

# Розділ 8.

## Комплексні числа

У розділі 2 ми вперше вжили термін «числове поле». Нагадаємо, що *числовим полем* (*кільцем*) називають поле (кільце), елементами якого є числа, а операціями — арифметичні операції додавання і множення. З наведених вище прикладів полів числовими є поле раціональних та поле дійсних чисел. Існує багато й інших числових полів. Так, наприклад, як неважко переконатися (див. приклад 7.29), числовим полем є множина чисел  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  із  $\mathbb{R}$ , де  $p$  — фіксоване просте число. Для читачів, знайомих з математикою лише в обсязі середньої школи, поле  $\mathbb{R}$  є найширшим числовим полем. Однак у математиці та її додатках використовуються числові поля, які не входять в  $\mathbb{R}$ . Найширшим числовим полем (за означенням) вважають поле комплексних чисел. Це поле виникло в результаті спроб побудувати поле, яке б містило поле дійсних чисел  $\mathbb{R}$  в ролі під поля і було б позбавлене відомого недоліку поля  $\mathbb{R}$  — нерозв'язності у ньому квадратних рівнянь з від'ємними дискримінантами. Так як цей недолік пояснюється неможливістю добування в  $\mathbb{R}$  квадратного кореня з  $-1$ , то ми будемо будувати поле комплексних чисел, виходячи з двох основних вимог:

- 1) воно повинно містити підполе, ізоморфне полю  $\mathbb{R}$ ;
- 2) воно повинно містити корінь рівняння

$$x^2 + 1 = 0. \quad (8.1)$$

### 8.1. Поле комплексних чисел

В ролі матеріалу, із якого ми будемо будувати цю нову систему чисел, візьмемо множину впорядкованих пар дійсних чисел, яку позначатимемо  $\mathbb{C}$ , тобто

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Наголосимо, що дві пари  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  із множини  $\mathbb{C}$  вважатимемо рівними тоді і лише тоді, коли  $a = c$ ,  $b = d$ .

Означимо на множині  $\mathbb{C}$  операції додавання та множення, визначивши для довільних пар  $(a, b)$ ,  $(c, d) \in \mathbb{C}$  співідношення

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (8.2)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (8.3)$$

(використання тих же знаків  $+$  і  $\cdot$ , що й у полі  $\mathbb{R}$  не повинно приводити до плутанини).

**Твердження 8.1.** *Множина  $\mathbb{C}$  з операціями додавання та множення, заданих рівностями (8.2) та (8.3), є полем. У ньому міститься підполе, яке ізоморфне полю  $\mathbb{R}$ , і рівняння (8.1) має розв'язок.*

**Доведення.** Асоціативність і комутативність операції додавання у множині  $\mathbb{C}$  випливають безпосередньо з відповідних властивостей додавання в  $\mathbb{R}$ . Нульовим елементом  $(\mathbb{C}, +)$  є пара  $(0, 0)$ , а протилежним до  $(a, b)$  — пара  $(-a, -b)$ . Отже,  $(\mathbb{C}, +)$  — абелева група.

Асоціативність і комутативність множення в  $\mathbb{C}$ , а також дистрибутивність множення стосовно додавання, доводяться безпосередньою перевіркою. Дійсно, для довільних пар  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$  маємо

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (c, d) \cdot (a, b);$$

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = \\ &= (ace - bde - ade - bcf, acf - bdf + ade + bce) = \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)); \\ ((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) = \\ &= ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e) = (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) = \\ &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

Аналогічно легко показати, що одиницею кільця  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  є пара  $(1, 0)$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b),$$

а елементом, оборотним до  $(a, b) \neq (0, 0)$ , пара  $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \cdot (a, b) = (1, 0)$$

(оборотний елемент знаходиться з рівняння  $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ ). Отже,  $\mathbb{C}$  — поле.

Тепер розглянемо в  $\mathbb{C}$  підмножину

$$\mathbb{C}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Легко бачити, що множина  $\mathbb{C}'$  замкнена стосовно операцій  $+ i \cdot$  в  $\mathbb{C}$ , тобто

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \tag{8.4}$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0). \tag{8.5}$$

Нейтральні елементи  $(0, 0)$  стосовно додавання і  $(1, 0)$  стосовно множення належать до  $\mathbb{C}'$ . Аналогічно для довільного ненульового  $a \in \mathbb{R}$  елементи  $(-a, 0)$  і  $(a^{-1}, 0)$  є оберненими до елемента  $(a, 0) \in \mathbb{C}'$  щодо додавання та множення відповідно і також належать множині  $\mathbb{C}'$ . Отже, множина  $\mathbb{C}'$  є полем. Перевіримо, що поле  $\mathbb{C}'$  ізоморфне полю дійсних чисел  $\mathbb{R}$ . Для цього розглянемо відображення  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$ , де  $\varphi(a) = (a, 0)$  для усіх  $a \in \mathbb{R}$ . Очевидно, відображення  $\varphi$  — біективне, причому переводить 0 в  $(0, 0)$  і 1 в  $(1, 0)$ . Крім цього, для довільних  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b), \\ \varphi(ab) &= (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = \varphi(a) \cdot \varphi(b). \end{aligned}$$

Отже, відображення  $\varphi$  є ізоморфізмом  $\mathbb{R}$  і  $\mathbb{C}'$ .

