

# Розділ 5.

## Ранг матриці та його застосування

### 5.1. Ранг матриці. Теорема про ранг матриці

Нехай  $A$  — довільна  $(m \times n)$ -матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Очевидно, що стовпчики матриці  $A$  можна розглядати як  $m$ -вимірні вектори вигляду

$$\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}),$$

де  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тому над стовпчиками матриці справджується поняття лінійної залежності та незалежності.

**Означення 5.1.** Якщо матриця  $A$  має  $r$  лінійно незалежних стовпчиків, а кожні  $(r + 1)$  стовпчики цієї матриці лінійно залежні, то число  $r$  називають *рангом матриці  $A$  за стовпчиками*.

Аналогічно можна розглянути рядки матриці  $A$  як  $n$ -вимірні вектори вигляду

$$\vec{a}_i' = (a_{i1}, \dots, a_{in}),$$

де  $i = 1, 2, \dots, m$ , і ввести до розгляду поняття *рангу матриці за рядками*. Проте потреба в окремому розгляді рангу матриці за стовпчиками і рангу матриці за рядками відпадає, оскільки ці поняття співпадають. Доведення цього доволі несподіваного факту буде отримано після того, як ми розглянемо ще одну форму визначення рангу матриці, яка, до речі, дає спосіб його практичного обчислення.

Для цього розглянемо мінори  $k$ -го порядку ( $k \leq \min(m, n)$ ), тобто визначник матриці, яка утворена із елементів матриці  $A$ , що стоять на перетині довільно вибраних  $k$  рядків і  $k$  стовпчиків матриці  $A$ . Нас цікавитимуть ті мінори, а точніше, порядки тих мінорів матриці  $A$ , які відмінні від нуля, а саме найвищий серед цих порядків. При його відшуванні корисно враховувати таке зауваження.

**Твердження 5.1.** *Якщо всі мінори порядку  $k$  даної матриці дорівнюють нулю, то і всі мінори більшого порядку також дорівнюють нулю.*

*Доведення.* Доведення очевидним чином випливає із теореми про розклад визначника за елементами рядка. Дійсно, якщо всі мінори порядку  $k$  даної матриці дорівнюють нулю, то розклавши в даній матриці будь-який мінор порядку  $k + 1$  за елементами його, наприклад, рядка, отримаємо, що в його кожному доданку як співмножник міститиметься мінор порядку  $k$ . Тому мінор порядку  $k + 1$  дорівнює нулю. Звідси, застосувавши індукцію за порядком мінорів, отримаємо, що й будь-який мінор порядку, більшого ніж  $k$ , даної матриці дорівнює нулю.  $\square$

Доведемо тепер теорему про ранг матриці.

**Теорема 5.2** (про ранг матриці). *Найвищий (максимальний) порядок відмінних від нуля мінорів матриці дорівнює рангові даної матриці за стовпчиками.*

*Доведення.* Нехай найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці  $A$  дорівнює  $r$ . Припустимо, — без зменшення загальності, — що мінор  $M$   $r$ -го порядку, що стоїть у лівому верхньому куті матриці

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

відмінний від нуля,

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді перші  $r$  стовпчиків матриці  $A$  лінійно незалежні: якби вони були лінійно залежними, то такими були б і стовпчики мінора  $M$ , і тоді він дорівнював би нулю (оскільки один з його стовпчиків був би лінійною комбінацією інших), а це суперечить нашому припущенню.

Доведемо тепер, що кожний стовпчик матриці  $A$ , починаючи з  $r + 1$ -го і до  $n$ -го, є лінійною комбінацією перших  $r$  стовпчиків цієї матриці. Для цього, використовуючи  $j$ -ий стовпчик ( $r + 1 \leq j \leq n$ ) та  $i$ -ий рядок ( $1 \leq i \leq m$ ), побудуємо допоміжний мінор  $(r + 1)$ -го порядку

$$M_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

який, як бачимо, отримується, так званим, "облямуванням" мінора  $M$  відповідними елементами  $j$ -го стовпчика та  $i$ -го рядка. При будь-якому значенні коефіцієнта  $i$  мінор

$$M_i = 0.$$

Дійсно, якщо  $i > r$ , то  $M_i$  буде мінором  $(r + 1)$ -го порядку нашої матриці  $A$  і тому дорівнює нулю, оскільки всі мінори більшого від  $r$  порядку дорівнюють нулю за припущенням. Якщо ж  $i \leq r$ , то  $M_i$  уже не буде мінором матриці  $A$ , оскільки не може бути отриманий викреслюванням із цієї матриці деяких її рядків і стовпчиків; проте визначник  $M_i$  міститиме два однакові рядки і, як наслідок, знову дорівнює нулю.

