кількістю кроків у побудові формули доведемо, що дляожної формули $\phi(x_1, \dots, x_n)$ мови \mathcal{L} , для кожного $\alpha < m$ і для будь-яких $x_1, \dots, x_n \in A_n$ істинне твердження

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \phi(\mathbf{x}) \iff \mathfrak{A}_m \models \phi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. б) Замінимо \mathfrak{A}_α (відповідно \mathfrak{A}_m) в (1) на \mathfrak{A}_m (відповідно \mathfrak{B}). \square

ТВЕРДЖЕННЯ 4.3.2 (Скулем-Левенгейм). *Нехай $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu, \nu, K)$ зліченна мова, нехай $\mathfrak{B} = \langle B, s_i, g_j, d_k \rangle$ – структура для \mathcal{L} і нехай A_0 – зліченна підмножина в B . Тоді \mathfrak{B} має зліченну елементарну підструктуру $\mathfrak{A} = \langle A, r_i, f_j, c_k \rangle$, для якої $A_0 \subseteq A$.*

ДОВЕДЕННЯ. Побудуємо зростаючий ланцюг зліченних множин $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq B$. Припустимо, що множина A_n

вже побудована. Тоді A_{n+1} визначається як об'єднання таких множин: множини всіх d_k ; множини $g_j(y_1, \dots, y_{\nu(j)})$, де $j \in J$ і $(y_1, \dots, y_{\nu(j)})$ — послідовність елементів з A_n ; такого елемента $x_m \in B$, що $\mathfrak{B} \models \phi(x_1, \dots, x_m)$ для кожної формули $\phi(x_1, \dots, x_m)$ і для всіх $x_1, \dots, x_{m-1} \in A_n$, таких що $\mathfrak{B} \models \exists x_m \phi(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$.

Означимо \mathfrak{A} такими даними: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $r_i = A^{\mu(i)} \cap s_i$,

$f_j(y_1, \dots, y_{\mu(j)}) = g_j(y_1, \dots, y_{\mu(j)})$ для $y_1, \dots, y_{\mu(j)} \in A$, і $c_k = d_k$.

Функції f_j коректно визначені. Отже \mathfrak{A} — зліченна підструктуря в \mathfrak{B} . Тепер використовуємо індукцію за кількістю кроків у побудові формул з атомарних для доведення, що для кожної формули $\phi(x_1, \dots, x_n)$ мови \mathcal{L} і для всіх $\mathbf{x} \in A^n$, $\mathfrak{A} \models \phi(\mathbf{x})$ тоді й лише тоді, коли $\mathfrak{B} \models \phi(\mathbf{x})$. Це доводить, що $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. \square

4.4. Ультрафільтри

ОЗНАЧЕННЯ 4.4.1. Нехай S — непорожня множина. *Фільтр* на множині S — це непорожня родина \mathcal{D} підмножин множини S , що має такі властивості:

- 1) $\emptyset \notin \mathcal{D}$;
- 2) якщо $A, B \in \mathcal{D}$, то $A \cap B \in \mathcal{D}$;
- 3) якщо $A \subseteq B \subseteq S$ і $A \in \mathcal{D}$, то $B \in \mathcal{D}$.

Якщо, крім цих умов 1), 2), 3) виконується ще й умова

- 4) $\forall A \subseteq S$ або $A \in \mathcal{D}$, або $S \setminus A \in \mathcal{D}$,

то фільтр \mathcal{D} називають *ультрафільтром*.

Легко пересвідчитися, що кожен ультрафільтр \mathcal{D} також задовільняє умову

- 4') $A \cup B \in \mathcal{D} \implies A \in \mathcal{D}$ або $B \in \mathcal{D}$.

ПРИКЛАД 4.4.2. (1) Родина всіх *коскінченних* підмножин в S (тобто підмножин зі скінченними доповненнями) є фільтром на S .

(2) Родина \mathcal{D}_a всіх підмножин в S , що містять даний елемент

$a \in S$ є ультрафільтром, який називають *головним ультрафільтром*. З умови 4) легко вивести, що ультрафільтр \mathcal{D} є головним тоді й лише тоді, коли він містить скінченну множину.

ОЗНАЧЕННЯ 4.4.3. Ультрафільтр, який не є головним, називають *неголовним*.

ОЗНАЧЕННЯ 4.4.4. Родина \mathcal{D}_0 підмножин множини S задовольняє умову *скінченних перетинів*, якщо з $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}_0$ випливає $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{D}_0$.

Долучивши до \mathcal{D}_0 всі множини $B \subseteq S$, що містять скінченні перетини $A_1 \cap \dots \cap A_n$ елементів з \mathcal{D}_0 , отримуємо фільтр \mathcal{D}_1 . За лемою Цорна існує максимальний фільтр \mathcal{D} на множині S , що містить \mathcal{D}_1 . Наведена нижче лема показує, що \mathcal{D} — ультрафільтр.

ЛЕМА 4.4.5. *Фільтр \mathcal{D} на множині S є ультрафільтром тоді й лише тоді, коли він максимальний.*

ДОВЕДЕННЯ. (\Leftarrow) Припустимо, що \mathcal{D} максимальний, і нехай $A \subseteq S$, $S \setminus A \notin \mathcal{D}$. Тоді $\mathcal{D} \cup \{A\}$ задовольняє умову скінченних перетинів. Справді, для $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ нехай $D = D_1 \cap \dots \cap D_n$. Якщо $D \cap A = \emptyset$, то $D \subseteq S \setminus A$. Отже $S \setminus A \in \mathcal{D}$, — суперечність. За попередніми зауваженнями існує фільтр \mathcal{D}' на множині S , що містить $\mathcal{D} \cup \{A\}$. За максимальністю \mathcal{D} , $A \in \mathcal{D}$. Тому \mathcal{D} ультрафільтр.

(\Rightarrow) Обернене твердження очевидне. □

НАСЛІДОК 4.4.6. *Кожна родина \mathcal{D}_0 підмножин множини S , що задоволяє властивість скінчених перетинів, міститься в ультрафільтрі.*

З дещо сильніших припущень випливає існування неголовних ультрафільтрів.

ЛЕМА 4.4.7. *Нехай \mathcal{D}_0 – родина підмножин множини S , що має таку властивість: якщо $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}_0$, то $A_1 \cap \dots \cap A_n$ – нескінченна множина. Тоді існує неголовний ультрафільтр \mathcal{D} на множині S , що містить \mathcal{D}_0 .*

ДОВЕДЕННЯ. Родина \mathcal{D}_1 , що містить \mathcal{D}_0 і всі коскінченні множини в S (тобто множини зі скінченими доповненнями в S), має властивість скінчених перетинів. Отже існує ультрафільтр \mathcal{D} , що містить \mathcal{D}_0 . Це неголовний ультрафільтр. \square

ЗАУВАЖЕННЯ 22. Всі твердження цього підрозділу стверджують факт існування того чи іншого ультрафільтра. Проте, навіть на множині натуральних чисел ми не можемо вказати жодного неголовного ультрафільтра, який би можна було збудувати конструктивно. Ця обставина спонукає математиків шукати доведення, у яких не беруть участі неголовні ультрафільтри. Однак неголовні ультрафільтри дуже корисні; їх застосування часто є дуже потужним інструментом доведень, і дозволяє спрощувати доведення.

4.5. Регулярні ультрафільтри

Родина \mathcal{F} всіх скінчених підмножин нескінченної множини S має двоїсті властивості до властивостей фільтра:

- $S \notin \mathcal{F}$;
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$;

- $B \in \mathcal{F}$ і $A \subseteq B \implies A \in \mathcal{F}$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.1. Нехай \mathcal{F} — непорожня родина підмножин в S , що задовольняють ці властивості. Елементи родини \mathcal{F} називаємо *малими множинами*.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.2. Означимо *бульові поліноми* від z_1, \dots, z_m рекурсивно.

- (1) Змінні z_1, \dots, z_m є бульзовими поліномами, і
- (2) якщо u, u_1 і u_2 є бульзовими поліномами, то u' , $u_1 \cup u_2$ і $u_1 \cap u_2$ є бульзовими поліномами.

Обчислюємо бульовий поліном $P(z_1, \dots, z_m)$ на підмножинах A_1, \dots, A_m множини S , інтерпретуючи символи \cup, \cap і $'$ як звичайні об'єднання, перетин та доповнення множин відповідно.

Якщо означити додавання і множення правилами $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ і $A \cdot B = A \cap B$, і $0 = \emptyset, 1 = S$, то отримуємо алгебру над полем \mathbb{F}_2 з двох елементів, у якій всі елементи крім 1 є дільниками нуля. Родина \mathcal{F} малих множин є ідеалом цієї алгебри.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.3. Дві підмножини A і B множини S називають *конгруентними за модулем* \mathcal{F} у цій алгебрі, якщо вони відрізняються на малу множину (тобто $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$). Такі підмножини A і B називають також *майже рівними* і пишуть $A \approx B$.

Зрозуміло, що коли $A_1 \approx B_1$ і $A_2 \approx B_2$, то $S \setminus A_1 \approx S \setminus B_1$, $A_1 \cup A_2 \approx B_1 \cup B_2$ і $A_1 \cap A_2 \approx B_1 \cap B_2$. Тому, в загальному, якщо $P(z_1, \dots, z_m)$ — бульовий поліном від змінних z_1, \dots, z_m , і $A_i \approx B_i$, $i = 1, \dots, m$, то $P(A_1, \dots, A_m) \approx P(B_1, \dots, B_m)$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.4. Якщо різниця $A \setminus B$ двох підмножин A і B множини S є малою множиною, то кажуть, що A *майже міститься в B* .

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.5. Родина підмножин множини S , замкнена стосовно об'єдань, перетинів та доповнень, називається *бульовою алгеброю множин*.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.6. *Бульова алгебра, породжена родиною \mathcal{A}_0 підмножин множини S* — це перетин всіх бульових алгебр родин в S , що містять \mathcal{A}_0 .

Вона складається з усіх множин $P(A_1, \dots, A_m)$, де $P(z_1, \dots, z_m)$ — бульовий поліном і $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_0$.

ПРИКЛАД 4.5.7. Родина всіх підмножин множини S вигляду $P(A_1, \dots, A_m) \cup B$, де B — мала множина є бульовою алгеброю, що містить \mathcal{A}_0 і \mathcal{F} . Ця родина є бульовою алгеброю, породженою $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.5.8. Назвемо ультрафільтр \mathcal{D} на множині S *регулярним* (стосовно \mathcal{F}), якщо він не містить малих множин.

ПРИКЛАД 4.5.9. Неголовні ультрафільтри на множині S регулярні стосовно скінчених підмножин множини S .

ЛЕМА 4.5.10. *Hexай S — множина і нехай \mathcal{F} — родина малих підмножин множини S . Припустимо, що родина \mathcal{D}_0 підмножин множини S задоволює умову:*

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}_0 \implies A_1 \cap \dots \cap A_n \notin \mathcal{F}. \quad (2)$$

Тоді існує регулярний ультрафільтр \mathcal{D} на множині S , який містить \mathcal{D}_0 .

ДОВЕДЕННЯ. Досить дослівно повторити міркування, використані при доведенні леми 4.4.7. \square

Ми застосуємо наступний результат до теоретико-модельних властивостей родин полів.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.5.11. *Нехай S – множина, \mathcal{F} – родина малих підмножин множини S , і нехай \mathcal{A} – булльова алгебра підмножин множини S , що містить \mathcal{F} . Припустимо, що підмножина $C \subseteq S$ не належить до \mathcal{A} . Тоді існують такі два регулярні ультрафільтри \mathcal{D} і \mathcal{D}' , що $\mathcal{D} \cap \mathcal{A} = \mathcal{D}' \cap \mathcal{A}$ але $C \in \mathcal{D}$ і $C \notin \mathcal{D}'$.*

ДОВЕДЕННЯ. Позначимо через \mathcal{A}_0 набір всіх $A \in \mathcal{A}$, що майже містять C або майже містять $S \setminus C$. Припустимо, що $A_i \in \mathcal{A}_0$ майже містить C для $i = 1, \dots, m$ і $B_j \in \mathcal{A}_0$ майже містить $S \setminus C$ для $j = 1, \dots, n$, і припустимо, що $A_1 \cap \dots \cap A_m \cap B_1 \cap \dots \cap B_n \approx \emptyset$. Розглянувши доповнення, одержуємо

$$(S \setminus A_1) \cup \dots \cup (S \setminus A_m) \cup (S \setminus B_1) \cup \dots \cup (S \setminus B_n) \approx S.$$

Кожна множина $S \setminus A_i$ майже міститься в $S \setminus C$ і кожна множина $S \setminus B_i$ майже міститься в C . Отже, $C \approx (S \setminus B_1) \cup \dots \cup (S \setminus B_n)$, і тому $C \in \mathcal{A}$, суперечність. Звідси робимо висновок про те, що \mathcal{A}_0 задовольняє (2).

За лемою Цорна в \mathcal{A} існує максимальна підродина \mathcal{A}_1 , що містить \mathcal{A}_0 і має властивість (2).

Тепер зауважимо, що родина $\mathcal{A}_1 \cup \{C\}$ задовольняє умову (2). Справді, якщо $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ і $A_1 \cap \dots \cap A_m \cap C \approx \emptyset$, то C майже міститься в $S \setminus A$, де $A = A_1 \cap \dots \cap A_m \in \mathcal{A}$. Отже $S \setminus A \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$. Але це суперечність, оскільки \mathcal{A}_1 максимальна серед родин з властивістю (2). Отож вона мусить містити A .

За лемою 4.5.10 існує регулярний ультрафільтр \mathcal{D} на множині S , що містить $\mathcal{A}_1 \cup \{C\}$. Очевидно, $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$ містить \mathcal{A}_1 і задовольняє

умову (2). З максимальності родини \mathcal{A}_1 випливає, що $\mathcal{D} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Так само, існує регулярний ультрафільтр \mathcal{D}' на S , що містить $\mathcal{A}_1 \cup \{S \setminus C\}$. Він також задовільняє умову $\mathcal{D}' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Отже $\mathcal{D}' \cap \mathcal{A} = \mathcal{D} \cap \mathcal{A}$. \square

4.6. Ультрадобутки

Для даної родини алгебраїчних структур конструкція ультрадобутку дозволяє утворити нову структуру, яка має всі ті елементарні властивості, які мають майже всі структури з даної родини. Крім цього, ті елементарні властивості, які виконуються лише на малій підродині, перестають виконуватися в ультрадобутку. У багатьох випадках існує простий критерій для встановлення коли два ультрадобутки є елементарно еквівалентними. В результаті отримуємо ефективний метод дослідження елементарних теорій багатьох алгебраїчних структур.

Розглянемо мову першого порядку \mathcal{L}_Σ сигнатури $\Sigma = \{R, F, C\}$, і ультрафільтр \mathcal{D} на деякій множині S . Припустимо, що для кожного $s \in S$ задана структура $\mathfrak{A}_s = \langle A_s, r_{is}, f_{js}, c_{ks} \rangle$, де $r_{is} \in R, f_{js} \in F, c_{ks} \in C$. Зараз ми визначимо *ультрадобуток* структур $\mathfrak{A}_s, s \in S$, за модулем \mathcal{D} , який позначимо $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / \mathcal{D} = \mathfrak{A} = \langle A, R_i, F_j, c_k \rangle$.

Розглянемо декартовий добуток

$$\prod_{s \in S} A_s = \left\{ f: S \rightarrow \bigcup_{s \in S} A_s \mid f(s) \in A_s, s \in S \right\}.$$

Відомо, що функцію f можна трактувати певний як вектор $f = (f(s))_{s \in S} = (a_s)_{s \in S} = \bar{a}$.

Спочатку означимо відношення еквівалентності на декартовому добутку $\prod_{s \in S} A_s$:

$$a \sim b \iff \{s \in S : a_s = b_s\} \in \mathcal{D}.$$

ТВЕРДЖЕННЯ 4.6.1. *Відношення \sim є відношенням еквівалентності на $\prod_{s \in S} A_s$.*

ДОВЕДЕННЯ. □

Відношення \sim називається відношенням *D-рівності*, або *рівності стосовно ультрафільтру D*, або *відношенням D-майже скрізь*. Воно розбиває декартовий добуток $\prod_{s \in S} A_s$ на класи еквівалентності (класи еквівалентних елементів). Множина A — це фактор-множина множини $\prod_{s \in S} A_s$ стосовно цього відношення еквівалентності (множина класів еквівалентності).

Для спрощення позначень, домовимося позначати клас еквівалентності тим самим символом $a = (a_s)_{s \in S}$, що і його представник. Враховуючи цю домовленість, означимо R_i , F_j і c_k у такий спосіб:

$$(a_1, \dots, a_{\mu(i)}) \in R_i \iff \{s \in S : (a_{1s}, \dots, a_{\mu(i)s}) \in R_{is}\} \in \mathcal{D},$$

$F_j(b_1, \dots, b_{\nu(i)})$ — клас еквівалентності функцій $s \mapsto F_{js}(b_{1s}, \dots, b_{\nu(i)s})$

c_k — клас еквівалентності функцій $s \mapsto c_{ks}$.

Безпосередньо перевіряється, що R_i , F_j і c_k коректно визначені. Індукція за будовою термів показує, що коли $t(x_1, \dots, x_n)$ — термомови \mathcal{L} і $a_1, \dots, x_n \in A$, то

$$\{s \in S : t(a_1, \dots, a_n)_s = t(a_{1s}, \dots, a_{ns})\} \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Тепер вже можна сформулювати фундаментальну властивість ультрадобутків.