Залишилось показати, що серед елементів множини  $\mathbb{C}$  існує розв'язок рівняння (8.1), а саме такий елемент із  $\mathbb{C}$ , квадрат якого дорівнює  $(-1, 0)$  (тобто  $-1$  за вищевведеним ізоморфізмом). Очевидно, що таким елементом буде пара  $(0, 1)$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0),$$

що й завершує доведення твердження.  $\square$

**Означення 8.1.** Побудоване вище поле  $\mathbb{C}$  називається *полем комплексних чисел*, а його елементи — *комплексними числами*.

## 8.2. Алгебрична форма комплексних чисел

В процесі доведення твердження 8.1 було побудовано ізоморфізм поля дійсних чисел  $\mathbb{R}$  і підполя  $\mathbb{C}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$  поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$ . Використовуючи цей ізоморфізм (та рівності (8.4), (8.5), з яких видно, що операції над комплексними числами  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ , по суті, зводяться до відповідних операцій над дійсними числами  $a$ ,  $b$ ), ототожнімо кожне комплексне число вигляду  $(a, 0)$  з дійсним числом  $a$ . В результаті такого ототожнення можна вважати, що саме поле дійсних чисел  $\mathbb{R}$  є підполем поля  $\mathbb{C}$  (кажуть також, що поле  $\mathbb{C}$  є розширенням поля  $\mathbb{R}$ ).

Позначимо комплексне число  $(0, 1)$  через  $i$  та знайдемо його квадрат:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

(остання рівність можлива в силу нашої домовленості ототожнювати комплексні числа  $(a, 0)$  з дійсними числами  $a$ ). Бачимо, що  $i^2 = -1$  і, очевидно,  $(-i)^2$  теж дорівнює  $-1$ . Це означає, що в полі комплексних чисел многочлен  $x^2 + 1$  має два корені  $\pm i$ .

Розглянемо тепер довільне комплексне число  $(a, b) \in \mathbb{C}$ . Легко бачити, що

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

(нагадаємо, що ми домовилися ототожнювати  $(a, 0)$  з  $a$ ,  $(b, 0)$  з  $b$ , а  $(0, 1)$  позначили буквою  $i$ ). У такій формі найчастіше їх використовуються комплексні числа на практиці.

**Означення 8.2.** Запис комплексного числа  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  у вигляді

$$z = a + bi, \quad (8.6)$$

де  $a, b \in \mathbb{R}$ , називають *алгебричною* (або *звичайною*) *формою комплексного числа*. При цьому  $i$  називають *уявною одиницею*<sup>1</sup>,  $a$  – *дійсною частиною* числа  $a + bi$ ,  $b$  – *коефіцієнтом перед уявною одиницею*,  $bi$  – *уявною частиною* числа  $a + bi$ . Дійсну і уявну частину комплексного числа  $z$  позначають, відповідно,  $\Re z$  та  $\Im z$ .

Два комплексні числа, записані у алгебричній формі, вважатимемо *рівними*, якщо рівні їхні дійсні та уявні частини.

У нових позначеннях рівності (8.2), (8.3), що визначають операції додавання і множення комплексних чисел, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Запишемо ще в новій формі різницю двох комплексних чисел і частку від ділення на комплексне число, відмінне від 0:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i, \quad (8.7)$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \quad (8.8)$$

Легко бачити, що при додаванні комплексних чисел окремо додаються їхні дійсні і окремо їхні уявні частини; аналогічне правило має місце і для віднімання. При множенні (діленні) комплексного числа на довільне дійсне число, на це число множиться (ділиться) його дійсна та уявна частини.

<sup>1</sup>Зауважимо, що назва «уявна одиниця» за числом  $i$  збереглася лише в силу історичних традицій, оскільки символ  $i$  використовувався спочатку для позначення «неіснуючого» квадратного кореня з  $-1$ .

**Приклади 8.1.** 1.  $(2+5i)+(1-7i) = (2+1)+(5-7)i = 3-2i$ .

2.  $(3-9i)-(7+i) = (3-7)+(-9-1)i = -4-10i$ .

3.  $(1+2i)(3-i) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) + (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3)i = 5+5i$ .

4.  $\frac{1+2i}{3-i} = \frac{3-2}{9+1} + \frac{-1-6}{9+1}i = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ .

5.  $\frac{(3+5i)^3}{1-2i} = \frac{3^3+3 \cdot 3^2 \cdot 5i+3 \cdot 3 \cdot 25i^2+125i^3}{1-2i} = \frac{-198+10i}{1-2i} = \frac{-218-286i}{5} = -\frac{2}{5}(109+143i)$ .

**Означення 8.3.** Комплексне число  $a-bi$  називається *спряженим* до числа  $z=a+bi$  і позначається через  $\bar{z}$ .

**Твердження 8.2.** Для довільних комплексних чисел  $z, z_1$  виконуються рівності

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+z_1} = \bar{z} + \bar{z}_1, \quad \overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1.$$

*Доведення.* Перевіримо, наприклад, третю рівність (решта перевіряється аналогічно). Нехай  $z = a+bi, z_1 = a_1+b_1i \in \mathbb{C}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot z_1} &= \overline{(a+bi) \cdot (a_1+b_1i)} = \overline{(aa_1-bb_1)+(ab_1+ba_1)i} = \\ &= (aa_1-bb_1)-(ab_1+ba_1)i = (a-bi) \cdot (a_1-b_1i) = \bar{z} \cdot \bar{z}_1, \end{aligned}$$

що й потрібно було показати.  $\square$

Оскільки, нагадаємо, *автоморфізмом поля* називається будь-який ізоморфізм цього поля у себе, то очевидним наслідком із твердження 8.2 є таке твердження.