Розкладемо мінор  $M_i$  за останнім рядком:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}A_{ij} = 0.$$

Очевидно, що  $A_{ij} = M$ , а тому останню рівність можна переписати у вигляді

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}M = 0,$$

звідки, оскільки  $M \neq 0$ , отримуємо

$$a_{ij} = -\frac{A_{i1}}{M}a_{i1} - \frac{A_{i2}}{M}a_{i2} - \dots - \frac{A_{ir}}{M}a_{ir}. \quad (5.1)$$

Алгебричними доповненнями для елементів  $a_{ik}$  в  $M_i$  при  $1 \leq k \leq r$  будуть числа

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,k-1} & a_{r,k+1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix},$$

які, як бачимо, не залежать від коефіцієнта  $i$ . Тому ми отримуємо, що рівність (5.1) буде правильною для всіх  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , і що увесь  $j$ -ий стовпчик матриці  $A$  буде сумою її перших  $r$  стовпчиків, взятих, відповідно, із коефіцієнтами  $-\frac{A_{i1}}{M}$ ,  $-\frac{A_{i2}}{M}$ ,  $\dots$ ,  $-\frac{A_{ir}}{M}$ , тобто

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = -\frac{A_{i1}}{M} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} - \frac{A_{i2}}{M} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} - \dots - \frac{A_{ir}}{M} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix},$$

для всіх  $j = r + 1, \dots, n$ .

Отже, у системі стовпчиків матриці  $A$  ми знайшли максимальну лінійно незалежну підсистему, яка складається із  $r$  стовпчиків. Цим доведено, що ранг матриці  $A$  за стовпчиками дорівнює  $r$ , тобто доведено теорему про ранг.  $\square$

Як наслідок теореми про ранг матриці доведемо твердження, уже сказане нами раніше.

**Теорема 5.3.** Ранги матриці  $A$  за рядками  $i$  за стовпчиками є однаковими і дорівнюють максимальному порядку відмінних від нуля мінорів матриці  $A$ .

*Доведення.* Для доведення достатньо транспонувати матрицю, тобто зробити рядки стовпчиками, зберігши нумерацію (при транспонуванні максимальний порядок відмінних від нуля мінорів матриці не зміниться, оскільки транспонування не змінює визначника).  $\square$

Усі вище наведені дослідження дають нам змогу сформулювати означення рангу матриці загалом.

**Означення 5.2.** Рангом матриці  $A$  називається або максимальне число лінійно незалежних стовпчиків, або максимальне число лінійно незалежних рядків матриці  $A$ , або найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці  $A$  позначатимемо  $\text{rk } A$ .

Безпосередньо із означення рангу матриці впливає.

**Твердження 5.4.** 1. Якщо  $A$  — матриця розміру  $(m \times n)$ , то

$$0 \leq \text{rk } A \leq \min(m, n),$$

де  $\min(m, n)$  — менше з чисел  $m$  і  $n$ .

2.  $\text{rk } A = 0$  тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці  $A$  рівні нулю.

3. Для квадратної матриці  $A$   $n$ -го порядку  $\text{rk } A = n$  тоді і лише тоді, коли матриця  $A$  невироджена.

**Приклад.** Знайдемо ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Серед мінорів першого порядку (елементів матриці  $A$ ) є відмінні від нуля, а тому  $\text{rk } A > 0$ . Легко перевірити, що всі мінори другого і третього порядків дорівнюють нулю. Отже,  $\text{rk } A = 1$ .

Очевидні такі властивості рангу матриці.

**Твердження 5.5.** 1. Ранг матриці, отриманої із даної викреслюванням якого-небудь рядка або стовпчика, дорівнює рангу даної матриці або менший від нього на одиницю.

2. Ранг матриці, отриманої із даної приписуванням до неї рядка (стовпчика), елементами якого є довільні числа, дорівнює рангу вихідної матриці або більший від нього на одиницю.