ТЕОРЕМА 23 (Лось). *Нехай \mathcal{D} — ультрафільтр на множині S . Нехай для кожного $s \in S$ маємо структуру $\mathfrak{A}_s = \langle A_s, R_{is}, F_{js}, c_{ks} \rangle$ з мовою \mathcal{L}_Σ . Розглянемо ультрадобуток*

$\mathcal{A} = \langle A, R_i, F_j, c_k \rangle = \prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D}$. Тоді для довільної формули $\phi(x_1, \dots, x_n)$ і довільних $a_1, \dots, a_n \in A$ істинне таке твердження:

$$\mathfrak{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \iff \{s \in S : \mathcal{A}_s \models \phi(a_{1s}, \dots, a_{ns})\} \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

ДОВЕДЕННЯ. Індукція за будовою формул. Властивість (2) притаманна атомарним формулам завдяки (1), а крок індукції не спричиняє труднощів. Проілюструємо крок індукції на випадку додавання квантора існування.

Припустимо, що твердження (2) істинне для формули ϕ і для кожного впорядкованого n -елементного набору елементів з A . Нехай $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, і припустимо, що

$$S_0 = \{s \in S : \mathcal{A}_s \models \exists x_n \phi(a_{1s}, \dots, a_{(n-1)s}, x_n)\} \in \mathcal{D}.$$

Для кожного $s \in S_0$ існує такий $a_{ns} \in A_s$, що $\mathfrak{A}_s \models \phi(a_{1s}, \dots, a_{ns})$. Якщо $s \notin S_0$, нехай $a_{ns} \in A_s$ — довільний елемент. Нехай a_n — клас еквівалентності, визначений елементами a_{ns} . Тоді множина $\{s \in S : \mathfrak{A} \models \phi(a_{1s}, \dots, a_{ns})\}$ містить S_0 і тому належить до \mathcal{D} . За припущенням індукції $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$. Отже $\mathfrak{A} \models \exists x_n \phi(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$. \square

НАСЛІДОК 4.6.2. Якщо ϑ — речення мови \mathcal{L} , то

$$\mathfrak{A} \models \vartheta \iff \{s \in S : \mathfrak{A}_s \models \vartheta\} \in \mathcal{D}.$$

ПРИКЛАД 4.6.3. [Ультрадобутки полів] Якщо структури \mathfrak{A}_s є полями для всіх $s \in S$, то їх \mathfrak{A} — поле. Якщо кожне з полів \mathfrak{A}_s алгебраїчно замкнене (тобто кожен поліном $f(X) \in \mathfrak{A}_s[X]$ степеня ≥ 1 має корінь в \mathfrak{A}_s), то їх \mathfrak{A} алгебраїчно замкнене. Але навіть якщо всі \mathfrak{A}_s алгебраїчні над заданим полем K (тобто всі елементи з \mathfrak{A}_s є коренями поліномів з коефіцієнтами з K), то \mathfrak{A} може не бути алгебраїчним над K .

Ультрадобутки мають властивість насищення. Нехай \mathfrak{A} структура з множиною A і \mathcal{L} — мова першого порядку відповідної сигнатури. Збагатимо мову \mathcal{L} до мови $\mathcal{L}(A)$, долучивши новий константний символ для кожного елемента множини A .

ОЗНАЧЕННЯ 4.6.4. Скажемо, що $\mathfrak{A} \in \aleph_1$ -насищеною, якщо виконується така умова:

якщо $r(1) < r(2) < r(3) < \dots$ — зростаюча послідовність додатних чисел і для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(X_1, \dots, X_{r(n)})$ — формула мови \mathcal{L} , для якої

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \dots \exists x_{r(n)} \bigwedge_{i=1}^{r(n)} \phi_i(X_1, \dots, X_{r(i)}), \quad (3)$$

то існують елементи a_1, a_2, a_3, \dots з A , для яких $\mathfrak{A} \models \phi_n(a_1, \dots, a_{r(n)})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕМА 4.6.5. *Нехай \mathcal{D} — неголовний ультрафільтр над множиною \mathbb{N} . Припустимо, що для кожної $n \in \mathbb{N}$ задана структура \mathfrak{A}_n мови \mathcal{L} з областю A_n . Тоді ультрадобуток $\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_n / \mathcal{D}$ є \aleph_1 -насищеним.*

ДОВЕДЕННЯ. Для спрощення позначення вважатимемо, що у попередньому означенні $r_n = n$. Припустимо, що (3) виконується для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$D_n = \{s \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}_s \models \exists X_1 \dots \exists X_n \bigwedge_{i=1}^t \phi_i(X_1, \dots, X_t)\} \in \mathfrak{D}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \dots$. Оскільки \mathcal{D} — неголовний ультрафільтр, то $D'_n = D_n \setminus \{1, 2, \dots, n\} \in \mathfrak{D}$. Крім цього, D'_1, D'_2, D'_3, \dots — спадна послідовність з порожнім перетином.

Тепер виберемо послідовність елементів $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$ за таким правилом. Якщо $s \in D'_n \setminus D'_{n-1}$, то виберемо такі $a_{1s}, \dots, a_{ns} \in A$, що $\mathfrak{A}_s \models \bigwedge_{t=1}^n \phi_t(a_{1s}, \dots, a_{ts})$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, a_{ns} визначені для всіх $s \in D'_n$. Для $s \in \mathbb{N} \setminus D'_n$ виберемо довільні $x_{ns} \in A_{ns}$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $\{s \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}_s \models \phi_n(a_{1s}, \dots, a_{ns})\}$ містить об'єднання $\bigcup_{p=n}^{\infty} (D'_p \setminus D'_{p-1}) = D'_n$. Тому з теореми 23 випливає, що $\mathfrak{A} \models \phi_n(a_1, \dots, a_n)$. \square

ОЗНАЧЕННЯ 4.6.6. Якщо всі структури \mathfrak{A}_s однакові, скажімо $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}$, то ультрадобуток $\prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D}$ позначають $\mathfrak{A}^S / \mathcal{D}$ і називають *ультрастепенем* структури \mathfrak{A} за модулем \mathcal{D} .

Позначимо область \mathfrak{A} через A . Розглянемо діагональне занурення A в A^S , яке задається правилом $a \mapsto \overline{(a, a, \dots)}$. Це канонічне ін'єктивне відображення A в A^S / \mathcal{D} . Справді, якщо образи двох елементів $a, b \in A$ рівні, то множина $\{s \in S : a_s = b_s\}$ належить \mathcal{D} і тому непорожня. Звідси випливає, що $a = b$. Ототожнюючи A з його образом, виводимо з теореми 23 такий факт:

ТВЕРДЖЕННЯ 4.6.7. Якщо \mathfrak{D} ультрафільтр на множині S і \mathfrak{A} – структура мови \mathcal{L} , то \mathfrak{A} – елементарна підструктура в $\mathfrak{A}^S / \mathcal{D}$.

Теорема компактності Мальцева, тепер отримується як безпосередній наслідок.

ТЕОРЕМА 24 (Теорема компактності). Нехай T множина речень мови першого порядку \mathcal{L} . Якщо коецна скінченна підмножина множини T має модель, то T також має модель.

ДОВЕДЕННЯ. Позначимо набір всіх скінченних підмножин T через I . Для кожної $\Theta \in I$ нехай $D_\Theta = \{\Theta' \in I : \Theta \subseteq \Theta'\}$. Тоді $D_\Theta \cap D_{\Theta'} = D_{\Theta \cup \Theta'}$ і тому родина $\mathcal{D}_0 = \{D_\Theta : \Theta \in I\}$

має властивість скінченних перетинів. За наслідком 4.4.6 існує ультрафільтр \mathcal{D} на множині I , що містить \mathcal{D}_0 . Виберемо модель M_Θ для кожного $\Theta \in I$. Тоді $M = \prod M_\Theta / \mathcal{D}$ є моделлю теорії T , оскільки, якщо $\vartheta \in T$, то $D_{\{\vartheta\}} \in \mathcal{D}$. \square

В багатьох книгах з логіки теорему компактності використовують як основний робочий інструмент при розгляді задач, що стосуються конкретних теорій.

4.7. Регулярні ультрадобутки

Нехай S — множина, \mathcal{F} — родина малих підмножин множини S . Припустимо, що для кожного $s \in S$, \mathcal{A}_s — структура фіксованої мови \mathcal{L} .

ОЗНАЧЕННЯ 4.7.1. *Множина істинності речення ϑ мови \mathcal{L} визначається такою рівністю:*

$$A(\vartheta) = \{s \in S : \mathcal{A}_s \models \vartheta\}.$$

Зрозуміло, що відображення $\vartheta \mapsto A(\vartheta)$ зберігає бульові операції $A(\vartheta_1 \vee \vartheta_2) = A(\vartheta_1) \cup A(\vartheta_2)$, $A(\vartheta_2 \wedge \vartheta_2) = A(\vartheta_1) \cap A(\vartheta_2)$ і $A(\neg \vartheta) = S \setminus A(\vartheta)$.

Загальніше, якщо $P(z_1, \dots, z_m)$ бульовий поліном, то

$$A(P(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)) = P(A(\vartheta_1), \dots, A(\vartheta_m)), \quad (1)$$

де $P(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ — речення, отримане з $P(z_1, \dots, z_m)$ спочатку заміною \cup , \cap і $'$ на \vee , \wedge і \neg відповідно, а тоді підстановкою $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ замість z_1, \dots, z_m .

Позначимо через T теорію всіх речень ϑ мови \mathcal{L} , що істинні в \mathcal{A}_s для майже всіх $s \in S$, тобто для всіх $s \in S$, за винятком малої множини індексів. Якщо \mathcal{D} регулярний ультрафільтр, то скажемо, що $\prod \mathcal{A}_s / \mathcal{D}$ — регулярний ультрадобуток.

- ТВЕРДЖЕННЯ 4.7.2. а) Речення ϑ мови \mathcal{L} належить T тоді й лише тоді, коли воно істинне в кожному регулярному ультрадобутку структур \mathfrak{A}_s .
- б) Кожна модель теорії T елементарно еквівалентна регулярному ультрадобутку структур \mathfrak{A}_s .

ДОВЕДЕННЯ. Якщо ϑ належить T , то за наслідком 4.6.2 ϑ істинне в кожному регулярному ультрадобутку структур \mathfrak{A}_s . Обернене до (а) твердження випливає з властивості (б), яку ми зараз доведемо.

Нехай \mathfrak{A} — модель для T . Тоді, за (1), родина $\{A(\vartheta) : \mathfrak{A} \models \vartheta\}$ замкнена стосовно скінченних перетинів. Крім цього, множина $A(\vartheta)$ не може бути малою, оскільки це означало б, що $\neg\vartheta \in T$, і тому $\mathfrak{A} \models \neg\vartheta$. За лемою 4.5.10 існує регулярний ультрафільтр \mathcal{D} над множиною S , для якого з $\mathfrak{A} \models \vartheta$ випливає $A(\vartheta) \in \mathcal{D}$. Тепер з наслідку 4.6.2 випливає, що $\mathfrak{A} \equiv \prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D}$. \square

У конкретних ситуаціях, часто маємо крім цих даних, спеціальну множину Λ речень з такою властивістю:

(*) Якщо \mathfrak{A} і \mathfrak{A}' є моделями теорії T , то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ тоді й лише тоді, коли в \mathfrak{A} і \mathfrak{A}' істинні одні й ті ж речення з Λ .

Назовемо Λ множиною основних базових тестових речень. Кожна бульова комбінація основних базових речень називається *тестовим реченням*.

Позначимо бульову алгебру, породженну $\{A(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \cup \mathcal{F}$ через $\mathcal{A}(\Lambda)$. З (*) одержуємо, що коли \mathcal{D} і \mathcal{D}' — два регулярні ультрафільтри над множиною S , то

$$\prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D} \equiv \prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D}' \iff \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\Lambda) = \mathcal{D}' \cap \mathcal{A}(\Lambda). \quad (3)$$

ТВЕРДЖЕННЯ 4.7.3. *Припустимо, що Λ — множина основних базових тестових речень. Тоді для кожного речення ϑ мови \mathcal{L} існує тестове речення λ , для якого*

- a) $A(\vartheta) \approx A(\lambda)$ і
- б) $\vartheta \leftrightarrow \lambda \in T$.

ДОВЕДЕННЯ. Потрібно лише довести, що $A(\vartheta) \in \mathfrak{A}(\Lambda)$. За твердженням 4.5.11, якщо $A(\vartheta)$ не лежить в $\mathfrak{A}(\Lambda)$, то існують регулярні ультрафільтри \mathcal{D} і \mathcal{D}' на множині S , такі що $\mathcal{D} \cap A(\Lambda) = \mathcal{D}' \cap A(\Lambda)$, але $A(\vartheta) \in \mathcal{D}$ і $A(\vartheta) \notin \mathcal{D}'$. Це суперечить (3), оскільки $\prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D} \equiv \prod \mathfrak{A}_s / \mathcal{D}'$. \square

ЗАУВАЖЕННЯ 4.7.4 (*Неголовні ультрадобутки скінчених полів*). Нехай S — зліченна множина. Означимо малі множини як скінченні підмножини в S . Для кожного $s \in S$ нехай F_s — скінченнє поле. Припустимо, що виконується умова:

(**) для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує лише скінчена кількість $s \in S$, для яких $|F_s| \leq n$.

Кожне скінченнє поле досконале. Це означає, що для простого числа p , кожне поле F_s задовольняє речення $\forall x \exists y y^p = x$ мови $\mathcal{L}(\text{ring})$.

Відомо, що $G(F_s) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ для кожного $s \in S$, де $G(F_s)$ — абсолютна група Галуа поля F_s і $\widehat{\mathbb{Z}}$ — поповнення групи \mathbb{Z} стосовно топології, визначеної всіма підгрупами групи \mathbb{Z} . Крім цього, відомо, що для заданих додатних чисел d і n , для майже всіх $s \in S$ істинне наступне твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.7.5. *Для кожного абсолютно незвідного полінома $f \in F_s[X, Y]$ степеня d існує n різних точок $(x_i, y_i) \in F_s \times F_s$, що $f(x_i, y_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$.*

Існує послідовність Π_1 речень мови $\mathcal{L}(\text{ring})$ для якої поле F є моделлю Π_1 тоді й лише тоді, коли $G(F) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$. Тому можемо виписати послідовність $\pi_{d,n}$ речень, таку що $F \vDash \pi_{d,n}$ тоді й лише тоді, коли F задовольняє 4.7.5. Для неголовних ультрадобутків полів F_s маємо таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.7.6. Якщо S задовольняє (1) і $F = \prod F_s / \mathcal{D}$ неголовний ультрадобуток, то F досконале поле, $G(F) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ і для кожного несталого незвідного полінома $f \in F(X, Y)$ існує нескінченно багато точок $(x, y) \in F \times F$, таких що $f(x, y) = 0$.

Більш повний виклад теорії моделей та ультрадобутків можна знайти у книзі Г. Кейслера і Ч.Ч. Чена Теория моделей (М.: Мир, 1977).

4.8. Аксіоматизовані класи структур

Тут під класом алгебраїчних систем розумітимемо деяку їх сукупність.

ОЗНАЧЕННЯ 4.8.1. Клас алгебраїчних структур K називається **аксіоматизованим**, якщо існують така сигнатура Σ і множина речень Z цієї сигнатури Σ , що для будь-якої алгебраїчної структури \mathfrak{A} виконується умова:

$$\mathfrak{A} \in K \iff \Sigma \in \text{сигнатурую алгебраїчної структури } \mathfrak{A}$$

$$\text{i } \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всіх } \Phi \in Z.$$

Тоді Σ називається *сигнатурою класу K* , а Z — *множиною аксіом* для K . Позначення: $K = K_\Sigma(Z)$.

Означення 4.8.2. Нехай всі структури класу K мають сигнатуру Σ . Елементарною теорією K , або теорією K називають множину речень сигнатури Σ , істинних на всіх алгебраїчних структурах класу K . Позначення: $Th(K)$.

Легко бачити, що виконується така властивість теорій: якщо $K_1 \subseteq K_2$ — класи алгебраїчних систем сигнатури Σ , то $Th(K_2) \subseteq Th(K_1)$.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.8.3. Клас K алгебраїчних систем сигнатури Σ є аксіоматизованим тоді і тільки тоді, коли $K = K_\Sigma(Th(K))$.

Клас K алгебраїчних систем є аксіоматизованим, якщо він є класом (сукупністю) моделей деякої теорії T . (існує така теорія T , що K є класом всіх моделей цієї теорії.)

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $K = K_\Sigma(Z)$. З $Z \subseteq Th(K)$ випливає, що $K_\Sigma(Th(K)) \subseteq K$. Обернене включення $K \subseteq K_\Sigma(Th(K))$ очевидне. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 4.8.4. Якщо K — клас алгебраїчних систем сигнатури Σ , то існує мінімальний за включенням аксіоматизований клас K_1 сигнатури Σ , який містить клас K .

ДОВЕДЕННЯ. Покажемо, що $K_1 = K_\Sigma(Z)$. Справді, якщо K_2 — аксіоматизований клас сигнатури Σ і $K \subseteq K_2$, то $Th(K_2) \subseteq Th(K)$. А тоді $K_\Sigma(Th(K)) \subseteq K_\Sigma(Th(K_2)) = K_2$. \square

ОЗНАЧЕННЯ 4.8.5. Клас K алгебраїчних структур сигнатури Σ називається замкненим стосовно ультрадобутків, якщо разом з кожною алгебраїчною структурою \mathcal{A}_s , $s \in S$, він містить їх ультрадобуток:

$$\mathfrak{A} \in K \text{ і } \mathcal{D} - \text{ультрафільтр} \implies \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / \mathcal{D} \in K.$$

ОЗНАЧЕННЯ 4.8.6. Клас K алгебраїчних структур сигнатури Σ називається *замкненим* стосовно елементарної еквівалентності, якщо разом з кожною алгебраїчною структурою A_s , $s \in S$, він містить всі елементарно еквівалентні їй структури:

$$\mathfrak{A} \in K \text{ і } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \implies \mathfrak{B} \in K.$$

ТЕОРЕМА 25. Клас K алгебраїчних систем сигнатури Σ є аксіоматизованим тоді і тільки тоді, коли він замкнений стосовно ультрадобутків та елементарної еквівалентності.