**Твердження 8.3.** Відображення  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , де  $\varphi(z) = \bar{z}$  для довільного  $z \in \mathbb{C}$ , є автоморфізмом поля  $\mathbb{C}$ .

Наведемо ще одну важливу властивість комплексно спряжених чисел.

**Твердження 8.4.** Сума та добуток комплексно спряжених чисел є дійсними числами.

*Доведення.* Дійсно, якщо  $z = a+bi$ , то  $\bar{z} = a-bi$ , а тому

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\Re z \in \mathbb{R}, \\ z\bar{z} &= (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.  $\square$

Використовуючи поняття спряженого комплексного числа, легко бачити, що для ділення двох комплексних чисел  $\frac{z_1}{z_2}$ , зручно домножити знаменник і чисельник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2};$$

зручність полягає у тому, що  $z_2 \bar{z}_2$  є дійсним числом (ми це успішно робили, не наголошуячи на цьому, у прикладі 8.1). Очевидно також, що цей же спосіб дозволяє зобразити число  $z^{-1}$  у вигляді  $\frac{1}{z\bar{z}}\bar{z}$ .

**Приклади 8.2.** 1.  $\frac{23+i}{3+i} = \frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{70-20i}{10} = 7-2i$ .

2. Якщо  $z = 1-2i$ , то  $z^{-1} = \frac{1}{(1-2i)(1+2i)} \cdot (1+2i) = \frac{1}{5}(1+2i)$ .

### 8.3. Геометрична інтерпретація

Розглянемо площину з декартовою системою координат (див. рис. 8.1(а)). Комплексному числу  $z = a + bi$  поставимо у відповідність точку площини з координатами  $a$  та  $b$  (або вектор із початком у початку координат і з кінцем у точці з абсцисою  $a$  і ординатою  $b$ ).

Зрозуміло, що це зображення комплексних чисел точками площини (або векторами) задає біективну відповідність між множиною  $\mathbb{C}$  і множиною точок площини (або векторів з початком в точці  $(0, 0)$ ). При такому зображенні комплексних чисел точками площини дійсні числа відповідають точкам осі абсцис  $Ox$ , яку тому часто називають *дійсною віссю* комплексної площини.

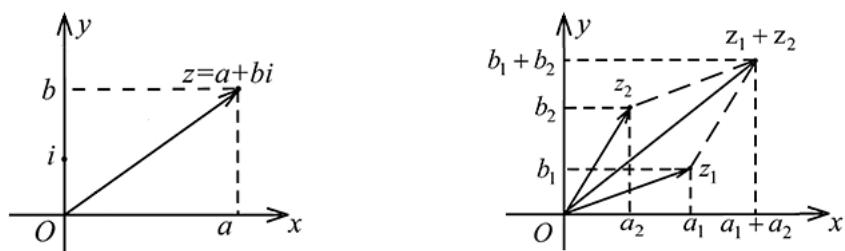


Рис. 8.1.

Зображення комплексних чисел точками площини приводить до природного бажання мати геометричну інтерпретацію операцій, визначених для комплексних чисел. Нехай маємо два комплексних числа  $z_1 = a_1 + b_1 i$  та  $z_2 = a_2 + b_2 i$ . На комплексній площині цим числам відповідають два вектори (див. рис. 8.1(б)). Побудуємо паралелограм, використовуючи ці вектори в ролі його сторін. Четвертою вершиною цього паралелограма буде, очевидно, точка  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ . Таким чином, додавання комплексних чисел геометрично виконується за правилом паралелограма, тобто за правилом додавання векторів, що виходять із початку координат.

Далі, число, яке є протилежним до числа  $z = a + bi$ , буде точкою комплексної площини, яка є симетричною до точки  $z$  стосовно початку координат (див. рис. 8.2(а)). Звідси легко можна отримати геометричну інтерпретацію віднімання.

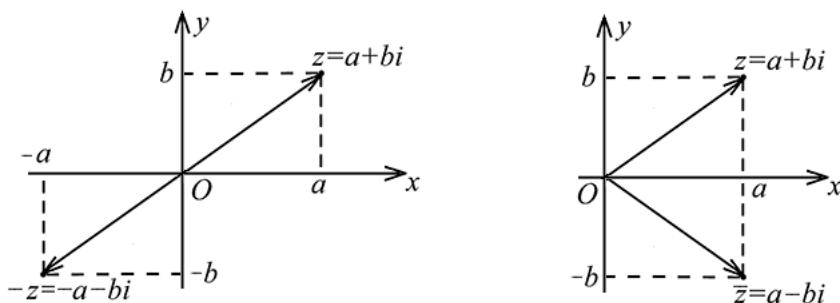


Рис. 8.2.

В свою чергу операція комплексного спряження геометрично зводиться до відображення площини  $\mathbb{C}$  стосовно дійсної вісі (див. рис. 8.2(б)).

Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел стане зрозумілим лише після того, коли ми введемо до розгляду новий, відмінний від звичайного, запис комплексних чисел.

## 8.4. Модуль та аргумент

Запис числа у вигляді  $z = a + bi$  використовує декартові координати точки, що відповідають цьому числу. Легко бачити, що ця відповідність між комплексними числами і точками координатної площини  $XOY$  біективна, тому іноді множину комплексних чисел ототожнюють з множиною точок координатної площини. Розміщення ж точки на площині повністю визначається заданням її полярних координат, тобто відстанню від початку координат до точки і кутом між додатнім напрямком осі абсцис та напрямком із початку координат на цю точку (див. рис. 8.3).