3. Якщо викреслити із матриці або приписати до неї нульовий рядок чи стовпчик, тобто рядок (стовпчик), всі елементи якого є нулями, то ранг матриці не зміниться.

4. Ранг матриці, отриманої із даної транспонуванням, дорівнює рангу даної матриці, тобто

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^{\top}.$$

*Доведення.* Перші дві властивості очевидні. Третя та четверта також, якщо згадати при доведенні третьої властивості, що визначник із нульовим рядком (або стовпчиком) дорівнює нулю, а при доведенні четвертої — що при транспонуванні матриці її визначник не змінюється.  $\square$

Наведемо ще один важливий наслідок із теореми про ранг матриці.

**Теорема 5.6.** *Визначник дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли його рядки (стовпчики) лінійно залежні.*

*Доведення.* Достатність є однією з властивостей визначника (наслідок 2.16).

Доведемо необхідність. Нехай  $A$  — квадратна матриця  $n$ -го порядку і  $\det A = 0$ . Звідси випливає, що найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці менший  $n$ , тобто  $\operatorname{rank} A < n$ , а тому, за доведеним вище, рядки (стовпчики) лінійно залежні.  $\square$

## 5.2. Метод облямовуючих мінорів для обчислення рангу матриці

Як уже було сказано, теорема про ранг дає метод для практичного обчислення рангу матриці, а, отже, й для розв'язку питання про існування лінійної залежності у системі векторів; утворивши матрицю, стовпчиками якої будуть координати даних векторів, і обчислюючи ранг даної матриці, ми знайдемо максимальне число лінійно незалежних векторів даної системи.

Даний метод знаходження рангу матриці вимагає обчислення хоча і скінченної, але, можливо, доволі великої кількості мінорів цієї матриці. Проте є деякі спрощення. Якщо глянути на доведення теореми про ранг матриці, то побачимо, що при її доведенні ми не використовували рівність нулю всіх мінорів  $(r + 1)$ -го порядку матриці  $A$  — насправді використовувались лише ті мінори  $(r + 1)$ -го порядку, які облямовують даний, відмінний від нуля, мінор  $r$ -го порядку  $M$  (тобто повністю містять його всередині себе), і тому із рівності нулю лише цих мінорів випливає, що  $r$  є максимальним числом лінійно незалежних стовпчиків матриці  $A$ ; з останнього випливає рівність нулю всіх мінорів  $(r + 1)$ -го порядку цієї матриці.

Ми приходимо до такого *правила обчислення рангу матриці облямуванням мінорів*: при обчисленні рангу матриці потрібно переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків; якщо уже знайдено мінор  $k$ -го порядку  $M$ , відмінний від нуля, то вимагають обчислення лише ті мінори  $(k + 1)$ -го порядку, які облямовують мінор  $M$  — якщо всі вони рівні нулю, то ранг матриці дорівнює  $k$ .

**Приклад.** 1. Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Міnor другого порядку, який стоїть у верхньому лівому куті цієї матриці дорівнює нулю. Проте у матриці містяться й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Міnor третього порядку

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

який облямовує міnor  $M$ , відмінний від нуля,  $M' = 1$ . Проте обидва мінори четвертого порядку, які облямовують міnor  $M'$ , дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже,  $\text{rk } A = 3$ .

2. Знайдемо максимальну лінійно незалежну підсистему у системі векторів

$$\vec{a}_1 = (2, -2, -4), \quad \vec{a}_2 = (1, 9, 3), \quad \vec{a}_3 = (-2, -4, 1), \quad \vec{a}_4 = (3, 7, -1).$$

Запишемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

для якої дані вектори є стовпчиками. Ранг цієї матриці дорівнює 2: міnor другого порядку, який розміщений у верхньому лівому куті, відмінний від нуля, але обидва мінори третього порядку, що його облямовують, дорівнюють нулю. Звідси випливає, що вектори  $\vec{a}_1$  та  $\vec{a}_2$  утворюють у заданій системі одну із максимальних лінійно незалежних підсистем.