ДОВЕДЕННЯ. (\implies) Нехай клас алгебраїчних структур K аксіоматизований. Замкненість стосовно ультрадобутків випливає з теореми 23 Лося. Замкненість стосовно елементарної еквівалентності очевидна.

(\impliedby) Нехай клас алгебраїчних структур K замкнений стосовно ультрадобутків та елементарної еквівалентності.

Доведемо, що $K = K_\Sigma(Th(K))$. Включення $K \subseteq K_\Sigma(Th(K))$ очевидне. Доведемо протилежне: $K_\Sigma(Th(K)) \subseteq K$. Нехай $\mathfrak{A} \in K_\Sigma(Th(K))$. Для кожного речення $\Phi \in Th(\mathfrak{A})$ розглянемо множину $u_\Phi = \{\Psi \in Th(\mathfrak{A}) \mid \vdash (\Psi \rightarrow \Phi)\}$. Легко бачити, що тоді сім'я $X = \{u_\Phi \mid \Phi \in Th(\mathfrak{A})\}$ буде центрованою. За твердженням ?? кожна центрована множина міститься в деякому ультрафільтрі. Тому на множині $Th(\mathfrak{A})$ існує такий ультрафільтр \mathcal{D} , що $X \subseteq D$. Для кожного речення $\Phi \in Th(\mathfrak{A})$ існує алгебраїчна структура $\mathfrak{B}_\Phi \in K$, на якій істинне речення Φ . (Інакше б $\neg\Phi \in Th(\mathfrak{A})$, що суперечить $\Phi \in K_\Sigma(Th(K))$.) Доведемо, що $\mathfrak{A} \equiv \prod \mathfrak{B}_\Phi / \mathcal{D}$.

Якщо $\mathfrak{A} \models \Phi_0$, то $\mathfrak{B}_\Psi \models \Phi_0$ для всіх $\Psi \in u_{\Phi_0}$. З того, що $u_{\Phi_0} \in \mathcal{D}$, за теоремою 23 Лося, $\prod \mathfrak{B}_\Phi / \mathcal{D} \models \Phi_0$. Залишилося довести, що $\mathfrak{A} \models \Phi_0$. Якби $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ не виконувалося, то $\mathfrak{A} \models \neg\Phi_0$, і за доведеним вище, $\prod \mathfrak{B}_\Phi / \mathcal{D} \models \neg\Phi_0$, але це суперечить вже доведеному: $\prod \mathfrak{B}_\Phi / \mathcal{D} \models \Phi_0$. Отже, $\mathfrak{A} \equiv \prod \mathfrak{B}_\Phi / \mathcal{D} \in K$.

Таким чином доведено рівність $K = K_\Sigma(Th(K))$, і тому клас K аксіоматизований. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 4.8.7. (1) *Перетин довільної сім'ї аксіоматизованих класів сигнатури Σ є аксіоматизованим класом сигнатури Σ .*

(2) *Об'єднання скінченного числа аксіоматизованих класів сигнатури Σ є аксіоматизованим класом сигнатури Σ .*

ДОВЕДЕННЯ. Доведення залишаємо читачеві. \square

ОЗНАЧЕННЯ 4.8.8. Нехай K — клас алгебраїчних структур. Клас K називають *скінченно аксіоматизованим*, якщо $K = K_\Sigma(Z)$ для деякої скінченної множини аксіом Z .

ЗАУВАЖЕННЯ 26. Якщо клас K скінченно аксіоматизований, то взявши кон'юнкцію скінченної множини Z аксіом структури K , отримаємо множину аксіом $\{\Phi\}$ для K з одного речення Φ . Тоді клас K є скінченно аксіоматизованим, якщо він є класом всіх моделей деякого речення Φ .

Нехай K — клас алгебраїчних систем сигнатури Σ . Позначимо через \bar{K} його доповнення в класі $K_\Sigma(\emptyset)$ всіх алгебраїчних структур сигнатури Σ .

ТЕОРЕМА 27. *Клас K алгебраїчних систем сигнатури Σ є скінченно аксіоматизованим тоді і тільки тоді, коли він і його доповнення аксіоматизовані.*

ДОВЕДЕННЯ. (\implies) Якщо клас K скінченно аксіоматизований, то $K = K_\Sigma(\{\Phi\})$ для деякого речення Φ сигнатури Σ . Тоді $\bar{K} = K_\Sigma(\{\neg\Phi\})$. Тобто клас K і його доповнення аксіоматизовані.

(\impliedby) Нехай класи K і \bar{K} доповнення аксіоматизовані. Оскільки $K \cap \bar{K} = \emptyset$, $K = K_\Sigma(Th(K))$, $\bar{K} = K_\Sigma(Th(\bar{K}))$, за теоремою

компактності 24, існують такі скінченні множини $X \subseteq Th(K)$ і $Y \subseteq Th(K)$, що їх об'єднання $X \cup Y$ не має моделі. Оскільки $Th(K)$ і $Th(\bar{K})$ замкнені стосовно взяття кон'юнкції, можна вважати, що $X = \{\Phi\}$ і $Y = \{\Psi\}$. Тоді формула $\Phi \wedge \Psi$ тотожно хибна. Тоді на всіх алгебраїчних структурах з класу K істинне речення $\Phi \wedge \neg\Psi$, бо $\Phi \in Th_\Sigma(K)$. Навпаки, якщо на алгебраїчній структурі \mathfrak{A} сигнатури Σ істинне речення $\Phi \wedge \neg\Psi$, то $\mathfrak{A} \notin \bar{K}$, і отже $\mathfrak{A} \in K$. А тоді $K = K_\Sigma(\{\Phi \wedge \neg\Psi\})$. \square

4.9. Задачі і вправи до розділу 4

- (1) Довести, що теорія \mathcal{PA} несуперечлива.
- (2) Довести, що система аксіом теорії \mathcal{PA} незалежна.
- (3) Довести, що такі формули є теоремами теорії \mathcal{PA} :
 - 1) $\neg x = s(x)$;
 - 2) $0 + x = x$;
 - 3) $s(x) + y = s(x + y)$;
 - 4) $x + y = y + x$;
 - 5) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 - 6) $x \leq x$;
 - 7) $0 \cdot x = 0$;
 - 8) $s(x) \cdot y = x \cdot y + y$;
 - 9) $x \cdot y = y \cdot x$;
 - 10) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
 - 11) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
 - 12) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$;
 - 13) $(x + z = y + z \rightarrow x = y)$;
 - 14) $(\neg z = 0 \rightarrow (x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y))$;
 - 15) $0 \leq x$;
 - 16) $((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$;

- 17) $((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z);$
- 18) $(x \leq y \vee y \leq x);$
- 19) $\neg x < x;$
- 20) $x < s(x);$
- 21) $0 < s(x);$
- 22) $(x < y \rightarrow \neg y < x);$
- 23) $(x < y \vee y < x \vee x = y);$
- 24) $(x < y \leftrightarrow s(x) \leq y);$
- 25) $x \leq x + y;$
- 26) $(x < y \leftrightarrow x + z < y + z);$
- 27) $(\neg y = 0 \rightarrow x \leq x \cdot y);$
- 28) $(\neg x = 0 \rightarrow (y < z \leftrightarrow x \cdot y < x \cdot z)).$

- (4) Довести, що існує нестандартна модель теорії \mathcal{PA} .
- (5) Довести, що такі формули є теоремами теорії ZF:

- 1) $\exists! x(x = \emptyset)$, де $x = \emptyset := \forall y \neg y \in x$ (існування і єдиність порожньої множини \emptyset);
- 2) $\forall x \forall y \exists! z(z = \{x, y\})$, де $x = \{y, z\} := \forall u(u \in x \leftrightarrow (u = y \vee u = z))$ (існування і єдиність пари);
- 3) $\forall x \exists! y(y = \{x\})$, де $y = \{x\} := \forall z(z \in y \leftrightarrow z = x)$ (існування і єдиність $\{x\}$);
- 4) $(x, y) = (z, u) \rightarrow (x = z \wedge y = u)$, де $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (аксіома впорядкованої пари);
- 5) $((x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n))$, де $x_1, x_2, \dots, x_n := (x_1, (x_2, \dots, x_n))$ (аксіома впорядкованого набору);
- 6) $\forall x \exists! y(y = 2^x)$, де $y = 2^x := \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \rightarrow z \in x))$ (існування і єдиність буліана множини);
- 7) $\forall x \forall y \exists! z(z = x \times y)$, де $y = x_1 \times \dots \times x_n := \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists z_1 \dots \exists z_n (z_1 \in x_1 \wedge \dots \wedge z_n \in x_n \wedge u = (z_1, \dots, z_n)))$

для $n \geq 2$ (існування і єдиність декартового добутку);

- 8) $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y (y = x_1 \times \dots \times x_n)$, де (існування і єдиність декартового добутку);
 - 9) $\forall x \forall y \exists! z (z = x \cup y)$, $z = x \cup y := \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$ (існування і єдиність об'єднання);
 - 10) $\forall x \forall y \exists! z (z = x \cap y)$, де $z = x \cap y := \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$ (існування і єдиність перетину);
 - 11) $\forall x \exists! y (y = \cup x)$, де $y = \cap x := \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \rightarrow z \in u))$;
 - 12) $\forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists! y (y = \cap x))$, де $y = \cup x := \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u))$;
 - 13) $\neg x \in x$;
 - 14) $\neg(x \in y \wedge y \in x)$;
 - 15) $\neg(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$.
- (6) Довести, що якщо \mathcal{F} — фільтр над I , то $I \in \mathcal{F}$.
- (7) Нехай \mathcal{F} — фільтр над множиною I . Довести, що такі умови еквівалентні:
- a) \mathfrak{F} — власний фільтр;
 - б) $0 \notin \mathcal{F}$;
 - в) \mathcal{F} — центрована система множин.
- (8) Довести, що перетин довільної сім'ї фільтрів над множиною I є фільтром над I .
- (9) Довести, що об'єднання довільного ланцюга власних фільтрів над множиною I є власним фільтром над I .
- (10) Нехай $X \subseteq I$. Довести, що $\{Y | Y \subseteq I \wedge X \subseteq Y\}$ є фільтром над I .

- (11) Нехай \mathcal{F} — фільтр над I та $J \in \mathcal{F}$. Показати, що $\mathcal{F}_1 = \{X \cap J | X \in \mathcal{F}\}$ є фільтром над J , а також, що якщо \mathcal{F} — неголовний фільтр, то \mathcal{F}_1 також неголовний фільтр.
- (12) Довести, що якщо будь-яка скінчenna множина належить фільтру, то цей фільтр головний.
- (13) Довести, що кожний неголовний ультрафільтр містить всі множини, які мають скінченне доповнення.
- (14) Довести, що фільтр \mathcal{D} над множиною I є ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли \mathcal{D} є максимальною множиною в множині всіх фільтрів над I , впорядкованій за включенням.
- (15) Довести, що у множині всіх фільтрів Φ над множиною I , впорядкованій за включенням, $\{I\}$ є найменшим елементом. Показати також, що якщо $|I| \geq 2$, то в немає найбільшого елемента.
- (16) Довести, що для того, щоб над I існував фільтр, який містить множину $S \subseteq 2^I$, необхідно і достатньо, щоб перетин будь-якого скінченного числа елементів з S був непорожнім.
- (17) Нехай I — нескінчenna множина потужності α і $\Phi = \{X | X \subseteq I \text{ і } |I \setminus X| < \alpha\}$. Довести, що Φ є фільтром над I .
- (18) Довести, що система Ψ підмножин множини I міститься в деякому фільтрі Фреше тоді і тільки тоді, коли кожний перетин скінченного числа множин системи Ψ має потужність, рівну потужності множини I .
- (19) Показати, що кожний неголовний ультрафільтр над зліченою множиною є фільтром Фреше.

- (20) Нехай \mathcal{F} — фільтр над I , $A \subseteq I$ та $\mathcal{F}_A = \{X \cap A \mid X \in \mathcal{F}\}$.
Довести, що для того, щоб \mathcal{F}_A був фільтром над A , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $X \in \mathcal{F}$ виконувалося $X \cap A \neq \emptyset$.
- (21) Нехай \mathcal{D} — ультрафільтр над I , $A \subseteq I$ та $\mathcal{D}_A = \{X \cap A \mid X \in \mathcal{D}\}$. Довести, що для того, щоб \mathcal{D}_A був ультрафільтром над A , необхідно і достатньо, щоб $A \in \mathcal{D}$.
- (22) Показати, що будь-який фільтр можна розширити до ультрафільтра.
- (23) Довести, що кожний фільтр є перетином всіх ультрафільтрів, які його містять.
- (24) Нехай \mathcal{F} і \mathcal{G} — фільтри над I . Довести, що $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{G}\}$.
- (25) Довести, що якщо об'єднання скінченної послідовності $\{A_i\}_{i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, підмножин множини I належить ультрафільтру \mathcal{D} , то принаймні одна з множин A_i належить \mathcal{D} .
- (26) Нехай \mathcal{D} — ультрафільтр, а $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ — фільтри над I . Довести, що якщо $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n$, то існує таке i , $(1 \leq i \leq n)$, що $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{F}_i$.
- (27) Нехай J — нескінченна множина. Побудувати ультрафільтр \mathcal{D} і сім'ю ультрафільтрів $\{\mathcal{F}_j\}_{j \in J}$, такі що $\mathcal{D} \supseteq \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$, але \mathcal{D} не містить \mathcal{F}_j для жодного j .
- (28) Довести, що $\bigcap_{X \in \mathcal{D}} X$, де \mathcal{D} — ультрафільтр, містить не більше однієї точки.
- (29) Нехай \mathcal{F} — фільтр над I та \sim — деяке відношення еквівалентності на I . Нехай $\mathcal{F}^\sim = \{B \mid \exists A \ (A \in \mathcal{F} \wedge B = \{[x]_\sim \mid x \in A\})\}$.
Довести, що:
- \mathcal{F}^\sim — фільтр над I / \sim ;

- б) Якщо \mathcal{F} — ультрафільтр, то \mathcal{F}^\sim — ультрафільтр;
- в) Якщо \mathcal{F} — ультрафільтр і $[x]_\sim \notin \mathcal{F}$ для будь-якого x , то \mathcal{F}^\sim — неголовний ультрафільтр.
- (30) Довести, що фільтр \mathcal{F} над I є зліченно повним тоді і тільки тоді, коли не існує спадної послідовності $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ елементів $X_i \in \mathcal{F}$, такої що $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i = \emptyset$.
- (31) Довести, що \sim є відношенням еквівалентності на $\prod_{i \in I} M_i$.
- (32) Довести, що для будь-якої множини I
- $$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F},$$
- де $\mathcal{F} = \{I\}$.
- (33) Довести, що канонічне відображення $\varphi: \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}$,
де $\varphi(f) = f / \mathcal{F}$, є гомоморфізмом $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ на $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}$.
- (34) Довести, що якщо речення, яке не містить символів заперечення \neg та імплікації \rightarrow , істинне на прямому добутку алгебраїчних структур $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, то воно істинне і на фільтрованому добутку цих структур $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}$ по будь-якому фільтру \mathcal{F} .
- (35) Довести, що якщо $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1$ — фільтри над множиною I і $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$, то відображення φ , яке визначається умовою $\varphi(f/\mathcal{F}) = f / \mathcal{F}_1$, є гомоморфізмом $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}$ на $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}_1$.
- (36) Довести, що клас K алгебраїчних систем сигнатури Σ є аксіоматизованим тоді і тільки тоді, коли він замкнений стосовно ультрадобутків, ізоморфізмів та елементарних підсистем.
- (37) Нехай K — аксіоматизований клас, який містить системи як завгодно великих скінчених потужностей. Довести, що клас K_∞ , який складається з нескінчених

систем класу K є аксіоматизованим, але не скінченно аксіоматизованим.

Розділ 5

ТЕОРІЯ РЕКУРСІЙ

Для логічних числень висловлень і предикатів задовольняють у попередніх розділах доведені теореми про повноту. Вони стверджують, що для цих числень формула (секвенція) має доведення тоді й лише тоді, коли вона тотожно істинна. У випадку числення висловлень існує також проста процедура визначення коли для скінченної множини $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ задана формула ϕ виводиться з множини Γ : потрібно записати таблиці істинності для всіх формул з множини Γ і для формули ϕ і перевірити чи дляожної інтерпретації, для якої кожна формула з Γ істинна, істинна також і формула ϕ .

Природно запитати чи можна щось схоже зробити для числення предикатів. Якби це вдалося зробити, то враховуючи, що значна частина математики допускає формалізацію мовою числення предикатів, творча робота більшості математиків стала б зайвою. Щойно сформульоване питання відоме як проблема розв'язності для числення предикатів. Сформулюємо її ще раз у точнішому вигляді:

Проблема розв'язності. Для даної множини Γ формул числення предикатів і формули ϕ знайти ефективний метод для визначення чи виводиться ϕ з множини формул Γ ?

Як бачимо, це формулювання проблеми розв'язності обходить питання про те, який конкретний зміст вкладається у слово “ефективний”. У цьому розділі ми розглядаємо дві формалізації поняття “ефективності”, а саме, спосіб заснований на понятті машини Тюрінга, а потім за допомогою теорії рекурсивних функцій. Обидва підходи використовуємо лише для відповіді на проблему розв'язності для логіки першого порядку. Виявляється, що відповідь на загальну проблему розв'язності негативна, процедури розв'язання існують лише для деяких окремих теорій першого порядку і певних множин Г.