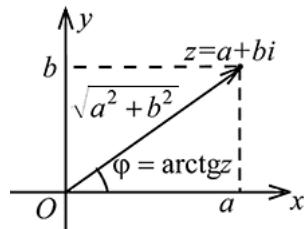


Рис. 8.3.

**Означення 8.4.** Відстань від точки  $O$  координатної площини  $XOY$  до точки  $M$ , яка зображає комплексне число  $z$ , називають *модулем числа  $z$*  і позначають у вигляді  $|z|$ . Найменший кут, на який потрібно повернути вісь  $OX$  проти годинникової стрілки до збігу її напрямку з напрямком вектора  $OM$ , називається *аргументом<sup>2</sup> числа  $z \neq 0$*  і позначають у вигляді  $\arg z$ . Для  $z = 0$  аргумент не визначається.

Безпосередньо з рис. 8.3 видно, що модуль числа  $z = a + bi$  знаходиться за формулою

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{або, що те саме, } |z| = \sqrt{z\bar{z}}),$$

а аргумент числа  $z = a + bi$  обчислюється із співвідношень

$$\cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

**Зауваження 8.1.** Число  $\arg z$  можна знайти для будь-якого ненульового комплексного числа  $z = a + bi$ , оскільки  $-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ ,  $-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ ,  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ . Очевидно також, що  $\arg z$  визначається комплексним числом  $z$  неоднозначно. Існує безліч дійсних чисел  $\varphi$ , які задовольняють визначенням аргумента для заданого числа  $z$ . Всі вони відрізняються між собою на число, кратне  $2\pi$  — періоду функцій косинус та синус. Щоб уникнути цієї неоднозначності, домовимося вибирати  $\arg z$  у якому-небудь проміжку довжини  $2\pi$ , наприклад, у проміжку  $[0, 2\pi)$ .

**Твердження 8.5.** Для довільних комплексних чисел  $z, z_1, z_2$  виконуються такі співвідношення:

- 1)  $|z| \geq 0$ , причому  $|z| = 0$  тоді і лише тоді, коли  $z = 0$ ;
- 2)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- 3)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- 4)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ .

<sup>2</sup>Аргумент комплексного числа є природнім узагальненням знаку дійсного числа. Дійсно, аргумент додатного дійсного числа дорівнює 0, аргумент від'ємного дійсного числа дорівнює  $\pi$ ; на дійсній осі із початку координат виходять лише два напрямки і їх можна розрізняти лише двома символами + і -, тоді як на комплексній площині напрямків, що виходять із точки 0, нескінчено багато і розрізняються вони вже кутом, що утворюється ними з додатнім напрямком дійсної осі.

*Доведення.* Перше співвідношення очевидне, а друге випливає із такого ланцюга рівностей

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2}} = \sqrt{(z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2})} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Перш, ніж доводити наступні співвідношення, зауважимо, що для довільних дійсних чисел  $a$  і  $b$  виконується нерівність

$$a \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (8.9)$$

(це дійсно так, оскільки якщо  $a < 0$ , то нерівність (8.9) очевидна, а якщо  $a \geq 0$ , то вона рівносильна очевидній нерівності  $a^2 \leq a^2 + b^2$ ).

Повертаючись до третього співвідношення, доведемо спочатку, що

$$|1 + z| \leq 1 + |z|. \quad (8.10)$$

Дійсно,  $|1 + z| = \sqrt{(1 + z)(1 + \bar{z})}$  і звідси, використовуючи нерівність  $\Re z \leq |z|$  (тобто нерівність (8.9) для  $z = a + bi$ ), отримаємо

$$|1 + z|^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + (z + \bar{z}) + |z|^2 = 1 + 2\Re z + |z|^2 \leq 1 + 2|z| + |z|^2 = (1 + |z|)^2.$$

Отож,  $|1 + z|^2 \leq (1 + |z|)^2$  і добуваючи квадратний корінь з обох частин цієї нерівності, одержимо нерівність (8.10). За цією нерівністю для довільних  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  при умові, що  $z_1 \neq 0$ , маємо

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cdot \left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \leq |z_1| \cdot \left(1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\right) = |z_1| + |z_2|,$$

а, отже, третє співвідношення доведено.

І насамкінець, оскільки  $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$ , то

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|,$$

і, міняючи місцями  $z_1$  і  $z_2$ , можна аналогічно показати, що

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|.$$

Із останніх двох нерівностей випливає четверте співвідношення твердження.  $\square$

**Зауваження 8.2.** Якщо комплексне число  $z$  є дійсним ( $\Im z = 0$ ), то його модуль  $|z|$  збігається з відомим із курсу середньої школи модулем (абсолютною величиною) дійсного числа. Твердження 8.5 свідчить про те, що відомі властивості модуля дійсного числа зберігаються і для модуля комплексного числа. Зауважимо ще, що властивість  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  має таку геометричну інтерпретацію: довжина сторони трикутника не перевищує суми довжин двох його інших сторін.

## 8.5. Тригонометрична форма комплексних чисел

Із попереднього параграфу випливає, що довільне ненульове комплексне число  $z = a + bi$  можна переписати у вигляді

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)). \quad (8.11)$$

**Означення 8.5.** Тригонометричною формою комплексного числа  $z$  називається довільний його запис вигляду

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (8.12)$$

де  $r, \varphi \in \mathbb{R}$  і  $r \geq 0$ .

