

Ранг матриці

- ◊ 3.1.1. Описати всі матриці рангу 0.
- ◊ 3.1.2. Описати всі матриці рангу 1.
- ◊ 3.1.3. Чи можливо, щоб в матриці не було базисного мінору?
- ◊ 3.1.4. Вказати який-небудь базисний мінор і визначити ранг матриці:
 - а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 - д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◊ 3.1.5. Вказати базисні рядки в матрицях завдання 3.1.4.
- ◊ 3.1.6. Вказати базисні стовпці в матрицях завдання 3.1.4.
- ◊ 3.1.7. Вказати базисний мінор, базисні стовпці і базисні рядки в квадратній матриці з визначником, відмінним від 0. Чому дорівнює ранг такої матриці?
- ◊ 3.1.8. Довести, що ранг діагональної матриці дорівнює числу її елементів, відмінних від нуля.
- ◊ 3.1.9. Довести, що, якщо в матриці дорівнюють нулю всі мінори порядку k , то і всі мінори порядку $k+1$ дорівнюють нулю.
- ◊ 3.1.10. Довести, що ранг матриці не менший рангу довільної її підматриці.
- ◊ 3.1.11. Довести, що приписування до матриці нульового стовпця не змінює її рангу.
- ◊ 3.1.12. Довести, що приписування до матриці стовпця, рівного лінійній комбінації її стовпців, не змінює її рангу.
- ◊ 3.1.13. Довести, що якщо стовпці матриці B є лінійними комбінаціями стовпців матриці A , то $\text{rk } B \leq \text{rk } A$.
- ◊ 3.1.14. Оцінити ранг матриці $(A \quad B)^\square$ через ранги матриць A та B .
- ◊ 3.1.15. Нехай матриці A та B мають однакову висоту, і ранг A не змінюється після приписування до неї будь-якого з стовпців B . Довести, що $\text{rk } (A \quad B)^\square = \text{rk } A$.
- ◊ 3.1.16. Довести такі властивості рангу матриці:
 - а) Множення довільного рядка матриці на відмінне від нуля число не змінює її рангу.
 - б) Перестановка рядків матриці не змінює її рангу.
 - в) Додавання до якого-небудь рядка матриці лінійної комбінації інших рядків не змінює її рангу.
 - г) Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях її стовпців.
- ◊ 3.1.17. Описати спосіб обчислення рангу матриці з використанням елементарних перетворень її рядків і стовпців.

◊ 3.1.18. Обчислити ранги матриць:

$$\begin{array}{llll}
 \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}; & \text{ж)} \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1 - i\sqrt{2} \end{pmatrix}; \\
 \text{ж)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; & \text{з)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{и)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; & \text{і)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \\
 \text{ї)} \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}; & \text{й)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{к)} \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} & i - \sqrt{2} & 1 \\ 1 + i\sqrt{3} & i - \sqrt{3} & 1 \\ 1 + i\sqrt{4} & i - \sqrt{4} & 1 \end{pmatrix}; \\
 \text{л)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}; & \text{м)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}; & \text{н)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \\
 \text{o)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{п)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; & \text{р)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \\
 \text{с)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; & \text{т)} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \\
 \text{у)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}; & \text{ф)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 10^3 & 10^4 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 800 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 \end{pmatrix}; \\
 \text{x)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{и)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \\
 \text{ч)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{ш)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

◊ 3.1.19. Обчислити ранг матриці при всіможливих значеннях параметра:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix};$$

р) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-\lambda \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$.

◊ 3.1.20. Обчислити ранг матриці $A - \lambda E$ при всіх значеннях параметра λ , якщо:

а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ 3.1.21. Довести, що якщо $\det A = 0$, то рядки матриці A , так само як і її стовпці, лінійно залежні.

◊ 3.1.22. Нехай матриця A має порядок n і містить нульову підматрицю порядку $n-1$. Оцінити ранг A .

◊ 3.1.23. Нехай матриця A має порядок n і містить нульову підматрицю порядку s . Оцінити ранг A .