Історично, проблема розв'язності виникла в результаті спроб реалізації ідеї Д. Гільберта про обґрунтування математики за допомогою аксіоматичного методу, формалізованого у мові логіки першого порядку, звісно довівши що із запропонованих аксіом, не виводиться суперечність. Для цього, по-перше, потрібно виділити деяку фіксовану множину аксіом і показати, що вона не-суперечлива, тобто з неї не виводиться жодна формула вигляду $\vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. По-друге, бажано знати коли така множина аксіом є повною, тобто для кожного даного речення ϕ або ϕ або $\neg\phi$ можна вивести з аксіом, що належать множині.

При спробах знайти задовільну формалізацію поняття “ефективного методу”, математики у 1930–их роках розвинули багато різних абстрактних підходів до цієї проблеми, включаючи теорію рекурсивних функцій, λ -числення, і машини Тюрінга. Хоч ці методи сильно відрізняються один від одного за духом та формальними ознаками, виявляється, що вони всі по-суті еквівалентні, тобто моделюють одне і те ж поняття “обчислення”. Це підказує (емпіричний!) принцип:

Теза Черча. Функція ефективно обчислюється в принципі у реальному світі, коли вона обчислюється у кожній з щойно згаданих абстрактних моделей.

Зауважимо, що теза Черча — це не математичне твердження, а дуже важливий загально науковий емпіричний принцип.

Таким чином, для дослідження проблеми розв'язності ми розглянемо машини Тюрінга, а потім рекурсивні функції, а вже тоді, використовуючи отриману інформацію, сформулюємо і одержимо одну з версій відповіді на уточнену загальну проблему розв'язності для логіки першого порядку.

Розвиток теорії абстрактних обчислень почався перед появою електронних комп'ютерів. Насправді, комп'ютери і мови програмування використовують набагато більше абстрактних моделей обчислень. Все ж, стандартна архітектура Неймана для цифрових комп'ютерів була створена за образом машин Тюрінга, а одна з мов програмування, яку скорочено позначають LISP, багато запозичила з λ -числення.

5.1. Машини Тюрінга

Серед різних способів формалізації поняття “ефективного методу”, найбільш поширеним є використання простих абстрактних комп'ютерів, які називають машинами Тюрінга, і які були введені більш-менш одночасно Алланом Тюрінгом та Емілем Постом у 1936 році. Як і більшість справжніх цифрових комп'ютерів, машини Тюрінга складаються з двох головних частин, процесорного пристрою і пам'яті (яка включає дані входу-виходу), і які ми розглянемо окремо перш ніж досліджувати їх взаємодію. Пам'ять можна розглядати як нескінченну в одному напрямку стрічку, яка поділена на комірки, схожі на кадри кінострічки.

Власне машина Тюрінга — процесорний пристрій. Він наділений сканером або “голівкою”, яка може зчитувати або записувати у окрему комірку стрічку і яку можна рухати наліво або направо лініє на одну комірку за один такт.

5.1.1. Означення машини Тюрінга. Перше, що ми повинні зробити для описання машини Тюрінга — це уточнити, яку інформацію зчитують і пишуть на стрічці, та які символи при цьому використовують.

Означення 5.1.1. Алфавіт машини Тюрінга — це непорожня скінчена множина Σ , елементи якої називають *символами*, при цьому вважається, що $0 \notin \Sigma$. Символ 0 не включається у Σ , оскільки 0 використовується для позначення всіх порожніх комірок стрічки.

Якщо задано алфавіт Σ , то *стрічка* (з елементами з Σ) — це нескінченна послідовність $\mathbf{a} = a_0a_1a_2a_3\dots$, така що для кожного цілого i комірка a_i є одним з символів множини $\{0\} \cup \Sigma$. i -у комірку називають *бланком*, якщо $a_i = 0$, і *заповненою*, якщо a_i — символ з Σ . Бланк-стрічка — це стрічка, у кожній комірці якої стоять 0.

Пізніше ми доведемо, що не зменшуючи загальності можна обмежитися алфавітом $\Sigma = \{1\}$ з одного символа. По-суті, все що машина Тюрінга може зробити, використовуючи алфавіт з багатьох символів, вона може зробити, використовуючи лише один символ. На практиці, звичайно, зручно мати більше символів, особливо коли використовують машину Тюрінга для окремих задач.

Приклад 5.1.2. Бланк-стрічка має вигляд:

0-а комірка найлівіша, комірка 1 безпосередньо справа, комірка 2 безпосередньо справа за коміркою 1, і так далі. Нехай наш алфавіт: $\Sigma = \{1, x, y\}$. Ось приклад частково заповненої стрічки:

У цьому випадку, комірка 1 містить 1, так само символ 1 містять комірки 5, 7, 8, 10, і 13; кожна з комірок 3, 4, 9 і 16 містить букву алфавіту x ; кожна з комірок 11, 14 і 15 містить букву y ; решта комірок містять 0, тобто порожні.

Для того, щоб відмітити яка комірка машини Тюрінга сканується, будемо звичайно надавати додаткову інформацію поруч з початковим описанням стрічки.

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.3. Конфігурація стрічки — це трійка (i, q_s, \mathbf{a}) , де i — натуральне число, q_s — стан машини M , і $\mathbf{a} = a_1a_2\dots$ — стрічка. Якщо задано конфігурацію стрічки (i, q_s, \mathbf{a}) , будемо називати комірку i сканованою коміркою, а q_s — станом машини M .

Від стану q_s залежить, які дії машина Тюрінга повинна виконувати далі. Зокрема, будемо вважати, що машина припиняє обчислення і зупиняється, якщо її станом є q_0 , і починає роботу у стані q_1 .

Якщо не стверджується інше, будемо припиняти, що всі, за винятком їх скінченої кількості, комірки кожної даної стрічки є бланками. Ми звичайно виписуємо настільки малий фрагмент стрічки наскільки це можливо і завжди пропускаємо бланки справа. Тому слово

010xx1011x1y01yyx

зображає ту ж стрічку, що й у прикладі 5.1.2. У багатьох випадках використовуватимемо запис z^n для скорочення n послідовних записів символа z , тому попередня стрічка може бути записана ще коротше у вигляді

$$010x^21012x1y01y^2x.$$

Аналогічно, якщо σ — скінченна послідовність елементів множини $\Sigma \cup \{0\}$, то писатимемо σ^n коли потрібно задати послідовність, що складається з n копій слова σ підряд. Наприклад, $(010)^3$ — це 010010010 . Якщо машина сканує i -у комірку стрічки, перебуваючи при цьому в стані q_s , то ми підкреслюємо скановану комірку і пишемо q_s зліва від неї або справа від стрічки. Наприклад, ми зображаємо конфігурацію стрічки з прикладу 5.1.2, де комірка 4 сканується і має стан q_2 у вигляді одного з таких двох слів:

$$010q_2\underline{xx}101^2x1y01y^2x \text{ або } 010\underline{xx}101^2x1y01y^2x;.$$

“Процесор” машини Тюрінга — це скінченний список команд, який описує, що машина повинна робити у різних ситуаціях. (Нагадаємо, що машина Тюрінга — це модель абстрактного комп’ютера ...) Формальне означення, на перший погляд, не схоже на це описання.

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.4. *Машина Тюрінга з алфавітом Σ і множиною станів $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ — це функція*

$$M: \{q_0, q_1, \dots, q_n\} \times (\{0\} \cup \Sigma) \longrightarrow (\{0\} \cup \Sigma) \times \{-1, 0, 1\} \times \{q_0, q_1, \dots, q_n\}.$$

Зауважимо, що M не необхідно є означеню для всіх можливих пар $(s, j) \in \{q_0, \dots, q_n\} \times (\{0\} \cup \Sigma)$. Іноді називатимемо машину Тюрінга просто машиною або ж ТМ. Кажуть, що машина Тюрінга M з означення 5.1.4 є *машиною Тюрінга з $n+1$ станом*.

Інтуїтивно, ми маємо процесор і скінчений список базових інструкцій, які він може виконувати. Якщо дано стан і символ, який позначає комірку стрічки, яка сканується, то процесор виконує такі дії

- записує символ у скановану комірку, замінюючи зчитуваний символ (це може бути той самий символ, тобто символ у комірці не змінюється),
- переводить сканер на одну комірку наліво або направо або залишає на місці,
- переходить до виконання наступної інструкції.

Тобто, $M(q_s, c) = (b, d, t)$ означає, що коли наша машина перебуває у стані q_s (тобто виконує інструкцію s), скануючи i -у комірку, і $a_i = c$ (тобто i -а комірка містить c), то машина M виконує таке:

- виконує $a_i = b$ (тобто вписує b замість c у скановану комірку),
- переводить сканер у a_{i+d} (тобто рухається на одну комірку вліво, якщо $d = -1$, на одну комірку вправо, якщо $d = 1$, і продовжує сканувати ту ж комірку, якщо $d = 0$),
- вводить стан t (тобто переходить до інструкції t).

Якщо наш процесор не знає як виконувати інструкцію s (тобто $M(s, a)$ невизначена), то виконувані обчислення просто припиняються.

ПРИКЛАД 5.1.5. Часто зображають машини Тюрінга у вигляді таблиці, з одним рядком для кожного стану і одним стовпчиком для кожного можливого символу у сканованій комірці. Замість -1 і 1 , у записах таких таблиць будемо використовувати літери L і R для того, щоб зробити їх більш наочними. Отож таблиця

| M | 0 | 1 |
|-----|-------|-------|
| 1 | $1R2$ | $0R1$ |
| 2 | $0L2$ | |

визначає таку машину Тюрінга M з алфавітом $\{1\}$ і двома станами 1 і 2, що $M(1, 0) = (1, 1, 2)$, $M(1, 1) = (0, 1, 1)$, і $M(2, 0) = (0, -1, 2)$, але $M(2, 1)$ невизначена. (Тому M має область визначення

$\{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ і область значень $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, -1, 2)\}.$)

Якщо машина M читає стрічку

$010\underline{0}1111 ; 1,$

то вона знаходиться у стані 1 і сканує комірку, що містить 0, і, крім цього,

- записує 1 у скановану комірку,
- переводить сканер на одну комірку вправо,
- переходить до стану 2.

В результаті отримуємо нову конфігурацію стрічки

$0101\underline{1}1111 ; 2.$

Оскільки M не знає, що робити з входом 1 у стані 2, обчислення припиняються.

5.1.2. Приклади обчислень за допомогою машин Тюрінга. Говорячи неформально, обчислення — це послідовність дій машини M на стрічці, що здійснюються за попередніми правилами, починаючи з інструкції 1 і скануючи комірку 0 заданої стрічки. Обчислення закінчується (або *зупиняється*) якщо машина сканує позицію стрічки, у якій вона не знає, що робити

далі, або переходить у лівий кінець стрічки. (Якщо таке не трапляється, то обчислення ніколи не закінчується — не зовсім так як у реальних комп’ютерах.)

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.6. Припустимо, що M — машина Тюрінга. Тоді:

- Якщо $p = (i, s, \mathbf{a})$ — конфігурація стрічки у алфавіті M і $M(s, a_i) = (b, d, t)$ означена, то $M(p) = (i + d, t, \mathbf{a}')$ — *наступна конфігурація стрічки*, де $a'_i = b$ і $a'_j = a_j$ для $j \neq i$.
- *Часткове обчислення* машиною M — це така послідовність $p_1 p_2 \dots p_k$ позицій стрічки, що $p_{l+1} = M(p_l)$ для кожного $l < k$.
- Часткове обчислення $p_1 p_2 \dots p_k$ машиною M є *обчисленням з вхідною стрічкою* \mathbf{a} , якщо $p_1 = (0, 1, \mathbf{a})$ і $M(p_k)$ невизначена. *Вихідна стрічка* обчислення — це стрічка останньої конфігурації стрічки p_k .

Зауважимо, що обчислення має лише скінченну кількість кроків.

ПРИКЛАД 5.1.7. Розглянемо як машина M з прикладу 5.1.5 виконує обчислення. Нашою вхідною стрічкою буде $\mathbf{a} = 1100$, тобто, стрічка, яка є бланком за винятком $a_0 = a_1 = 1$. Початковою конфігурацією стрічки для обчислення машиною M з вхідною стрічкою $\mathbf{a} \in \underline{1100} : 1$. Послідовні кроки обчислення такі:

$$0\underline{1}00 : 1, \quad 00\underline{0}0 : 1, \quad 001\underline{0} : 2, \quad 00\underline{1}0 : 2.$$

Залишимо читачеві перевірку того, що це справді часткове обчислення машиною M . Оскільки значення $M(2, 1)$ невизначене,

то процес на цьому кроці закінчується і це часткове обчислення справді є обчисленням.

ПРИКЛАД 5.1.8. Машина Тюрінга P , задана нижче, задовольняє вимогу: її виходом є 01^m , а вхід 01^n01^m , як тільки $n, m > 0$.

| P | 0 | 1 |
|---|-----|-----|
| 1 | 0R2 | |
| 2 | | 1R3 |
| 3 | 0R4 | 1R3 |
| 4 | 0R4 | 0R5 |
| 5 | 0L8 | 1L6 |
| 6 | 0L6 | 1R7 |
| 7 | 1R4 | |
| 8 | 0L8 | 1L9 |
| 9 | | 1L9 |

Проведіть обчислення з входом 01^301^4 , щоб краще зрозуміти, як працює ця машина.

Розглянемо як машини Тюрінга обчислюють функції від n змінних, аргументи яких пробігають деякі підмножини множини натуральних чисел, тобто функції $f: X \rightarrow \mathbb{N}$, де $X \subset \mathbb{N}^n$. Домовимося записувати на стрічці машини Тюрінга впорядковану послідовність натуральних чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) у вигляді послідовності нулів та одиниць

$$0 \underbrace{1 \dots 1}_{x_1+1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{x_2+1} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{x_n+1} 0,$$

або в скорочених позначеннях $01^{x_1+1}01^{x_2+1}0\dots01^{x_n+1}0$. Домовимося також, що машина M розпочинає працювати з положення, коли в стані q_1 сканується крайня права одиниця, тобто з конфігурації $01^{x_1+1}01^{x_2+1}0\dots01^{x_n}q_110$. Якщо функція f визначена

для (x_1, \dots, x_n) , то в результаті роботи машини на стрічці записується $f(x_1, \dots, x_n) + 1$ одиниця, після чого машина зупиняється, а в ішому випадку машина працює нескінченно довго. При таких умовах кажуть, що машина M обчислює функцію f .

Означення 5.1.9. Машина Тюрінга M правильно обчислює функцію f , якщо для тих значень аргумента, для яких функція f визначена, M переводить конфігурацію стрічки

$$q_1 01^{x_1+1} 01^{x_2+1} 0 \dots 01^{x_n} 10$$

у конфігурацію $q_0 1^{f(x_1, \dots, x_n)+1} 0$. Якщо f не визначена для (x_1, \dots, x_n) , то машина працює нескінченно довго.

ПРИКЛАД 5.1.10. Побудуємо машину Тюрінга M_0 , яка правильно обчислює функцію O , для якої $O(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{N}$. Ця машина повинна перетворювати конфігурацію $q_1 01^{x+1} 0$ у $q_0 00^{x+2}$. Її програма є такою: $q_1 0 \rightarrow q_2 0 R$, $q_2 1 \rightarrow q_2 1 R$, $q_2 0 \rightarrow q_3 0 L$, $q_3 1 \rightarrow q_4 0$, $q_4 0 \rightarrow q_3 0 L$, $q_3 0 \rightarrow q_0 0$.

ПРИКЛАД 5.1.11. Побудуємо машину Тюрінга M_s , яка правильно обчислює функцію s — збільшення на 1, задану правилом $s(x) = x + 1$ для кожного $x \in \mathbb{N}$. Машина M_s з програмою $q_1 0 \rightarrow q_2 R$, $q_2 1 \rightarrow q_2 1 R$, $q_2 0 \rightarrow q_3 0$, $q_3 1 \rightarrow q_3 1 L$, $q_3 0 = q_0 0$ переводить конфігурацію $q_1 01^{x+1} 0$ в $q_0 01^{x+2}$.

ПРИКЛАД 5.1.12. Розглянуті у наступному підпункті основні машини Тюрінга (за винятком B^+ і B^-) правильно обчислюють відповідні функції.

5.1.3. Основні машини Тюрінга. Розглянемо приклади деяких простих, але важливих машин Тюрінга, які використовуватимуться як складові частини для побудови інших машин Тюрінга.

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.13. Перелічені машини Тюрінга

| | | |
|-------------------------|--------------------|---|
| 1. A | (перенесення нуля) | $q_1001^x 0 \rightsquigarrow q_001^x 00$ |
| 2. B⁺ | (зсув вправо) | $q_101^x 0 \rightsquigarrow 01^x q_00$ |
| 3. B⁻ | (зсув вліво) | $01^x q_10 \rightsquigarrow q_001^x 0$ |
| 4. B | (транспозиція) | $q_101^x 01^y 0 \rightsquigarrow q_001^y 01^x 0$ |
| 5. K | (копіювання) | $q_101^x 00^x 0 \rightsquigarrow q_001^x 01^x 0$ |
| 6. O | (стирання) | $q_101^x 0 \rightsquigarrow q_000^x 0$ |
| 7. R | (видалення 1) | $q_101^x + 1 0 \rightsquigarrow q_001^x 0$ |
| 8. S | (долучення 1) | $q_101^x 0 \rightsquigarrow q_001^x + 1$ |
| 9. ⊕ | (додавання) | $q_101^x + 1 01^y + 1 0 \rightsquigarrow q_001^{x+y+1} 000$ |
| 10. ⊗ | (множення) | $q_101^x + 1 01^y + 1 0 \rightsquigarrow q_001^{xy+1} 0$ |

назвемо *простими машинами*.