**Твердження 8.6.** Кожне комплексне число  $z$  можна зобразити у тригонометричній формі. Якщо (8.12) — зображення комплексного числа  $z$  у тригонометричній формі і  $z \neq 0$ , то  $r = |z|$ , а  $\varphi = \arg z + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Доведення.** Із (8.11) і очевидної рівності  $0 = 0(\cos 0 + i \sin 0)$  видно, що тригонометрична форма існує для довільного  $z \in \mathbb{C}$ .

Нехай тепер  $z \neq 0$  і виконується рівність (8.12). Розділивши обидві частини рівності (8.12) на відповідні частини рівності (8.11) (за формулою (8.8)), отримаємо, що

$$1 = \frac{r}{|z|} \cos(\varphi - \arg z) + i \frac{r}{|z|} \sin(\varphi - \arg z).$$

Звідси

$$\frac{r}{|z|} \cos(\varphi - \arg z) = 1, \quad \frac{r}{|z|} \sin(\varphi - \arg z) = 0,$$

і тому  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Приклади 8.3.** 1. Оскільки для числа  $z = 1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$  модуль  $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$  і кут  $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ , то  $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$  — тригонометрична форма комплексного числа  $1 + \sqrt{3}i$ .

2. Аналогічно,  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ ;  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ;  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ ;  $1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ;  $1-i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$ ;  $3+4i = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , де  $\varphi$  — кут першої чверті, косинус якого дорівнює  $\frac{3}{5}$ .

Тригонометрична форма комплексного числа корисна тим, що у ній простіше, ніж в алгебричній формі, здійснюються множення, ділення, піднесення до степеня комплексних чисел та добування коренів з комплексного числа.

**Твердження 8.7.** Для довільних чисел  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \in \mathbb{C}$  правильні співвідношення:

- 1)  $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ , тобто при множенні комплексних чисел їхні модулі перемножаються, а аргументи додаються;
- 2) якщо  $z_2 \neq 0$ , то  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ , тобто при діленні ненульових комплексних чисел їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються.

**Доведення.** Дійсно,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.  $\square$

З отриманих вище результатів ми можемо сформулювати деякий загальний принцип: звичайна алгебрична форма (8.6) комплексних чисел більш пристосована для вираження їхніх адитивних властивостей, а тригонометрична форма (8.12) — для вираження їхніх мультиплікативних властивостей. Порушення цього принципу призводить до надзвичайно складних формул.

## 8.6. Формула Муавра

**Твердження 8.8.** Для довільних  $n \in \mathbb{Z}$   $i z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}$  правильна рівність

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad (8.13)$$

*Доведення.* Виконаємо доведення методом математичної індукції. Якщо  $n = 1$ , то формула (8.13) очевидна. Припустимо, що вона правильна для довільного натурального  $n = k$  і покажемо її правильність й для  $n = k + 1$ . Дійсно, використовуючи твердження 8.7, маємо

$$\begin{aligned} (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{k+1} &= (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^k \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^{k+1} (\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

Отже, рівність (8.13) правильна для всіх натуральних  $n$ . Якщо  $n = 0$ , то формула (8.13) зводиться до рівності  $1 = 1$ . Залишилось показати, що рівність (8.13) правильна й для усіх цілих від'ємних показників. При  $n = -1$  маємо

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} = \frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r^{-1} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$$

а тому при  $n = -k$ , де  $k \in \mathbb{N}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-k} &= \left( (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} \right)^k = \\ &= (r^{-1} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)))^k = r^{-k} (\cos(-k\varphi) + i \sin(-k\varphi)). \end{aligned}$$

Отож, формулу (8.13) доведено для довільного цілого степеня.  $\square$

Формулу (8.13) називають *формуллою Муавра* в честь англійського математика Абрахама де Муавра (1667-1754).

**Приклади 8.4. 1.**  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^{37} = i$ ,  $i^{122} = -1$ . В загальному випадку, якщо  $k, t \in \mathbb{Z}$ , то  $i^{4k+t} = i^t$ .

**2.**  $(2 + 5i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5i + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 i^2 + 5^3 i^3 = 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i$ .

**3.**  $(1+i)^4 = (\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos \pi + i \sin \pi) = -4$ .

**4.**  $(3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^{-3} = 3^{-3} (\cos(-\frac{3}{5}\pi) + i \sin(-\frac{3}{5}\pi)) = \frac{1}{27} (\cos \frac{7}{5}\pi + i \sin \frac{7}{5}\pi)$ .

**Зауваження 8.3.** Частковий випадок формулли Муавра (а саме рівність  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ ), біном Ньютона та співвідношення  $i^{4k+t} = i^t$  дозволяють отримати вираження синусів та косинусів кратного кута:

$$\cos n\varphi = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \varphi \cdot \sin^{2k} \varphi,$$

$$\sin n\varphi = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-1-2k} \varphi \cdot \sin^{2k+1} \varphi,$$

де через  $\binom{n}{k}$  позначено біноміальний коефіцієнт  $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$ . При  $n = 2$  приходимо до відомих формул

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \cos \varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

а при  $n = 3$  — до формул

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

**Приклади 8.5.** 1. Виразимо  $\operatorname{tg} 5\varphi$  через  $\operatorname{tg} \varphi$ .

Для цього розглянемо співвідношення  $\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5$  і застосуємо до нього біном Ньютона:

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi.$$

Прирівнявши відповідні компоненти, отримаємо

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi, \\ \sin 5\varphi &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi,\end{aligned}$$

звідки випливає

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi}{\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi} = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi}.$$

2. Виразимо лінійно  $\sin^5 \varphi$  через тригонометричні функції кратних аргументів.