◊ 3.1.24. Нехай матриця A має порядок n і містить підматрицю порядку $n-1$, що має ранг 1. Оцінити ранг A .

◊ 3.1.25. а) Оцінити ранг добутку двох матриць через ранги співмножників.

б) Навести приклади, коли виконуються співвідношення: $\text{rk } AB < \text{rk } A$, $\text{rk } AB < \text{rk } B$, $\text{rk } AB < \min\{\text{rk } A, \text{rk } B\}$, $\text{rk } AB = \text{rk } A$, $\text{rk } AB = \text{rk } B$.

◊ 3.1.26. а) Нехай a — рядок, b — стовпець. Обчислити ранг матриці ba .

б) Нехай $\text{rk } A = 1$. Довести, що матриця A дорівнює добутку деякого стовпця на деякий рядок.

◊ 3.1.27. Нехай A, B, C — матриці, $\det A \neq 0$ і визначено добутки AB , CA . Довести, що $\text{rk } AB = \text{rk } B$, $\text{rk } CA = \text{rk } C$. Чи може бути виконана будь-яка з цих рівностей, якщо $\det A = 0$?

◊ 3.1.28. Довести, що якщо $\text{rk } A = r$, то мінор, що стоїть на перетині r лінійно незалежних рядків і r лінійно незалежних стовпців матриці A , відмінний від 0.

◊ 3.1.29. Нехай матриця A складається з r лінійно незалежних стовпців, B — з r лінійно незалежних рядків. Чому дорівнює ранг AB ?

◊ 3.1.30. Матриці A та B мають розміри відповідно $m \times r$ та $r \times n$, і $\text{rk } AB = r$. Знайти ранги матриць A та B .

◊ 3.1.31. Розкладання матриці A на добуток $A = BC$ називається *скелетним*, якщо $\text{rk } A = \text{rk } B = \text{rk } C$ і матриці B та C мають повний ранг (тобто ранг, рівний одному з розмірів матриці).

а) Довести, що будь-яку матрицю A можна зобразити як добуток матриці M , що складається з базисних рядків A , на деяку матрицю K (скелетне розкладання матриці за рядками).

б) Сформулювати і довести аналогічне твердження для скелетного розкладання матриці за стовпцями.

в) Як пов'язані між собою різні скелетні розкладання однієї матриці?

◊ 3.1.32. Знайти які-небудь скелетні розкладання (див. задачу 3.1.31) за рядками і стовпчиками для таких матриць:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}; & \text{г')} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

◊ 3.1.33. Довести, що будь-яку матрицю рангу r можна зобразити у вигляді суми r матриць рангу 1.

◊ 3.1.34. Вказати, які з виписаних нижче співвідношень можливі. Які з них виконані для довільної пари матриць однакових розмірів?

- а) $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk} A$;
- б) $\operatorname{rk}(A + B) = \max\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$;
- в) $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$;
- г) $\operatorname{rk}(A + B) < \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$;
- г') $\operatorname{rk}(A + B) < \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$;
- д) $\operatorname{rk}(A + B) \leq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

◊ 3.1.35. Нехай матриці A та B мають розміри відповідно $m \times n$ та $n \times p$, і нехай $AB = O$. Довести, що $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \leq n$.

◊ 3.1.36. Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \sin(a_1 + b_1) & \sin(a_1 + b_2) & \dots & \sin(a_1 + b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(a_n + b_1) & \sin(a_n + b_2) & \dots & \sin(a_n + b_n) \end{pmatrix} \leq 2.$$

◊ 3.1.37. Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B.$$

◊ 3.1.38. Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B.$$

◊ 3.1.39. Нехай A — квадратна матриця. Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A.$$

◊ 3.1.40. Нехай E — одинична, A, B — довільні квадратні матриці порядку n . Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} E & B \\ A & AB \end{pmatrix} = n.$$

◊ 3.1.41. Довести, що

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ 3A & -B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B.$$

◊ 3.1.42. Нехай A невироджена квадратна матриця порядку n , а матриці B, C і D — прямокутні. Знайти необхідну і достатню умову для того, щоб

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n.$$