Ось деякі з відповідних їм програм:

$$\mathbf{A}: \quad q_10 \rightarrow q_20R, \quad q_20 \rightarrow q_31L, \quad q_31 \rightarrow q_31R, \quad q_30 \rightarrow q_40L, \\ q_41 \rightarrow q_41L, \quad q_40 \rightarrow q_00.$$

$$\mathbf{B}^+: \quad q_10 \rightarrow q_20R, \quad q_20 \rightarrow q_31L, \quad q_31 \rightarrow q_31R, \quad q_30 \rightarrow q_00.$$

$$\mathbf{B}^-: \quad q_10 \rightarrow q_20L, \quad q_21 \rightarrow q_21L, \quad q_20 \rightarrow q_0.$$

B:

5.1.4. Добуток машин Тюрінга.

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.14. Нехай M_1 і M_2 — машини Тюрінга, що мають спільний алфавіт a_0, a_1, \dots, a_s . Припустимо, що алфавіти їх станів q_0, q_1, \dots, q_k і q_0, q'_1, \dots, q'_l мають єдиний спільний елемент q_0 — символ зупинки.

Добутком машин Тюрінга M_1 і M_2 з тим самим алфавітом a_0, a_1, \dots, a_s і алфавітом станів $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, q'_2, \dots, q'_l$ називають машину M , яка будується у такий спосіб. Програма машини M отримується як об'єднання програм для M_1 і M_2 , та заміни у цьому об'єднанні у всіх командах машини M_1 букви q_0 (що є

командою зупинки машини M_1) буквою q'_1 (командою початку роботи машини M_2). У командах з M_2 всі символи залишаємо без зміни.

ПРИКЛАД 5.1.15. Побудуємо за допомогою машин B^+ , B , B^- , O машину Тюрінга, яка обчислює функцію $\pi_m^n(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) = x_m$. Для цього спочатку застосуємо $m - 1$ разів правий зсув, щоб отримати таку конфігурацію

$$((B^+)^{m-1}) \quad 01^{x_1+1}0\dots q_1 01^{x_m+1}0\dots 01^{x_n+1}0.$$

Далі, за допомогою машини B переставляємо масив 01^{x_m+1} з кожним сусіднім зліва масивом так, щоб масив 01^{x_m+1} зайняв перше місце:

$$((B \cdot B^-)^{m-1}) \quad 01^{x_m+1}01^{x_1+1}\dots q_0 1^{x_{m-1}+1}01^{x_{m+1}+1}\dots 01^{x_n+1}0.$$

Потім застосовуємо $n - 1$ разів машину B^+ , щоб отримати таку конфігурацію

$$(B^+)^{n-1} \quad 01^{x_m+1}01^{x_1+1}01^{x_1+1}\dots 01^{x_{m-1}+1}01^{x_{m+1}+1}\dots q_0 1^{x_n+1}0.$$

Нарешті, послідовно зітремо справа наліво всі масиви одиниць, крім первого:

$$(B^+)^{n-1} \quad q_0 1^{x_m+1}01^{x_1+1}0^{x_1+1}\dots 00^{x_{m-1}+1}01^{x_{m+1}+1}\dots 00^{x_n+1}0.$$

В результаті отримуємо, що шуканою машиною Тюрінга, що правильно обчислює π_m^n є добуток

$$(B^+)^{m-1}(B \cdot B^-)^{m-1}(B^+)^{n-1}(O \cdot B^-)^{n-1}.$$

5.2. Рекурсивні функції

5.2.1. Примітивні рекурсивні функції. Розглянемо родину \mathcal{F}_n всіх функцій з \mathbb{N}^n в \mathbb{N} , де \mathbb{N} – множина натуральних

чисел. Нехай $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$, де n пробігає додатні натуральні числа. Серед функцій з \mathcal{F} , ті що використовуються як рекурсивні операції “повсякденної” математики, називаються примітивними рекурсивними функціями (означення 5.2.1). Далі, до рекурсивних функцій включають менш “обчисленні” функції (означення 5.2.7). Всі результати про розв’язність і нерозв’язність виражаються в термінах цих функцій.

Розглянемо наступні основні функції:

- (1a) тотожно нульова функція: $f(x) = 0$;
- (1b) функція додавання одиниці: $f(x) = x + 1$; і
- (1c) функції проектування: $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ для $1 \leq i \leq n$.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2.1. Множина *примітивних рекурсивних функцій* — це найменша підмножина в \mathcal{F} , що містить функції (1) і замкнена стосовно таких операцій:

- (2a) *Суперпозиція*: Якщо $g \in \mathcal{F}_m$ і $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}_n$ — примітивні рекурсивні функції, то функція

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$$

також примітивна рекурсивна; і

- (2b) *Індуктивне означення*: Якщо $f_0 \in \mathcal{F}_n$ і $g \in \mathcal{F}_{n+2}$ — примітивні рекурсивні функції, то функція, означена за індукцією

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, 0) &= f_0(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}) &= g(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)), \end{aligned}$$

також примітивна рекурсивна.

Перелічимо деякі стандартні примітивні рекурсивні функції. У кожному випадку означення ґрунтуються на вже отриманих на попередньому кроці функціях.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.2.2. Наведені у списку функції є примітивними рекурсивними функціями:

- (3a) *сталі функції*, $f(x) = k$ (застосувати (2a), (1b) і (1a));
- (3b) *тотожна функція*, $f(x) = x$ (використати (1c) з $n = 1$);
- (3c) *функція додавання* $f(x, y) = x + y$ (використати індукцію за y);
- (3d) *функція множення*, $f(x, y) = xy$;
- (3e) *експоненційна функція*, $f(x, y) = x^y$, де $f(x, 0) = 1$;
- (3f) *функція факторіал*, $f(x) = x!$, де $f(0) = l$;
- (3g) *функція попередника*, $\text{pd}(0) = 0$ і $\text{pd}(x + 1) = x$;
- (3h) *функція знаку*, $\text{sgn}(0) = 0$ і $\text{sgn}(x + 1) = 1$;
- (3i) *віднімання з точністю до 0*, $f(x, y) = x - y$, якщо $x > y$ і 0 в іншому випадку, позначається $f(x, y) = x - y$ ($x - (y + 1) = \text{pd}(x - y)$);
- (3j) *$\overline{\text{sgn}}$ -функція*, $\overline{\text{sgn}}(x) = 1 - x$ (тобто, $\overline{\text{sgn}}(0) = l$ і $\overline{\text{sgn}}(x) = 0$, якщо $x > l$);
- (3k) *мінімум-функція*, $\min(x, y) = y - (y - x)$;
- (3l) *максимум-функція*, $\max(x, y) = x + y - \min(x, y)$;
- (3m) *абсолютна величина*, $|x - y| = (x - y) + (y - x)$;
- (3n) *функція ділення* x на y з остачею, $\text{rm}(0, y) = 0$ і $\text{rm}(x + 1, y) = (\text{rm}(x, y) + 1)\text{sgn}(y - (\text{rm}(x, y) + 1))$ і
- (3o) *функція цілої частини* $[x/y]$,

$$[0/y] = 0, \quad [(x + 1)/y] = [x/y] + \overline{\text{sgn}}(y - (\text{rm}(x, y) + 1)).$$

Тому, $x = [x/y]y + \text{rm}(x, y)$ і $0 \leq \text{rm}(x, y) < y$ для всіх $x > 0$ і всіх $y > 0$.

Нарешті, “довгі суми” та “довгі добутки” є примітивними рекурсивними функціями, як показує таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.2.3. Якщо $g(x_1, \dots, x_n, y)$ – примітивна рекурсивна функція, то обидві функції $\sum_{y < x} g(x_1, \dots, x_n, y)$ і $\prod_{y < x} g(x_1, \dots, x_n, y)$ є примітивними рекурсивними. Справді, означимо довгє сумування індуктивно:

$$\sum_{y < 0} g(\mathbf{x}, y) = 0 \quad i \quad \sum_{y < z+1} g(\mathbf{x}, y) = \sum_{y < z} g(\mathbf{x}, y) + g(\mathbf{x}, z), \quad (4a)$$

$$\sum_{y \leq z} g(\mathbf{x}, y) = \sum_{y < z+1} g(\mathbf{x}, y), \quad i \quad (4b)$$

$$\sum_{w < y < z} g(\mathbf{x}, y) = \sum_{\substack{y < z+1 \\ y < z-w}} g(\mathbf{x}, y + w + 1). \quad (4c)$$

Аналогічні формули також виконуються і для довгого множення.

У цьому твердженні і далі $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$.

5.2.2. Композиція примітивно рекурсивних функцій.

ТЕОРЕМА 5.2.4. Якщо функції $f(x_1, \dots, x_m), \dots, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ правильно обчисленні за Тюрінгом, то такою є і їх суперпозиція (складна функція)

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

ДОВЕДЕННЯ. Це твердження ми поки-що не доводимо, Доведення можна почерпнути з підручника [17]. \square

5.2.3. Примітивні рекурсивні відношення. Нагадаємо, що характеристична функція $\chi_r(x_1, \dots, x_n)$ n -арного відношення $r(x_1, \dots, x_n)$ на множині натуральних чисел \mathbb{N} приймає значення 1, якщо $r(x_1, \dots, x_n)$ істинне і значення 0, якщо $r(x_1, \dots, x_n)$ хибне. Відношення r називають *примітивним рекурсивним*, якщо його характеристична функція χ_R примітивна рекурсивна.

Якщо g_1, \dots, g_n — m -арні примітивні рекурсивні функції і r — n -арне примітивне рекурсивне відношення, то $s(\mathbf{x}) = r(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$ є m -арним відношенням з характеристичною функцією $\chi_r(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$. Таким чином, s також є примітивним рекурсивним відношенням.

Якщо q і r — примітивні рекурсивні n -арні відношення, то $q \cap r$, $q \cup r$ і q' ($=$ доповнення q) — примітивні рекурсивні відношення з характеристичними функціями $\chi_q \chi_r$, $\max(\chi_q, \chi_r)$ і $1 - \chi_q$ відповідно.

Тут використано примітивні рекурсивні відношення для отримання нових примітивних рекурсивних функцій. Нехай r_1, \dots, r_m — розділені n -арні примітивні рекурсивні відношення, об'єднання яких дорівнює \mathbb{N}^n і нехай g_1, \dots, g_m — довільні примітивні рекурсивні n -арні функції. Нехай $f(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x})$, якщо $r_i(\mathbf{x})$ істинне, $i = 1, \dots, m$. Тоді

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \chi_{r_i}(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}),$$

і отже f — примітивна рекурсивна функція.

Тепер означимо оператор, що інтерпретує квантор існування як відношення.

Для $(n+l)$ -арного відношення $r(x_1, \dots, x_n, y)$, і чисел $a, b \in \mathbb{N}$, де $a < b$ означимо $(n+2)$ -арне відношення $(\exists y)_{a < y < b} r(\mathbf{x}, y)$ умовою, що воно істинне, якщо існує такий елемент y , $a < y < b$, що

$r(\mathbf{x}, y)$ істинне. Характеристична функція цього нового відношення задається формулою $\min \left\{ 1, \sum_{a < y < b} \chi_r(\mathbf{x}, y) \right\}$. Таким чином, це відношення є примітивним рекурсивним, якщо r — примітивне рекурсивне.

Мінімум-оператор $(\mu y)_{a < y < z}$, який ми тепер означимо, переворює відношення у функції.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2.5. Нехай $r(x_1, \dots, x_n, y) — (n + 1)$ -арне відношення. Тоді $(\mu y)_{a < y < x} r(\mathbf{x}, y)$ — це найменший елемент y , з властивістю $a < y < x$, такий що твердження $r(\mathbf{x}, y)$ істинне, якщо такий y існує, і z в іншому випадку.

Рівність

$$(\mu y)_{a < y < b} r(\mathbf{x}, y) = a + \sum_{a < s \leq z} \prod_{a < t < s} (1 - \chi_r(\mathbf{x}, t))$$

показує, що коли r примітивне рекурсивне відношення, то $(\mu y)_{a < y < z} r(\mathbf{x}, y)$ примітивна рекурсивна функція.

Виділимо деякі властивості, які є наслідками цих означенень:

- ТВЕРДЖЕННЯ 5.2.6.**
- 1) Відношення “ $x < y$ ” примітивне рекурсивне, оскільки його характеристичною функцією є $\text{sgn}(y - x)$;
 - 2) Відношення “ $y > 0$ і y ділить x ”, яке позначимо $y|x$, — примітивне рекурсивне, оскільки його характеристичною функцією є $\text{sgn}(x)(1 - \text{rm}(y, x))$;
 - 3) Відношення “ x — просте число” (позначення $pr(x)$) примітивне рекурсивне, оскільки воно означене умовою $x > 1 \wedge \neg(\exists y)_{1 < y < x} y|x$;
 - (1) Функцію p_i — i -е просте число, можна означити за індукцією:

$$p_1 = 2 \quad i \quad p_{i+i} = (\mu x)_{p_i < x < p_{i+1}} pr(x).$$

5.2.4. Рекурсивні функції.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2.7. *Множина рекурсивних функцій* — це найменша підмножина функцій, що містить всі примітивні рекурсивні функції і замкнена стосовно суперпозиції, індуктивного означення і дії μ -*оператора* (*мінімум-оператора*), означення якого ми зараз сформулюємо.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2.8. Нехай $r(x_1, \dots, x_n, y) - (n+l)$ -місне відношення на \mathbb{N} . Якщо для даного набору $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ існує $y \in \mathbb{N}$, для якого $r(x_1, \dots, x_n, y)$, то визначимо функцію

$$f(x_1, \dots, x_n) := (\mu y)r(x_1, \dots, x_n, y);$$

тут $\mu(y)$ означає найменше з таких y , що $r(x_1, \dots, x_n, y)$.

ЗАУВАЖЕННЯ 5.2.9. Якщо ми можемо встановити для кожного набору (x_1, \dots, x_n, y) чи істинне твердження $R(\mathbf{x}, y)$ (нагадаємо, що як звичайно $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$), то можна обчислити $(\mu y)r(\mathbf{x}, y)$, безпосередньо перевіривши чи істинні твердження $r(\mathbf{x}, 0), r(\mathbf{x}, 1), r(\mathbf{x}, 2), \dots$. Отже, якщо функція f визначена для (x_1, \dots, x_n) , то за скінченнє числа кроків можна знайти перше y , для якого $r(\mathbf{x}, y)$ істинне. Проте не існує границі в термінах r і (x_1, \dots, x_n) для цього числа кроків.

Зауважимо, що існує границя для числа кроків, необхідних для обчислення примітивних рекурсивних функцій для заданих аргументів.

ПРИКЛАД 5.2.10. 1) μ -оператор $(\mu z)yz = x$ визначає часткову (не скрізь визначену) функцію, що виражає частку від ділення двох натуральних чисел.

2) μ -оператор $(\mu z)yz \geq x$ визначає цілу частину частки x/y двох натуральних чисел x і y .

Як показують ці приклади, функція $(\mu y)r(x_1, \dots, x_n, y)$ може бути невизначеною для деяких $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

5.2.5. Функція Аккермана. Використаємо індукцію за m для означення послідовності $\phi_m(y)$ примітивних рекурсивних функцій: $\phi_0(y) = y + 1$, і коли ϕ_m означене, то

$$\phi_{m+1}(y)(0) = \phi_m(1) \text{ і } \phi_{m+1}(y + 1) = \phi_m(\phi_{m+1}(y)).$$

Ці функції дуже швидко зростають разом з m . Справді, $\phi_1(y) = y + 2$, $\phi_2(y) = 2y + 3$, $\phi_3(y)$ зростає за аргументом y як $5 \cdot 2^y$, $\phi_4(y)$ має експоненційний ріст за аргументом y , $\phi_5(y)$ є ітерацією y разів функції $\phi_4(y)$, і так далі. Зокрема, кожна примітивна рекурсивна функція обмежена однією з ϕ_n . Точніше, для кожної примітивної рекурсивної функції $g(x_1, \dots, x_n)$ існує таке число m , що для всіх x_1, \dots, x_n виконується нерівність

$$g(x_1, \dots, x_n) < \phi_m(x_1 + \dots + x_n). \quad (1)$$

Аналіз доведення цього твердження показує, що m можна обчислити індукцією за кількістю кроків у побудові з примітивних функцій наступним способом.

Для тотожно нульової функції, функції наступності і функції проектування, надамо m значень 0, 1 і 0, відповідно.

Якщо $g(x) = h_0(h_1(x), \dots, h_k(x))$ і константою, відповідною $h_i \in m_i$, $i = 0, \dots, k$, то g задовольняє (1), з $m = m_0 + \max(m_1 + \dots + m_k) + 6$.

Нарешті, для операції індуктивного переходу, якщо $g(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x})$ і $g(\mathbf{x}, y + 1) = h_1(\mathbf{x}, y, g(\mathbf{x}, y))$, і якщо константами, відповідними $h_0, h_1, \in m_0, m_1$, відповідно, то g задовольняє (1) при $m = \max(m_0, m_1) + 5$.

Означимо функцію Аккермана як $\phi(x, y) = \phi_x(y)$. Незважаючи на те, що це означення індуктивне, воно не використовує

принцип примітивної рекурсивної індукції (2b) з означення 5.2.1. Справді, якби ϕ була примітивною рекурсивною, то й $\psi(x) = \phi(x, x)$ була б примітивною рекурсивною. З (1) тоді випливало б існування такого m , що $\psi(x) < \phi(m, x)$ для всіх x . При $m = x$ це приводить до суперечності $\phi(m, m) = \psi(m) < \phi(m, m)$. Тому ϕ не є примітивною рекурсивною. Можна показати, що функція Аккермана рекурсивна. Таким чином, *множина примітивних рекурсивних функцій є власною підмножиною множини рекурсивних функцій.*

Означимо число кроків (скорочено ns — number of steps), потрібних для обчислення основних примітивних рекурсивних функцій. Таким чином, якщо $f(\mathbf{x}) = g(h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))$, то

$$\text{ns}(f; \mathbf{x}) = \text{ns}(g; h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^n \text{ns}(h_i; \mathbf{x}).$$

Нарешті, якщо $f(\mathbf{x}, y)$ означена за індукцією за аргументом y як у (2b) з означення 5.2.1

$$\text{ns}(f; \mathbf{x}, y+1) = \text{ns}(f_0; \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^y \text{ns}(g; \mathbf{x}, t, f(\mathbf{x}, t)).$$

Якщо $f(\mathbf{x})$ примітивна рекурсивна функція, то такою є й функція $\text{ns}(f; \mathbf{x})$. Отже, якщо означення f явно задане, то можна так обчислити m , за попередніми правилами, так щоб $\text{ns}(f; \mathbf{x}) < \phi_m(x_0 + \dots + x_n)$, для всіх \mathbf{x} . Це дає шукану межу для числа кроків, потрібних для обчислення f в \mathbf{x} .