Нехай  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , тоді, очевидно,  $z^{-1} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ ,  $z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$ ,  $z^{-k} = \cos k\varphi - i \sin k\varphi$ , звідки

$$\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}, \quad \sin k\varphi = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}.$$

Скористаємось цими формулами:

$$\begin{aligned}\sin^5 \varphi &= \left( \frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^5 = \\ &= \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} = \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i} = \\ &= \frac{2i \sin 5\varphi - 10i \sin 3\varphi + 20i \sin \varphi}{32i} = \frac{\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi}{16}.\end{aligned}$$

Аналогічно, будь-який вираз вигляду  $\cos^k \varphi$ ,  $\sin^m \varphi$  можна лінійно зобразити через тригонометричні функції кратних аргументів.

**Зауваження 8.4.** Розглянемо співвідношення  $e^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ . В курсі математичного аналізу за допомогою розкладу функцій комплексної змінної у степеневі ряди доводиться формула Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

з якої випливають усі отримані нами вище результати. Потрібно тільки зауважити, що  $e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ,  $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$  і тригонометрична форма комплексного числа зводиться до вигляду  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ .

## 8.7. Корені з комплексних чисел

Тепер навчимося знаходити корені довільного степеня із комплексних чисел, і основне питання, яке тут виникає, — чи завжди можна це зробити? Виявляється, що завжди, і формула Муавра дає, по-суті справи, повне вирішення цього питання.

**Означення 8.6.** Нехай  $n$  — довільне натуральне число. *Коренем  $n$ -го степеня* з комплексного числа  $z$  називається будь-який розв'язок рівняння

$$x^n = z. \tag{8.14}$$

Множину  $\sqrt[n]{z} = \{u \in \mathbb{C} \mid u^n = z\}$  — всіх коренів  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  — повністю описує таке твердження.

**Теорема 8.9.** Якщо  $n \in \mathbb{N}$  і  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}$ , то корінь  $n$ -го степеня з числа  $z$  має рівно  $n$  різних значень і всі вони знаходяться за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (8.15)$$

*Доведення.* Нехай  $u = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$  — розв'язок рівняння (8.14). Якщо  $z = 0$ , то рівняння (8.14) задовольняє лише число  $z = 0$ . Тому будемо вважати, що  $z \neq 0$ . Підставляючи у (8.14) числа  $u$  та  $z$  в тригонометричній формі і скориставшись формулою Муавра, отримаємо

$$\rho^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси за твердженням 8.6 маємо

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,$$

або

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k$  — деяке ціле число,  $\sqrt[n]{r}$  — арифметичний корінь з дійсного невід'ємного числа  $r$ . Отож, коренями  $n$ -го степеня з числа  $z$  можуть бути лише числа

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.16)$$

Безпосередньою перевіркою, за допомогою піднесення до  $n$ -го степеня за формулою Муавра, легко переконатися у тому, що число (8.16) є коренем  $n$ -го степеня з числа  $z$  при довільному цілому  $k$ . З'ясуємо, скільки серед чисел вигляду (8.16) різних.

Поділимо  $k$  на  $n$  за алгоритмом ділення з остачею:  $k = nq + s$ , де  $q, s \in \mathbb{Z}$  і остача  $s \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} &= \cos \frac{\varphi + 2\pi(nq + s)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(nq + s)}{n} = \\ &= \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi s}{n} + 2\pi q \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi s}{n} + 2\pi q \right) = \cos \frac{\varphi + 2\pi s}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi s}{n}, \end{aligned}$$

а тому  $\sqrt[n]{z} \subseteq \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ . Залишилося перевірити, що при  $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  одержуються різні розв'язки. Дійсно, якби при  $0 \leq k_1 < k_2 \leq n - 1$  розв'язки були б одинаковими, то  $\frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = 2\pi t$ . Звідси  $k_2 - k_1 = nt$ , а ця рівність неправильна, оскільки  $t \in \mathbb{Z}$ , а  $0 < k_2 - k_1 < n$ . Отже,  $\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ .  $\square$

Як наслідок із даної теореми отримаємо, що усі  $n$  значень кореня  $n$ -го степеня з числа  $z$  розташовані у вершинах правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло з центром в нулі і радіусом  $\sqrt[n]{|z|}$ .

**Приклади 8.6. 1.** Обчислимо  $\sqrt[3]{-8}$ . Оскільки  $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ , то

$$\sqrt[3]{-8} = \left\{ \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \mid k = 0, 1, 2 \right\},$$

тобто при  $k = 0$ :  $z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$ ;

при  $k = 1$ :  $z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$ ;

при  $k = 2$ :  $z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$ .

Отже, кубічними коренями із комплексного числа  $z = -8$  є три комплексні числа  $1 + \sqrt{3}i$ ,  $-2$ ,  $1 - \sqrt{3}i$ .

**2.** Обчислимо  $\sqrt{i}$ . Оскільки  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ , то  $\sqrt{i} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \mid k = 0, 1 \right\}$ , тобто

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_1 &= \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -z_0. \end{aligned}$$

**3.** Обчислимо  $\sqrt[3]{2+2i}$ . Оскільки  $2+2i = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ , то

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+2i} &= (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \cos(15^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(15^\circ + k \cdot 120^\circ) \right), \end{aligned}$$

де  $k = 0, 1, 2$ , а тому

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \left( \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ z_1 &= \sqrt{2} \left( \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ \right) = -1 + i, \\ z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos 255^\circ + i \sin 255^\circ \right) = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

**Наслідок 8.10.** У полі комплексних чисел довільне квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  має розв'язок і його корені знаходяться за формулами

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

*Доведення.* Доведення проводиться аналогічно до виведення формули для коренів квадратного рівняння в  $\mathbb{R}$ . Потрібно врахувати, що тут множина  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  завжди непорожня.  $\square$

**Зауваження 8.5.** Розглянемо детальніше випадок знаходження квадратного кореня з комплексного числа, а саме виведемо алгебричну формулу для цієї дії не звертаючись до тригонометричної форми комплексного числа.