5.2.6. Рекурсивні і примітивні рекурсивні процедури.

Нам потрібен спосіб нумерації цілими числами елементів заданої мови для того, щоб застосувати концепції рекурсивних і примітивних рекурсивних функцій до алгоритмів. Гедельова нумерація (нижче) є такою нумерацією. Як ілюстрацію, ми побудуємо

явну Гедельову нумерацію для $\mathcal{L}(\text{ring})$. *Нумерація* — це ін'єктивне відображення ν з множина всіх термів і всіх формул мови $\mathcal{L}(\text{ring})$ у множину \mathbb{N} . Задамо ν за індукцією, спочатку на термах, а тоді на формулах: $\nu(0) = 2$; $\nu(l) = 2 \cdot 3$; $\nu(X_i) = 2^2 3^i$, $i = 1, 2, \dots$; $\nu(t + u) = 2^3 3^{\nu(t)} 5^{\nu(u)}$; $\nu(tu) = 2^4 3^{\nu(t)} 5^{\nu(u)}$; $\nu(t = u) = 2^5 3^{\nu(t)} 5^{\nu(u)}$ для термів t, u ; $\nu(\neg\phi) = 2^6 3^{\nu(\phi)}$; $\nu(\phi \vee \psi) = 2^7 3^{\nu(\phi)} 5^{\nu(\psi)}$; і $\nu((\exists X_i)\phi) = 2^8 3^i 5^{\nu(\phi)}$ для формул ϕ, ψ .

Назвемо $\nu(t)$ (відп., $\nu(\phi)$) числом Геделя терма t (відп., формули ϕ). Множина всіх чисел Геделя є примітивною рекурсивною функцією. Крім цього, за числом Геделя терму або формули можна ефективно відновити відповідний терм або формулу. Тому назовемо теорію T мови $\mathcal{L}(\text{ring})$ *рекурсивною* (відп., *примітивною рекурсивною*), якщо її образ при Гедельовій нумерації, $\nu(T)$, є рекурсивною (відп., примітивною рекурсивною) множиною. Якщо задано рекурсивне означення характеристичної функції $\chi_{\nu(T)}$, то можна переформулювати його у термінах мови $\mathcal{L}(\text{ring})$. Звідси отримуємо скінченну множину інструкцій, застосувавши які до речення ϑ , можна вияснити чи ϑ належить до T . Інакше кажучи, отримуємо *процедуру розв'язності*, яку називаємо рекурсивною або примітивною рекурсивною якщо теорія T рекурсивна або примітивна рекурсивна. Якщо існує процедура розв'язності, то теорію T називають *розв'язною теорією*.

На практиці звичайно починають з множини інструкцій для $\mathcal{L}(\text{ring})$, які застосовують до речення ϑ і які дають відповідь на питання чи ϑ належить до T .

Ці інструкції отримуються з основних операцій кільця за допомогою суперпозиції, індукції та мінімалізації. Гедельова нумерація ν переводить ці основні операції у рекурсивні операції над числами. В принципі доведення рекурсивності (або примітивної

рекурсивності) отримується з дослідження цих операцій на числах. На практиці мають справу з прямим аналізом початкової множини інструкцій для $\mathcal{L}(\text{ring})$. Відмінність між рекурсивними процедурами і примітивними рекурсивними процедурами полягає у використанні мінімум-оператора. Процедури, що не використовують мінімум-оператор називають примітивними рекурсивними.

Досвід показує, що технічна відмінність між примітивними рекурсивними і рекурсивними процедурами відповідає двом різним частинам математики. При доведенні того, що окрема процедура є рекурсивною, лема Іорна (зокрема, ультрадобутки) є звичайним інструментом. Сама процедура може використовувати перелік всіх доведень в $\mathcal{L}(\text{ring})$, і теорему Геделя про повноту. Таким процедурам найчастіше надають перевагу теоретико-моделісти. З іншого боку, примітивні рекурсивні процедури включають конструктивну теорію полів та алгебраїчну геометрію і рідко використовують теоретико-модельні інструменти. Алгебраїсти прагнуть підати окремі твердження інтенсивному аналізу, і це відображає їх бажання вияснити відношення цих тверджень до базової теорії.

В усіх випадках доводиться збагачувати мову $\mathcal{L}(\text{ring})$ до мови $\mathcal{L}(\text{ring}, K)$, де K “явно задане поле з теорією елімінації квантірів”. Оскільки, ми часто уникаємо детальних кроків, які показують, що наші процедури є рекурсивними (або примітивними рекурсивними), ми перевіряємо точні означення (замість використання найвінчих понять “ефективний”, “обчислювальний”, “розв’язний”, і т.д.) з двох причин. По перше, найвіні означення “розв’язності” не дозволяють довести, що окрема теорія нерозв’язна. По-друге, різні результати про розв’язність можна трактувати як

з'єднання невеликої кількості методів, які можна запрограмувати на комп'ютері. Наприклад, факторизація поліномів у $\mathbb{Z}[X]$ появляються у встановленні багатьох результатів про розв'язність. Оцінка часу факторизації полінома $f \in \mathbb{X}[X]$ адається явним поліномом від максимуму абсолютних значень коефіцієнтів полінома f . Слід зауважити, що число кроків у багатьох з наших процедур можна обмежити за допомогою специфічних функцій Аккермана ϕ_m .

5.2.7. Крок редукції в процедурах розв'язності. Припустимо, що Π — множина речень мови \mathcal{L} , наділена Гедельовою нумерацією ν . Тоді ν продовжується до Гедельової нумерації всіх доведень у Π . Наприклад, якщо $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ — формальне доведення в $\mathcal{L}(\text{ring})$, то

$$\nu(\vartheta(1), \dots, \vartheta(n)) = 2^9 3^{\nu(\vartheta_1)} 5^{\nu(\vartheta_2)} \dots p_{n+1}^{\nu(\vartheta(n))},$$

продовжує Гедельову нумерацію, означену у попередньому п. 5.2.6 і дає нумерацію всіх доведень з Π .

Можна показати, що множина логічних аксіом є примітивною рекурсивною, і якщо Π є рекурсивною множиною, то множина всіх доведень з Π є рекурсивною. Звідси випливає, що функція f , для якої $f(0) = 0$ і $f(n) = \nu(\vartheta)$, де ϑ — результат n -го доведення з Π , є рекурсивною функцією з \mathbb{N} на множину Гедельових номерів всіх логічних наслідків з Π . Це, все ж, не означає, що множина логічних наслідків з Π повинна бути рекурсивною, оскільки образ рекурсивної функції не зобов'язаний бути рекурсивною.

Введені поняття іноді дозволяють звести розв'язність теорії до розв'язності простішої теорії.

ЛЕМА 5.2.11. *Нехай T — дедуктивно замкнена теорія у заданій зліченній мові \mathcal{L} . Припустимо, що T містить рекурсивну*

послідовність $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots\}$ аксіом. Припустимо також, що Λ – розв’язна теорія в \mathcal{L} , і що для кожного речення ϑ в \mathcal{L} існує $\lambda \in \Lambda$, таке що $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T . Тоді існує рекурсивна процедура, застосування якої до даного речення ϑ знаходить речення $\lambda \in \Lambda$ з властивістю, що $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T . Якщо, крім цього, $\Lambda \cap T$ розв’язна, то T також розв’язна.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай ϑ – речення в \mathcal{L} . Існує речення $\lambda \in \Lambda$, для якого $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T . З теореми Геделя про повноту випливає, що формула $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ вивідна з Π .

Щоб знайти таке речення λ явно, зробимо список всіх формальних доведень з Π і проекзаменуємо їх один за одним (тобто, згідно їх Геделівських номерів). Після перевірки скінченної кількості доведень ми повинні прийти до доведення речення вигляду $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ з $\lambda \in \Lambda$. Оскільки теорія Λ розв’язна, можна розпізнати це доведення. З теореми Геделя про повноту випливає, що $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T .

Існування процедури для знаходження λ еквівалентна існуванню рекурсивної функції: $f: \text{Речення}(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda$, такої що $\chi_T(\vartheta) = \chi_{\Lambda \cap T}(f(\vartheta))$. Тому T рекурсивна. \square

Припущення леми 5.2.11 виконується у ситуації, описаній у § 4.7. Існує множина S , наділена родиною \mathcal{T} малих підмножин. Для кожного $s \in S$, \mathcal{A}_s є структурою для фіксованої зліченної мови \mathcal{L} . Позначимо теорію всіх речень ϑ мови \mathcal{L} , що є істинними у майже всіх \mathcal{A}_s через T . Припустимо, що Λ_0 – розв’язна теорія з мовою \mathcal{L} , що має таку властивість:

(1) Якщо \mathcal{A} і \mathcal{A}' є моделями теорії T , то $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$ тоді й лише тоді, коли \mathcal{A} і \mathcal{A}' задовольняють ті самі речення з Λ_0 .

Тоді бульова алгебра Λ , породжена Λ_0 також розв'язна. З Твердження 6.18 випливає, що для кожного речення ϑ мови \mathcal{L} існує речення λ з Λ , таке що $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T . Висновок:

ТВЕРДЖЕННЯ 5.2.12. *У попередній ситуації, якщо T має розв'язну множину аксіом π і $T \cap \Lambda$ розв'язна, то T розв'язна. Більше, для кожного речення ϑ мови \mathcal{L} можна знайти речення λ в Λ , таке що $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ належить до T .*

Зауважимо, що ця процедура розв'язності не дає межі для числа кроків, необхідних для вирішення чи задане речення ϑ належить до T . Наприклад, вона не дає границі на довжину доведення $\vartheta \leftrightarrow \lambda$ з T ; і також не дає границі для числа аксіом з Π , що використовуються у доведенні.

5.3. Обчислювані за Тюрінгом функції та рекурсивні функції

Спочатку доведемо, що кожна примітивна рекурсивна функція обчислюється за допомогою машини Тюрінга.

5.3.1. Обчислення за Тюрінгом примітивно рекурсивних функцій.

ТЕОРЕМА 5.3.1. *Функція h , що отримується з правильно обчисленних за Тюрінгом функцій f і g за допомогою рекурсії, сама є правильно обчисленною за Тюрінгом функцією.*

ДОВЕДЕННЯ. Для спрощення викладок вважатимемо, що функція h отримується з функцій f і g за допомогою співвідношень $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, y + 1) = g(x, h(x, y))$. Нехай M_1 і M_2 — машини Тюрінга, що обчислюють f і g відповідно. Побудуємо машину Тюрінга, яка обчислює функцію h .

Нашою метою є обчислення $h(x, y)$. Її можна досягти, обчисливши $y + 1$ значень $h(x, 0), h(x, 1), \dots, h(x, y)$.

Почнемо з розгляду такої конфігурації стрічки: $q_1 01^{x+1} 01^{y+1} 0$. Застосуємо до неї добуток $B^+ B K B^+ M_1$. Нагадаємо, що тут B^+ – зсув вправо, B – транспозиція, K – копіювання (всі ці машини описані у означенні 5.1.13). В результаті отримаємо

$$(5.3.1) \quad q_1 01^{x+1} 01^{y+1} 0 \xrightarrow{B^+} 01^{x+1} q_0 01^{y+1} 0 \xrightarrow{B} 01^{y+1} q_0 01^{x+1} 0 \xrightarrow{K} \\ \xrightarrow{K} 01^{y+1} q_0 01^{x+1} 01^{x+1} 0 \xrightarrow{B} 01^{x+1} 01^{y+1} 01^{x+1} 0 \xrightarrow{B^+} \\ \xrightarrow{B^+} 01^{x+1} 01^{y+1} q_0 01^{x+1} 0 \xrightarrow{M_1} 01^{x+1} 01^{y+1} q_\alpha 01^{h(x,0)+1} 0.$$

Це завершує обчислення $h(x, 0)$. Переходимо до обчислення $h(x, 1) = g(x, h(x, 0))$. Застосуємо до останньої конфігурації у 5.3.1 команди $q_\alpha 0 \rightarrow q_{\alpha+1} 0 L, q_{\alpha+1} 1 \rightarrow q_{\alpha+2} 0$. Отримаємо конфігурацію

$$(5.3.2) \quad 01^{x+1} 01^y q_{\alpha+2} 001^{h(x,0)+1} 0$$

Щоб підготувати цю конфігурацію до застосування машини M_2 , її потрібно звести до $q01^{x+1} 01^{h(x,0)+1}$. Застосувавши до конфігурації 5.3.2 добуток машин $A B^- B B^+ B K B^- B B^+ B^+ B B^-$, отримуємо

$$\begin{aligned}
(5.3.3) \quad & 01^{x+1}01^y q_{\alpha+2} 001^{h(x,0)+1} 0 \xrightarrow{\text{A}} 01^{x+1}01^y q 01^{h(x,0)+1} 00 \xrightarrow{\text{B}^-} \\
& \xrightarrow{\text{B}^-} 01^{x+1} q 01^y 01^{h(x,0)+1} 0 \xrightarrow{\text{B}} 01^y q 01^{x+1} 01^{h(x,0)+1} \xrightarrow{\text{B}^+} \\
& \xrightarrow{\text{B}^+} 01^y 01^{x+1} q 01^{h(x,0)+1} \xrightarrow{\text{B}} 01^y 01^{h(x,0)+1} q 01^x 0 \xrightarrow{\text{K}} \\
& \xrightarrow{\text{K}} 01^y 01^{h(x,0)+1} q 01^{x+1} 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}} 01^y 01^{x+1} q 01^{h(x,0)+1} 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}^-} \\
& \xrightarrow{\text{B}^-} 01^y q 01^{x+1} 01^{h(x,0)+1} 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}} 01^{x+1} q 01^y 01^{h(x,0)+1} 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}^+} \\
& \xrightarrow{\text{B}^+} 01^{x+1} 01^y q 01^{h(x,0)+1} 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}^+} 01^{x+1} 01^y 01^{h(x,0)+1} q 01^{x+1} \xrightarrow{\text{B}} \\
& \xrightarrow{\text{B}} 01^{x+1} 01^y 01^{x+1} q 01^{h(x,0)+1} \xrightarrow{\text{B}^-} 01^{x+1} 01^y q 01^{x+1} 01^{h(x,0)+1}.
\end{aligned}$$

Тепер за допомогою машини M_2 обчислимо $h(x, 1) = g(x, h(x, 0))$. Отримаємо конфігурацію $01^{x+1}01^y q_\beta 01^{h(x,1)+1}$. Застосуємо до цієї конфігурації команду $q_\beta 0 \rightarrow q_\alpha 0$. Це приводить до конфігурації $01^{x+1}01^y q_\alpha 01^{h(x,1)+1}$ і породжує цикл, що виконується командами після першої появи q_α , і перетворює конфігурацію $01^{x+1}01^{y+1-i} q_\alpha 01^{h(x,i)+1}$ у конфігурацію $01^{x+1}01^{y+2-i} q_\alpha 01^{h(x,i+1)+1}$ за умови, що $y + 1 > i$. Команда $q_\beta 0 \rightarrow q_\alpha 0$ зациклює програму, і в процесі роботи машини величина $y + 1 - i$ зменшується доки не одержиться конфігурація $01^{x+1}0q_\alpha 01^{h(x,y)+1}$, яку команда $q_\alpha 0 \rightarrow q_{\alpha+1}0L$ переводить у конфігурацію $01^{x+1}q_{\alpha+1}001^{h(x,y)+1}$.

Додаткові команди $q_{\alpha+1}0 \rightarrow q_{\beta+1}0$, та машини А, В, О, В, B^- , А створюють на стрічці шукану конфігурацію $q 01^{h(x,y)+1}$. Це є означає, що функція $h(x, y)$ правильно обчислюється деякою машинною Тюрінга. \square

НАСЛІДОК 5.3.2. *Кожна примітивна рекурсивна функція обчисленна за Тюрінгом.*

ДОВЕДЕННЯ. Це випливає з обчисленності за Тюрінгом основних функцій O, S та π_m^n (див. приклади 5.1.10 та 5.1.15). Оскільки кожна примітивна рекурсивна функція є суперпозицією основних функцій та рекурсії, і суперпозиція примітивних рекурсивних функцій є примітивною рекурсивною за теоремою 5.2.4, то наслідок безпосередньо випливає з попередньої теореми 5.3.1. \square

5.3.2. Обчислення за Тюрінгом частково рекурсивних функцій. Нагадаємо, що функцію f називають *частково рекурсивною*, якщо вона отримується з найпростіших функцій O, S та π_m^n за допомогою скінченного числа застосувань суперпозиції, примітивної рекурсії та μ -оператора. Всюди означена частково рекурсивна функція називається *загально рекурсивною*.

Доведемо, що кожна частково рекурсивна функція обчислюється за допомогою деякої машини Тюрінга.

ТЕОРЕМА 5.3.3. Якщо функція $f(x_1, \dots, x_n, y)$ правильно обчислюється машиною Тюрінга F , то функція

$$g(x_1, \dots, x_n) = \mu y [f(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$$

теж правильно обчислюється деякою машинною Тюрінга G .

ДОВЕДЕННЯ. Введемо спочатку скорочені позначення $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Запис $01^{x_1+1} \dots 01^{x_n+1}$ на стрічці машини Тюрінга позначаємо $\mathbf{01}^{\mathbf{x}}$.