Нехай  $x + yi = \sqrt{a + bi}$  і припустимо, що  $b \neq 0$  (оскільки лише цей випадок має теоретичну цінність). Тоді  $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ , що рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \end{cases}$$

причому нас цікавлять лише дійсні корені цієї системи. Оскільки  $(x^2 - y^2)^2 = a^2$ ,  $4x^2y^2 = b^2$ , то, додавши ці рівності, отримаємо  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ . Звідси  $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ , причому тут повинен добуватися арифметичний корінь, бо  $x^2 + y^2 > 0$ . Співставляючи останню рівність з першим рівнянням системи, отримаємо

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} + a, \\ 2y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} - a. \end{aligned}$$

За задумом задачі праві частини обох рівнянь повинні бути невід'ємні, і це дійсно так, оскільки  $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} = |a|$ .

Із останніх рівностей знаходимо

$$x = \sigma_1 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad y = \sigma_2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Тут знову беруться арифметичні значення для коренів, а  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  приймають значення  $\pm 1$ . Очевидно, що так обчислені числа  $x$  та  $y$  задовільняють першому рівнянню системи:  $x^2 - y^2 = a$ . Але вони також повинні задовільняти і другому рівнянню:  $2xy = b$ . Тому

$$2\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} = b,$$

або, після очевидних перетворень,

$$\sigma_1\sigma_2\sqrt{b^2} = b,$$

звідки  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ , якщо  $b > 0$ , і  $\sigma_1\sigma_2 = -1$ , якщо  $b < 0$ . Отож,  $\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{sgn}(b)$ , де через  $\operatorname{sgn}(b)$  позначено знак числа  $b$  ( $\operatorname{sgn}(b) = 1$ , якщо  $b > 0$ , і  $\operatorname{sgn}(b) = -1$ , якщо  $b < 0$ ).

В підсумку отримуємо формулу:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right).$$

**Приклади 8.7.** 1.  $\sqrt{i} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{1+0}+0}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{1+0}-0}{2}} \right) = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

2.  $\sqrt{3-4i} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}} \right) = \pm(2-i)$ .

## 8.8. Корені $n$ -го степеня з 1. Група $\mathbb{C}_n$

Застосуємо результати попереднього параграфу до одного часткового, проте важливого випадку: знайдемо усі корені  $n$ -го степеня із комплексного числа  $z = 1$ . Множину всіх коренів  $n$ -го степеня з 1 позначатимемо  $\mathbb{C}_n$ . Оскільки  $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ , то при невеликих значеннях  $n$ , користуючись формулою (8.15), легко отримати, що

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_1 &= \{1\}, & \mathbb{C}_2 &= \{1, -1\}, \\ \mathbb{C}_3 &= \left\{1, -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}, & \mathbb{C}_4 &= \{1, -1, i, -i\}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

У загальному ж випадку

$$\mathbb{C}_n = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}\},$$

де

$$\epsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{8.18}$$

**Твердження 8.11.** Для будь-якого натурального  $n$  множина  $\mathbb{C}_n$  всіх коренів  $n$ -го степеня з 1 є циклічною групою щодо операції множення комплексних чисел.

**Доведення.** Якщо  $\epsilon_s$  і  $\epsilon_t$  — корені  $n$ -го степеня з 1, то  $\epsilon_s^n = 1$  та  $\epsilon_t^n = 1$  за означення кореня. Тому

$$(\epsilon_s \epsilon_t)^n = 1,$$

а це означає, що  $\epsilon_s \epsilon_t$  також є коренем  $n$ -го степеня з 1, і, отже, множина  $\mathbb{C}_n$  замкнута щодо множення. Крім того, очевидно, що множина  $\mathbb{C}_n$  містить  $1 = \epsilon_0$  і разом з кожним елементом  $\epsilon_k$  — обернений йому елемент  $\epsilon_{n-k}$ . Асоціативність операції множення в  $\mathbb{C}_n$  випливає з її асоціативності в  $\mathbb{C}$ . Отож,  $(\mathbb{C}_n, \cdot)$  — мультиплікативна група.

Залишилося показати, що група  $\mathbb{C}_n$  циклічна. А це дійсно так, оскільки з рівності (8.18) і формули Муавра випливає, що

$$\epsilon_k = \epsilon_1^k,$$

тобто всі елементи групи  $\mathbb{C}_n$  є степенями одного й того ж її елемента  $\epsilon_1$ . Отже,  $\mathbb{C}_n = \langle \epsilon_1 \rangle$ , що й завершує доведення.  $\square$

**Наслідок 8.12.** Для будь-якого натурального числа  $n$  існує абелева група з  $n$  елементів.

**Приклад 8.8.** Множина  $\mathbb{C}_6$  є циклічною групою породженою елементом  $\epsilon_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , тобто  $\mathbb{C}_6 = \langle \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rangle$ .

Як було показано у доведенні твердження 8.11, група  $\mathbb{C}_n$  породжується елементом  $\epsilon_1$ . Виникає природне питання, чи є в  $\mathbb{C}_n$  інші елементи, що володіють такою ж властивістю? Перш ніж відповісти на це питання, доведемо таке твердження.