Використовуючи машину F , побудуємо машину G , яка для даного значення \mathbf{x} послідовно обчислює значення $f(\mathbf{x}, 0), f(\mathbf{x}, 1), \dots$, доки вперше отримає $f(\mathbf{x}, i) = 0$. Тоді G видає на стрічці число $i = g(\mathbf{x})$. Якщо $f(\mathbf{x}, i) \neq 0$ для всіх i , то машина G ніколи не зупиниться, і це означає, що функція g не визначена для $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$.

Розглянемо таку початкову конфігурацію стрічки $q_1 \mathbf{01}^x 010$, яку розглядаємо як $q_1 \mathbf{01}^x 01^{0+1}$. Застосувавши до такої конфігурації машину копіювання K та зсув вправо, отримаємо конфігурацію

$\mathbf{01}^x q \mathbf{01}^x 01^0$. Тепер за допомогою машини F обчислюємо значення $f(\mathbf{x}, 0)$ з відповідним записом $\mathbf{01}^x 01 q_\alpha \mathbf{01}^x 01^{f(\mathbf{x}, 0)}$.

Після цього шукаємо команди, які за умови $f(\mathbf{x}, i) \neq 0$ перетворюють конфігурацію $\mathbf{01}^x 01^{i+1} q 01^{f(\mathbf{x}, i+1)}$ у конфігурацію $\mathbf{01}^x 01^{i+2} q 01^{f(\mathbf{x}, i+2)}$:

$$\begin{aligned}
q_\alpha 0 &\rightarrow q_{\alpha+1} R : \quad \mathbf{01}^x 01 q_{\alpha+1} 1^{f(\mathbf{x}, 0)+1}; \\
q_{\alpha+1} 1 &\rightarrow q_{\alpha+2} 0 : \quad \mathbf{01}^x 01 q_{\alpha+2} 1^{f(\mathbf{x}, 0)}; \\
q_{\alpha+2} &\rightarrow q_{\alpha+3} 0 L : \quad \mathbf{01}^x 01 q_{\alpha+3} 0 0 1^{f(\mathbf{x}, 0)}; \\
q_{\alpha+3} 0 &\rightarrow q_{\alpha+4} 1 : \quad \mathbf{01}^x 01 q_{\alpha+4} 1 0 1^{f(\mathbf{x}, 0)}; \\
q_{\alpha+4} 1 &\rightarrow q_{\alpha+5} 1 R : \quad \mathbf{01}^x 01 q_{\alpha+5} 0 1^{f(\mathbf{x}, 0)}; \\
O &: \quad \mathbf{01}^x 01^2 q 0; \\
B^- B^- &: \quad \mathbf{01}^x 01^2; \\
K &: \quad \mathbf{01}^x 01^2 q \mathbf{01}^x 01^2; \\
F &: \quad \mathbf{01}^x 01^2 q_\beta 01^{f(\mathbf{x}, 0)+2}; \\
q_\beta 0 &\rightarrow q_\alpha 0 : \quad \mathbf{01}^x 01^2 q_\alpha 01^{f(\mathbf{x}, 1)+1}.
\end{aligned}$$

Остання команда починає цикл: машина переходить від конфігурації $\mathbf{01}^x 01^2 q_\alpha 01^{f(\mathbf{x}, 1)+1}$ до конфігурації $\mathbf{01}^x 01^3 q_\alpha 01^{f(\mathbf{x}, 2)+1}$, тоді конфігурації $\mathbf{01}^x 01^4 q_\alpha 01^{f(\mathbf{x}, 3)+1}$ і так далі. Якщо, зробивши скінченну кількість кроків, машина досягне конфігурації $\mathbf{01}^x 01^{i+1} q_\alpha 01^{f(\mathbf{x}, i)+1}$ для якої $f(\mathbf{x}, i) = 0$, то команда $q_\alpha 0 \rightarrow q_{\alpha+1} 0 R$ приводить до конфігурації $\mathbf{01}^x 01^{i+1} 0 q_{\alpha+1} 0$. Тоді застосуємо команди:

$$\begin{aligned}
q_{\alpha+1} 0 &\rightarrow q_\gamma 0 : \quad \mathbf{01}^x 01^{i+1} 0 q_\gamma 0; \\
B^- B^- &: \quad \mathbf{01}^x q 01^{i+1}; \\
BOB^- &: \quad q_\delta 01^{i+1} \\
q_\delta &\rightarrow q_0 0 : \quad q_0 01 g(\mathbf{x})+1.
\end{aligned}$$

Це обчислює функцію $g(\mathbf{x})$.

В іншому випадку функція g не визначена в \mathbf{x} , і тому машина ніколи не зупиниться. \square

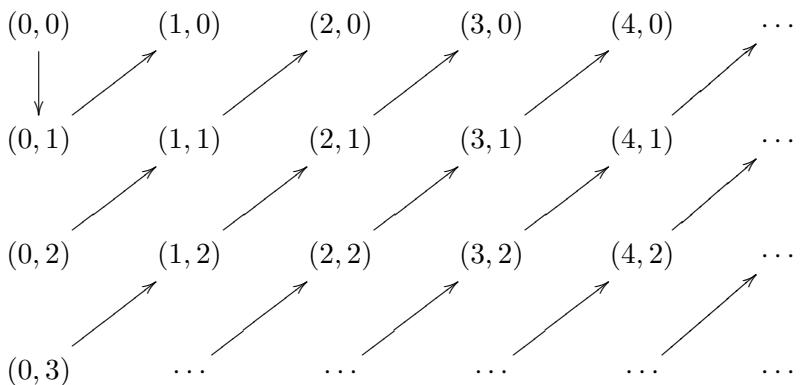
Тепер з означення рекурсивних функцій, наслідку 5.3.2 та теореми 5.3.3 отримуємо, що кожна рекурсивна функція обчислювана за Тюрінгом.

ТЕОРЕМА 5.3.4. *Кожна частково рекурсивна функція обчислюється за Тюрінгом.*

5.3.3. Нумерації послідовностей натуральних чисел.

ОЗНАЧЕННЯ 5.3.5. *Нумерацією множини X називають довільне сюр'ективне відображення $v: \mathbb{N} \rightarrow X$.*

ОЗНАЧЕННЯ 5.3.6. *Діагональна (канторівська) нумерація — це нумерація пар натуральних чисел, отримана за допомогою наступного їх переліку, рухаючись по послідовних діагоналях:*



ТВЕРДЖЕННЯ 5.3.7. *У діагональній нумерації пара (m, n) отримує номер*

$$c(m, n) = \frac{(m + n)^2 + 3m + n + 2}{2} \quad (*)$$

ДОВЕДЕННЯ. Справді, ця пара (m, n) займає m -у позицію на $m + n$ -ої діагоналі. Тому додавши m до сумарної кількості всіх пар на попередніх діагоналях, матимемо $1 + 2 + 3 + \dots + (m+n) + m = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m = \frac{(m+n)^2 + 3m + n + 2}{2}$. Отриманий для $c(m, n)$ вираз показує, що $c(m, n)$ є примітивною рекурсивною функцією від аргументів $m, n \in \mathbb{N}$. \square

ТВЕРДЖЕННЯ 5.3.8. У діагональній нумерації номером $z = c(x, y)$ однозначно визначається ліва $l(z) = x$ та права $r(z) = y$ координати пари (x, y) :

$$x = z - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{8z+1} + 1}{2} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{8z+1} - 1}{2} \right], \quad y = \left[\frac{\sqrt{8z+1} - 1}{2} \right] - z, \quad (**)$$

де $[u]$ означає цілу частину числа u і $a - b = \begin{cases} a - b, & a \geq b, \\ 0, & a < b. \end{cases}$

ДОВЕДЕННЯ. Справді, з $(*)$ випливає, що

$$8z = 4(x+y)^2 + 12x + 4y = (2x+2y+1)^2 + 8x - 1 = (2x+2y+3)^2 - 8y - 9.$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} (2x+2y+1)^2 &\leq 8z+1 &< (2x+2y+3)^2, \\ 2x+2y+1 &\leq \sqrt{8z+1} &< 2x+2y+3, \\ 2x+2y+2 &\leq \sqrt{8z+1} + 1 &< 2x+2y+4, \\ x+y+1 &\leq \left[\frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right] &< x+y+2. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} x+y+1 &= \left[\frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right], \\ x+y &= \left[\frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right] - 1 = \left[\frac{\sqrt{8z+1}-1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки $z = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$, то підставивши тут щойно знайдені вирази для $x+y$ та $x+y+1$, отримуємо шукані рівності $(**)$. \square

Зауважимо, що функції c, l і r задовольняють такі рівності:

$$c(l(z), r(z)) = z, \quad l(c(x, y)) = x, \quad r(c(x, y)) = y.$$

Використовуючи діагональну нумерацію c , можна задати послідовність примітивно рекурсивних функцій $c^1, c^2, \dots, c^k, \dots$, де c^k здійснює біективне відображення $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, визначене за правилами

$$\begin{aligned} c^1(x_1) &:= x_1, \\ c^2(x_1, x_2) &:= c(x_1, x_2), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ c^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &:= c(c^k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Координати x_1, x_2, \dots, x_n , для яких $c^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = n$ обчислюються примітивними рекурсивними функціями $c_1^k, c_2^k, \dots, c_k^k$, для яких

$$\begin{aligned} c_1^1(n) &= n, \\ c_1^2(n) &= l(n), \quad c_2^2(n) = r(n), \\ &\dots \dots \dots \\ c_1^k(n) &= c_1^{k-1}(l(n)), \dots, c_{k-1}^k(n) = c_{k-1}^{k-1}(l(n)), \quad c_k^k(n) = r(n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Функцію c^k називають *k-згорткою*, а набір c_1^k, \dots, c_k^k — *k-розгорткою*.

Згортки та розгортки задовольняють такі рівності:

$$c^k(c_1^k(n), \dots, c_k^k(n)) = n, \quad c_i^k(c^k(x_1, \dots, x_k)) = x_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

5.4. Задачі і вправи до розділу 5

- (1) Описати машину Тюрінга, яка додає три натуральні числа.
- (2) Побудувати машини Тюрінга для правильного обчислення таких функцій:

- 1) $x + y;$
- 2) $x - 1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases};$
- 3) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases};$
- 4) $\overline{\operatorname{sgn}} x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x > 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases};$
- 5) $x - y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq y, \\ x - y, & \text{якщо } x > y. \end{cases}$
- 6) $x - y;$
- 7) $\frac{x}{2};$
- 8) $[\frac{x}{2}].$

(3) Довести, що наступні функції є примітивними рекурсивними:

- 1) сталі функції: $f(x) = k;$
- 2) тотожна функція: $f(x) = x;$
- 3) функція додавання: $f(x, y) = x + y;$
- 4) функція множення: $f(x, y) = xy;$
- 5) експоненційна функція: $f(x, y) = x^y$, де $f(x, 0) = 1$;
- 6) функція факторіал: $f(x) = x!$, де $f(0) = l$;
- 7) функція попередника: $\operatorname{pd}(0) = 0$ і $\operatorname{pd}(x + 1) = x$;
- 8) функція знаку: $\operatorname{sgn}(0) = 0$ і $\operatorname{sgn}(x + 1) = 1$;
- 9) функція віднімання з точністю до 0: $f(x, y) = x - y$ ($x - (y + 1) = \operatorname{pd}(x - y)$), тобто $f(x, y) = x - y$, якщо $x > y$ і 0 — в іншому випадку;
- 10) $\overline{\operatorname{sgn}}$ -функція: $\overline{\operatorname{sgn}}(x) = 1 - x$, тобто $\overline{\operatorname{sgn}}(0) = l$ і $\overline{\operatorname{sgn}}(x) = 0$, якщо $x > l$);
- 11) мінімум-функція: $\min(x, y) = y - (y - x)$;

- 12) максимум-функція: $\max(x, y) = x + y - \min(x, y)$;
- 13) абсолютна величина: $|x - y| = (x - y) + (y - x)$;
- 14) функція ділення x на y з остачею: $\text{rm}(0, y) = 0$
 і $\text{rm}(x + 1, y) = (\text{rm}(x, y) + 1)\text{sgn}(y - (\text{rm}(x, y) + 1))$;
- 15) функція цілої частини: $[x/y]$, визначена як $[0/y] = 0$, $[(x + 1)/y] = [x/y] + \overline{\text{sgn}}(y - (\text{rm}(x, y) + 1))$.

(4) Довести наступні рівності:

- 1) $(x - y) - z = (x - z) - y$;
- 2) $x - (y + z) = (x - y) - z$;
- 3) $x + (y - x) = y + (x - y)$.

(5) Довести, що наступні відношення є примітивними ре-
 курсивними:

- 1) $x = y$;
- 2) $x + y = z$;
- 3) $x \cdot y = z$;
- 4) x ділить y ;
- 5) x і y взаємно прості;
- 6) x парне число.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Мова Шмульяна для самоописання

Поставимо таке питання: чи існує така формальна мова (наприклад для вивчення арифметики), у якій можна виразити властивість істинності? Інакше кажучи, хотілося б визначити істинність або хибність даної формули φ за її виглядом, тобто хотілося б, щоб вигляд формули φ давав про неї інформацію: “ φ істинна” або “ φ хибна”. У такому випадку формула φ каже про себе “я істинна” або “я хибна”. Для цієї мети потрібно мати мову, яка дозволяла б виражати такі властивості властивості як істинність чи хибність засобами цієї мови. Однією з найпростіших таких мов є мова, запропонована Шмульяном. Цю мову позначають SELF (Smullyan's Easy Language For selfreference).

- *Алфавіт* SELF складається лише з чотирьох букв e , $*$, r (символ унарного відношення), i \neg (символ заперечення).
- *Синтаксис*: виокремленими текстами мови SELF є ярлики, експонати та формули.
- *Ярлик* слова w — це слово вигляду $*w*$.
- *Експонат* слова w — це слово вигляду $w*w*$, тобто слово з ярликом.
- *Формули* мови SELF — це слова вигляду $re\dots e * w* i \neg r e \dots e * w*$.

У формулах $re \dots e * w*$ і $\neg re \dots e * w*$ буква e написана на $k \geq 0$ місцях після букви r . Введемо скорочені позначення $re^k * w*$ і $\neg re^k * w*$ для формул $re \dots e * w*$ і $\neg re \dots e * w*$. Тут $r \geq 0$ і e^k означає, що буква e написана k разів.

Означимо бінарне відношення “бути іменем” на множині всіх слів мови SELF.

- а) ярлик слова w є іменем слова w .
- б) якщо n — ім’я слова w , то en — ім’я експоната цього слова, тобто ім’я слова $w * w*$.

Нехай n — ім’я слова w . Експонат слова w має не менше двох імен: en і $*w * w *$. Зауважимо, що ім’я слова w однозначно визначає це слово. Це випливає з того факту, що імена мають вигляд $e^k * w*$, $k \geq 0$.

Приклад. Розглянемо слово $e * e*$. Це слово задовольняє означення формули. Крім цього, це експонат слова e , і з пункту б) означення імені бачимо, що ця формула є іменем експоната слова e . Тому формула $e * e*$ є виразом, який “називає себе по імені”.

Оскільки слово у мові SELF може мати декілька імен, то позначимо через $N(w)$ одне з імен слова w . Це обов’язково формула мови SELF. Справді, кожне ім’я має вигляд $*w*$ або $e^r * w*$. Але слова вигляду $*w*$ або $e^r * w*$ не вичерпують множини всіх формул мови SELF. З означення формул отримуємо, що кожна формула мови SELF має вигляд

$$rN(w) \text{ або } \neg rN(w)$$

Виберемо деяку підмножину R множини всіх слів мови SELF, інакше кажучи унарне відношення R на множині всіх слів мови SELF.

ОЗНАЧЕННЯ 5.4.1. Називемо формулу $rN(w)$ *R*-істинною, якщо $w \in R$ і *R*-хибною, якщо $w \notin R$. Формула $\neg rN(w)$ істинна тоді й лише тоді коли $rN(w)$ хибна, і формула $\neg rN(w)$ хибна тоді й лише тоді коли $rN(w)$ істинна.

ТЕОРЕМА 28. *Для кожної властивості R*

$$R \bigcap \text{формули} \neq \begin{cases} R - \text{істинні формули}, \\ R - \text{хібні формули} \end{cases}$$

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо формулу $re * re*$. Якщо ця формула лежить в *R*, то за означенням *R*-істинності $re \in R$, тому $re * re*$ не є *R*-хибною. Тому $R \bigcap \text{формули} \neq R - \text{хібні формули}$.

Аналогічно, розглянемо формулу $\neg re * \neg re*$. Ця формула *R*-істинна тоді й лише тоді коли формула $re * \neg re*$ *R*-хибна, тобто тоді й лише тоді, коли $\neg re * \neg re* \notin R$, оскільки $re * \neg re*$ є іменем експонату $\neg re$, тобто іменем формули $\neg re * \neg re*$. \square

Додаток 2. Десята проблема Гільберта

Оригінальна десята проблема Гільберта сформульована на II Міжнародному конгресі математиків в Парижі (в списку з 23 проблем, опублікованого у 1900 році). Формулювання Гільберта (1990) таке:

“Нехай задано діофантове рівняння з довільними невідомими і цілими раціональними числовими коефіцієнтами. Вказати спосіб за допомогою якого можливо після скінченного числа операцій встановити, чи розв’язне це рівняння в цілих раціональних числах”.

По-суті, вона полягає в пошуку алгоритму, який дозволяє встановити, коли діофантове рівняння має розв’язок. Точніше, вхід і вихід такого алгоритму є:

вхід: поліном $f(x_1, \dots, x_n)$ з коефіцієнтами в \mathbb{Z}
вихід: YES або NO, в залежності чи $\exists \bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ з
 $f(\bar{a}) = 0$.

ОЗНАЧЕННЯ 5.4.2. Множину $E \subset (\mathbb{Z}^+)^n$ називають *переліченою*, якщо існує частково рекурсивна функція f з областю визначення E .

Множину D називають *діофантовою*, якщо вона є проекцією рівняння полінома з цілими додатними коефіцієнтами.

Ю. В. Матіясевич, ґрунтуючись на роботі Девіса, Путнама і Робінсона, 1970 р. дав негативний розв'язок десятої проблеми Гільберта, показавши, що такого алгоритму не існує [42].

Предметний показчик

- Аксіома 10
— теорії множин 198
— формальної арифметики 197
— числення висловлень 53, 58
— числення предикатів 140
- Аксіоматизований клас структур 222
- Аксіоматична теорія 100
- Алгебра булева 24
- Алгебра Лінденбаума-Тарського 27
- Алгебра універсальна 124
- Алфавіт 7, 8
— алгебри висловлень 15
— числення висловлень 53
— числення предикатів 127
- Алгебраїчна операція 117
- Алгебраїчна система 122, 123
- Арифметика натуральних чисел 125
- Арифметика Пеано 194
- Буква 8
— алфавіту числення висловлень 53
— алфавіту числення предикатів 140
- Булева алгебра 24
- Булева алгебра множин 211
- Булевий поліном 210
- Булева функція
- Висловлення 11
— просте 14
- атомарне 14
— складне 14
- Відношення n -місне 119
- Вільна змінна формули 134
- Вільне входження змінної 134
- Входження формули 134
- Головна інтерпретація 91
- Головний ультрафільтр 209
- Гомоморфізм структур 125
- Граф 63
- Дедуктивно замкнена множина 193
- Дерево 63
— доведення 63
— — числення висловлень 63
— — числення предикатів 144
- Диз'юнктивна нормальна форма 33, 83, 156
- Диз'юнктивний член формули 83
- Диз'юнкція висловлень 12
- Діагональна нумерація 264
- Добуток машин Тюрінга 244
- Доведення секвенції 62, 143
— — лінійне 62, 143
— — у вигляді дерева 63, 144
- Довжина
— доведення 62
- формули 131

- речення 9
- слова 9
- терма 129
- Допоміжні символи 54
- Допустиме правило виведення 142
- Досконала кон'юнктивна нормальна форма 36, 87
- Досконала диз'юнктивна нормальна форма 36
- Еквівалентність
 - формул алгебри висловлень 20
 - синтаксична 72, 150
 - семантична
- Еквіваленція висловлень 13
- Екзистенціональна формула 157
- Елементарна диз'юнкція 82
 - кон'юнкція 83
 - теорія 223
 - підструктура 205
- Елементарне розширення
 - структури (системи) 205
 - твердження 196
- Елементарно еквівалентні (алгебрачні системи) структури 194, 205
- Елементарна підструктура, 103
- Загальна рекурсивна функція 261
- Закон
 - ідемпотентності 21
 - де Моргана 21, 32
 - подвійного заперечення 21
 - контрапозиції 21
 - суперечності 21
 - виключення третього 21
- Замкнена формула 135
- Замкнена система функцій 40
- Заперечення висловлення 12
- Зв'язане входження змінної 134
- Змінна 15
 - пропозиційна 15, 53
 - предметна 60
- Ізоморфні структури 126, 205
- Імплікація висловлень 13
- Інтерпретація 90
 - атомарних формул 163
 - змінних 90, 162
 - констант 162
 - секвенцій 91, 165
 - теорії 101
 - термів 162
 - формул 90
- Канторівська нумерація 264
- Категорична теорія, 53
- Квазідоведення 68
- Кванторна приставка 157
- Клас
 - аксіоматизований 222
 - скінченно аксіоматизований 225
- Конкатенація слів 8
- Кон'юнкція висловлень 12
- Кон'юнктивна нормальна форма 33, 83, 157
- Лінійне доведення 62
- Логічний гомоморфізм 70
- Логічні зв'язки 54, 127
- Логіка першого порядку 116
- Малі множини 120
- Машина Тюрінга 236
- Машина Тюрінга, яка правильно обчислює функцію 243
- Метамова 8, 10

- Мова 7
- в алфавіті 9
- теорії множин
- природна 7
- штучна 8
- Модель 124, 193
- Модель теорії 101, 170
- Неголовний ультрафільтр 209
- Несуперечлива теорія 101
- Носій алгебраїчної системи 123
- Нумерація 254
- Нумерація множини 263
- Область дій квантора 135
- Операція алгебраїчна 117
- Підсистема алгебраїчної системи 125
- Підслово 8, 54, 128
- Підстановка 70
- Підструктура 125
- Підформула 133
- Повна система функцій 38
- Повна теорія 102
- Повна за Постом теорія 102
- Початок формули 76
- Правило виведення 59, 141
 - дедукції Ербрана 60
 - *Modus ponens* 60
- Предикат n -місний 119
- Предметна змінна 61
- Пренексна нормальна форма 157
- Примітивна рекурсивна теорія 254
- Примітивна рекурсивна функція 246
- Примітивне рекурсивне відношення 249
- Проблема розв'язності 254
- Пропозиційна змінна 15, 53
- Прості машини Тюрінга, 124
- Процедура розв'язності 254
- Регулярний ультрадобуток
- ультрафільтр
- Рекурсивна теорія 254
- Рекурсивна функція 251
- Речення 135, 164
 - у алфавіті 9, 54
- Розв'язна теорія 104
- Розширення структур 205
- Розширення теорії 171
- Секвенція 56, 140
 - вивідна 65, 144
 - виконувана 166
 - тотожно істинна 93, 166
 - тотожно хибна 93
- Семантика 10, 90
- Сигнатура 122
- Сигнатурний символ 127
- Символ 127
 - алгебраїчної операції 127
 - відношення 122
 - допоміжний 54, 127
 - константи 123
 - логічний 127
 - предикатний 127
 - предметної змінної 127
 - функціональний 122, 127
- Синтаксично еквівалентні формулі 34
- Синтаксис 10
- Слово 8, 128
 - в алфавіті 54
- Стан машини Тюрінга, 119
- Стрілка Пірса 39

- Сумісна множина формул 193
 Суперечність 19
 Схема
 — аксіом 58, 140
 — секвенцій 57
 — формул 57
 Тавтологія 19, 145
 Теза Черча 235
 Теорема 10, 65, 144
 — Геделя про повноту 175
 — компактності 218
 — про існування моделі 174
 — про ДНФ 84
 — про заміну 80, 151
 — про КНФ 85
 — про підстановку 71
 Теорія 100, 169, 193
 абсолютно повна 102, 170
 — категорична 102
 — моделей 192
 — несуперечлива 101, 169, 193
 — розв'язна 104
 — суперечлива 101
 Терм 128
 — допустимий для підстановки 137
 — вільний для змінної 136
 Тестові речення 220
 Тотожно істинна секвенція 84
 Тотожно хибна секвенція 47
 Ультрадобуток 214
 — регулярний 219
 Ультрастепінь 218
 Ультрафільтр 208
 — головний 209
 — неголовний 209
 — регулярний 210, 212
- Універсальна формула 157
 Фільтр 208
 — на множині 208
 — зліченно повний 209
 Формальна арифметика Пеано 194
 Формула
 — атомарна 55, 130
 — атомна 130
 — алгебри висловлень 15
 — безквантторна 132
 — в ДНФ 33, 86, 156
 — вивідна 145
 — виконувана 19, 166
 — в КНФ 33, 83, 157
 — в пренексній нормальній формі 157
 — екзистенціальна 157
 — замкнена 135
 — тотожно істинна 92, 164
 — тотожно хибна 92
 — універсальна 157
 — числення висловлень 55
 — числення предикатів 130
 Функціональна повнота 95
 Функціональний символ 122
 Функція
 — Аккермана 252
 — булева 26, 33
 — істинності 22
 — примітивна рекурсивна 246
 — рекурсивна 251
 Числення 8
 — висловлень 52
 — предикатів 116
 Число Геделя 254
 Штрих Шефера 39

Бібліографія

- [1] Андрійчук В. І. Вступ до дискретної математики: навч. посібник / В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. — 254 с.
- [2] Дрозд Ю. А. Основи математичної логіки: навч. посібник / Ю. А. Дрозд. — К.: Київський університет, 2003. — 96 с.
- [3] Хромой Я. В. Збірник задач і вправ з математичної логіки / Я. В. Хромой. — К.: Вища шк., 1978. — 160 с.
- [4] Хромой Я. В. Математична логіка: навч. посібник / Я. В. Хромой. — К.: Вища шк., 1983. — 208 с.
- [5] Аляев Ю. А. Дискретная математика и математическая логика: учебник / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 368 с.
- [6] Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. А. Андерсон; пер. с англ. — М.: Вильямс, 2004. — 960 с.
- [7] Белоусов А.И. Дискретная математика: учеб. / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; ред. В.С. Зарубин, А.П. Крищенко. — 3-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 744 с.
- [8] Беркли Э. Символическая логика и разумные машины / Э. Беркли; пер. с англ. — М.: Иностр. лит., 1961. — 260 с.
- [9] Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти; пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 400 с.
- [10] Булос Дж. Вчислимость и логика / Дж. Булос, Р. Джейффри; пер. с англ. — М.: Мир, 1994. — 396 с.
- [11] Верещагин И. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Вычислимые функции / И. К. Верещагин, А. Шень. — 2-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2002. — 192 с.

- [12] Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
- [13] Гильберт Д. Основы теоретической логики / Д. Гильберт, В. Аккерман; пер. с нем. — М.: Иностр. лит., 1947. — 306 с.
- [14] Гильберт Д. Основания математики. Теория доказательств / Д. Гильберт, П. Бернайс; пер. с нем. — М.: Наука, 1982. — 656 с.
- [15] Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
- [16] Гладкий А. В. Математическая логика / А. В. Гладкий. — М.: Госсийск. гос. гуманит. ун-т., 1998. — 479 с.
- [17] Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки / А. В. Гладкий. — М.: Наука, 1973. — 368 с.
- [18] Гладкий А. В. Элементы математической лингвистики / А. В. Гладкий, И. А. Мельчук. — М.: Наука, 1969. — 192 с.
- [19] Гросс М. Теория формальных грамматик / М. Гросс, А. Лантен; пер. с фр. — М.: Мир, 1971. — 294 с.
- [20] Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон; пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 440 с.
- [21] Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / В. И. Игошин. — 2-е изд., стер. — М.: Академия, 2008. — 448 с.
- [22] Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие / В. И. Игошин. — 3-е изд., стер. — М.: Академия, 2007. — 304 с.
- [23] Избранные вопросы теории булевых функций / А. С. Балюк, С. Ф. Винокуров, А. И. Гайдуков, О. В. Зубков, К. Д. Кириченко, В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев, Ю. В. Перязева; Ред. С. Ф. Винокуров, Н. А. Перязев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 192 с.
- [24] Ершов Ю. Л. Математическая логика: учеб. пособие / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
- [25] Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
- [26] Калужнин Л. А. Что такое математическая логика? / Л. А. Калужнин. — М.: Наука, 1964. — 152 с.

- [27] Карри Х. Б. Основания математической логики / Х. Б. Карри; пер. с англ.— М.: Мир, 1969.— 568 с.
- [28] Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Н. Катленд; пер. с англ.— М.: Мир, 1983.— 256 с.
- [29] Кейслер Г. Теория моделей / Г. Кейслер, Ч. Ч. Чен; пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 614 с.
- [30] Клини С. Введение в метаматематику / С. Клини; пер. с англ.— М.: Иностр. лит., 1957.— 526 с.
- [31] Клини С. Математическая логика / С. Клини; пер. с англ.— М.: Мир, 1973.— 480 с.
- [32] Колмогоров А. Н. Введение в математическую логику: учеб. пособие / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин.— М.: МГУ, 1982.— 120 с.
- [33] Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы: учеб. пособие / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин.— М.: МГУ, 1984.— 120 с.
- [34] Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова.— М.: Наука, 1976.— 240 с.
- [35] Лукасевич Я. Аристотелевская логика с точки зрения современной формальной логики / Я. Лукасевич; пер. с англ.— М.: Иностр. лит., 1959.— 314 с.
- [36] Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев.— М.: Наука, 1970.— 392 с.
- [37] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев.— М.: Наука, 1986.— 368 с.
- [38] Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое / Ю. И. Манин.— М.: Советское радио, 1979.— 168 с.
- [39] Манин Ю. И. Вычислимое и невычислимое / Ю. И. Манин.— М.: Советское радио, 1980.— 128 с.
- [40] Марков А. А. Элементы математической логики / А. А. Марков.— М.: МГУ, 1984.— 80 с.
- [41] Марков А. А. Теория алгоритмов / А. А. Марков, Н. М. Нагорный.— М.: Наука, 1984.— 432 с.
- [42] Матиясевич Ю. В. Десятая проблема Гильберта / Ю. В. Матиясевич.— М.: Наука, 1993.— 224 с.

- [43] Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон; пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [44] Минский М. Вычисления и автоматы / М. Минский. — М.: Мир, 1971. — 366 с.
- [45] Новиков П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
- [46] Проблемы Гильберта: сборник / Ред. П. С. Александров. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
- [47] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Х. Роджерс; пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 624 с.
- [48] Справочная книга по математической логике: в 4-х частях. Ч. 1. Теория моделей / Ред. Дж. Барвайс; пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
- [49] Справочная книга по математической логике: в 4-х частях. Ч. 3. Теория рекурсии / Ред. Дж. Барвайс; пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 360 с.
- [50] Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Столл; пер. с англ. — М.: Просвещение, 1968. — 232 с.
- [51] Судоплатов С. В. Математическая логика и теория алгоритмов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — М.: ИНФРА-М, 2004. — 224 с.
- [52] Такеути Г. Теория доказательств / Г. Такеути; пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 412 с.
- [53] Тьюринг А. Может ли машина мыслить? / А. Тьюринг; пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1960. — 113 с.
- [54] Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и вычислительные автоматы / Б. А. Трахтенброт. — М.: Сов. радио, 1974. — 200 с.
- [55] Успенский В. А. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения / В. А. Успенский, А. Л. Семенов. — М.: Наука, 1987. — 288 с.
- [56] Успенский В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 128 с.
- [57] Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте / В. А. Успенский. — М.: Наука, 1982. — 112 с.
- [58] Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли; пер. с англ. — М.: Наука, 1983. — 360 с.

- [59] Черч А. Введение в математическую логику / А. Черч; пер. с англ. — М.: Иностр. лит., 1960. — 486 с.
- [60] Шенфилд Дж. Математическая логика / Дж. Шенфилд; пер. с англ. — М.: Наука, 1975. — 528 с.
- [61] Эдельман С. Л. Математическая логика / С. Л. Эдельман. — М.: Высшая школа, 1975. — 176 с.
- [62] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. — М.: Высш. шк., 2003. — 384 с.
- [63] Chiswell I. Mathematical logic / Ian Chiswell, Wilfrid Hodges. — New York: Oxford University Press, 2007. — 250 p.
- [64] Hedman S. First course in logic: an introduction to model theory, proof theory, computability, and complexity / Shawn Hedman. — New York: Oxford University Press, 2006. — 431 p.
- [65] Srivastava S. A Course on Mathematical Logic / S. M. Srivastava. — New York: Springer, 2008. — 140 p.

Зміст

| | |
|--|-----|
| ВСТУП | 3 |
| Розділ 1. СЕМІОТИКА, ЛОГІЧНІ МОВИ, БУЛЕВІ АЛГЕБРИ ТА АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ | 7 |
| 1.1. Семіотика та мови першого порядку | 7 |
| 1.2. Висловлення та дії над ними | 12 |
| 1.3. Формули алгебри висловлень та їх еквівалентність | 15 |
| 1.4. Булеві алгебри | 25 |
| 1.5. Задачі і вправи до розділу 1 | 42 |
| Розділ 2. ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ | 54 |
| 2.1. Мова числення висловлень | 54 |
| 2.2. Нормальні форми формул ЧВ | 70 |
| 2.3. Семантика числення висловлень | 91 |
| 2.4. Задачі і вправи до розділу 2 | 105 |
| Розділ 3. ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТИВ | 117 |
| 3.1. Алгебраїчні структури | 118 |
| 3.2. Мова числення предикатів | 127 |
| 3.3. Аксіоми і правила виведення числення предикатів | 140 |
| 3.4. Еквівалентність формул числення предикатів | 150 |
| 3.5. Інтерпретація числення предикатів | 162 |
| 3.6. Теорема Геделя про повноту | 170 |
| 3.7. Варіанти числення предикатів першого порядку | 177 |
| 3.8. Задачі і вправи до розділу 3 | 177 |
| Розділ 4. ТЕОРІЯ МОДЕЛЕЙ | 193 |
| 4.1. Основні поняття теорії моделей | 193 |

| | | |
|---|---|------------|
| 4.2. | Елементарні підструктури | 206 |
| 4.3. | Критерій елементарної підструктури | 208 |
| 4.4. | Ультрафільтри | 209 |
| 4.5. | Регулярні ультрафільтри | 211 |
| 4.6. | Ультрадобутки | 215 |
| 4.7. | Регулярні ультрадобутки | 220 |
| 4.8. | Аксіоматизовані класи структур | 223 |
| 4.9. | Задачі і вправи до розділу 4 | 227 |
| Розділ 5. ТЕОРІЯ РЕКУРСІЇ | | 234 |
| 5.1. | Машини Тюрінга | 236 |
| 5.2. | Рекурсивні функції | 246 |
| 5.3. | Обчислювані за Тюрінгом функції та рекурсивні функції | 259 |
| 5.4. | Задачі і вправи до розділу 5 | 266 |
| ДОДАТКИ | | 269 |
| Додаток 1. Мова Шмульяна для самоописання | | 269 |
| Додаток 2. Десята проблема Гільберта | | 271 |
| Предметний покажчик | | 273 |
| Бібліографія | | 277 |