**Твердження 8.13.** Для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  виконується рівність

$$\mathbb{C}_n = \bigcup_{d|n} \mathbb{C}_d$$

де об'єднання множин  $\mathbb{C}_d$  береться за усіма натуральними дільниками  $d$  числа  $n$ .

**Доведення.** Позначимо  $\bigcup_{d|n} \mathbb{C}_d = K_n$ . Включення  $\mathbb{C}_n \subseteq K_n$  випливає з подільності  $n|n$ . Обернене включення доводить істинна для будь-якого дільника  $d$  числа  $n$  імплікація: якщо  $\epsilon^d = 1$ , то  $\epsilon^n = 1$ .  $\square$

Таким чином, серед усіх коренів  $n$ -го степеня з 1 містяться корені з 1 всіх менших степенів, які є дільниками числа  $n$ . Наприклад, як легко бачити з (8.17),  $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_2 \subset \mathbb{C}_4$  і  $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_3$ . У зв'язку з цим природно виділити із  $\mathbb{C}_n$  корені власне  $n$ -го степеня з 1.

## 8.9. Первісні корені з 1

**Означення 8.7.** Корінь  $n$ -го степеня з 1 називається *первісним* (або *примітивним*), якщо він не є коренем  $m$ -го степеня з 1 при  $m < n$ .

Множину всіх первісних коренів  $n$ -го степеня з 1 повністю описує таке твердження.

**Твердження 8.14.** Для будь-яких  $n \in \mathbb{N}$   $i$   $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  еквівалентні такі властивості:

- 1)  $\epsilon_k$  породжує групу  $\mathbb{C}_n$ , тобто  $\mathbb{C}_n = \{ \epsilon_k^0, \epsilon_k^1, \epsilon_k^2, \dots, \epsilon_k^{n-1} \}$ ;
- 2)  $\epsilon_k$  — первісний корінь  $n$ -го степеня з 1;
- 3) числа  $k$  та  $n$  взаємно прості.

**Доведення.** Для доведення достатньо встановити істинність імплікацій  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ .

$1) \Rightarrow 2)$  Проведемо доведення методом від супротивного. Припустимо, що  $\epsilon_k$  — не первісний корінь. Тоді  $\epsilon_k^m = 1$  при деякому  $m < n$  і  $m > 0$ . Звідси випливає, що  $\epsilon_k \in \mathbb{C}_m$  і, тому,  $\epsilon_k^t \in \mathbb{C}_m$  при будь-якому  $t \in \mathbb{Z}$ . Отже,  $\epsilon_k$  не породжує  $\mathbb{C}_n$ , а це суперечить умові. Тому наше припущення неправильне, і, отож, імплікація  $1) \Rightarrow 2)$  істинна.

$2) \Rightarrow 3)$  Знову від супротивного: припустимо, що  $(k, n) = d > 1$ . Тоді

$$\epsilon_k^{\frac{n}{d}} = (\epsilon_k^k)^{\frac{n}{d}} = (\epsilon_1^n)^{\frac{k}{d}} = 1^{\frac{k}{d}} = 1,$$

а це суперечить умові, що корінь  $\epsilon_k$  — первісний. Отже, наше припущення невірне, а тому  $(k, n) = 1$ .

$3) \Rightarrow 1)$  Якщо  $(k, n) = 1$ , то за наслідком з алгоритму подільності у множині цілих чисел знайдуться такі числа  $u, v \in \mathbb{Z}$ , що  $ku + nv = 1$ , і тому  $(ku + nv)s = s$  для довільного  $s \in \mathbb{Z}$ . Отже, для будь-якого  $s = 0, 1, \dots, n-1$  маємо

$$\epsilon_s = \epsilon_1^s = \epsilon_1^{(ku+nv)s} = (\epsilon_1^{ku})^s = (\epsilon_1^k)^{us} = \epsilon_k^{us}.$$

Таким чином, будь-який корінь  $\epsilon_s$   $n$ -го степеня з 1 є степенем кореня  $\epsilon_k$ , тобто  $\epsilon_k$  породжує групу  $\mathbb{C}_n$ .  $\square$

**Зауваження 8.6.** Із твердження 8.14 очевидно випливає, що кількість первісних коренів  $n$ -го степеня з 1 дорівнює кількості тих натуральних чисел  $k < n$ , для яких НСД( $n, k$ ) = 1. Ця кількість називається *функцією Ейлера* і відіграє важливу роль в теорії чисел. Очевидно також, що якщо  $p$  — просте число, то усі корені  $p$ -го степеня з одиниці, відмінні від  $\epsilon_0 = 1$ , є первісними. З алгебричної точки зору, без врахування геометричного зображення, усі первісні корені заданого степеня  $p$  рівноправні.

**Приклади 8.9. 1.** Числа  $\epsilon_1 = i$  та  $\epsilon_3 = -i$  — первісні корені 4-го степеня з 1. Число  $\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  — первісний корінь  $n$ -го степеня з 1.

**2.** При  $n = 12$  первісними коренями будуть  $\epsilon_1, \epsilon_5, \epsilon_7, \epsilon_{11}$ .

На закінчення вкажемо на зв'язок коренів  $n$ -го степеня із будь-якого числа  $z$  з коренями  $n$ -го степеня з 1. Порівнюючи формули (8.15) і (8.18), одержуємо  $z_k = z_p \cdot \epsilon_k$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ . Звідси випливає таке твердження.

**Твердження 8.15.** Усі корені  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  отримуються шляхом домноження одного з них на всі корені  $n$ -го степеня з 1.