### 5.3. Інваріантність рангу матриці стосовно елементарних перетворень

**Теорема 5.7** (про інваріантність рангу стосовно елементарних перетворень). *Ранг матриці, отриманої із даної елементарними перетвореннями, дорівнює рангу даної матриці.*

Інколи коротко кажуть: *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці або ранг матриці інваріантний стосовно елементарних перетворень.*

*Доведення.* Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Спочатку покажемо, що елементарні перетворення першого типу не змінюють ранг матриці. Нехай матриця

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

отримана із матриці  $A$  домноженням  $j$ -го стовпчика на число  $\lambda \neq 0$ . Мінори матриці  $B$ , що не містять елементів  $j$ -го стовпчика, співпадають із відповідними мінорами матриці  $A$ , а ті, що містять елементи  $j$ -го стовпчика, дорівнюють відповідним мінорами матриці  $A$ , помноженим на  $\lambda$ . Оскільки  $\lambda \neq 0$ , то мінори матриці  $B$  дорівнюють нулю або відмінні від

нуля разом із відповідними мінорами матриці  $A$ . Як наслідок, отримуємо, що ранг матриці  $B$  дорівнює рангу матриці  $A$ .

Тепер покажемо, що перетворення другого типу не змінюють ранг матриці. Розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} + \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка отримана із матриці  $A$  додаванням до  $i$ -го стовпчика  $j$ -го стовпчика ( $i \neq j$ ), помноженого на скаляр  $\lambda$ .

Нехай  $\text{rk } A = r$ , тобто серед мінорів порядку  $r$  матриці  $A$  є хоча б один відмінний від нуля, а всі мінори порядку  $r + 1$  дорівнюють нулю.

Спочатку покажемо, що серед мінорів порядку  $r$  матриці  $C$  також є хоча б один, відмінний від нуля. Можливі такі випадки.

1. Серед мінорів порядку  $r$  матриці  $A$ , що не містять елементів  $i$ -го стовпчика, є мінор  $M$ , відмінний від нуля. Оскільки матриця  $C$  відрізняється від матриці  $A$  тільки  $i$ -им стовпчиком, то мінор  $M$  є мінором й матриці  $C$ . Як наслідок, у матриці  $C$  є мінор порядку  $r$ , відмінний від нуля.

2. Всі мінори порядку  $r$  матриці  $A$ , що не містять елементів  $i$ -го стовпчика (якщо такі існують), дорівнюють нулю. Тоді у матриці  $A$  є мінор  $M$ , який відмінний від нуля і який містить елементи  $i$ -го стовпчика. Розглянемо мінор  $M_1$  матриці  $C$ , розташований у матриці  $C$  так само, як мінор  $M$  у матриці  $A$ . Оскільки елементи  $i$ -го стовпчика матриці  $C$  є сумою двох складових, то  $M_1 = M + M_2$ . Мінор  $M_2 = 0$ . Дійсно, якщо елементи  $j$ -го стовпчика містяться у мінорі  $M_1$ , то мінор  $M_2$  дорівнює має два пропорційні стовпчики, а тому дорівнює нулю. Якщо ж елементи  $j$ -го стовпчика не входять у мінор  $M_1$ , то мінор  $M_2$  дорівнює нулю, оскільки є домноженим на  $\lambda$  мінором матриці  $A$  (можливо із переставленими стовпчиками), що не містить елементів  $j$ -го стовпчика матриці  $A$ .

Отже, в будь-якому випадку  $M_1 = M$  і, як наслідок, матриця  $C$  має мінор порядку  $r$ , відмінний від нуля.

Аналогічно можна довести, що усі мінори порядку  $(r + 1)$  матриці  $C$  дорівнюють нулю.

Отже, матриця  $C$  має ранг  $r$ , рівний рангу матриці  $A$ .

Щоб показати, перетворення третього типу не змінюють ранг матриці, необхідно застосувати комбінації перших двох перетворень, а тому й у цьому випадку теорема правильна.

Отже, жодні з трьох типів елементарних перетворень не змінюють рангу матриці, що потрібно було довести.  $\square$

Дану теорему зручно використати при ще одному практичному способі обчислення рангу матриці. Для цього за допомогою елементарних перетворень дану матрицю зводять до матриці, ранг якої легко обчислюється.

Як нам уже відомо, будь-яка ненульова матриця  $A$  за допомогою елементарних перетворень може бути зведена до східчастого, або, що нам більше підходить, трапецієвидного вигляду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

де усі елементи  $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$  відмінні від нуля. Викреслимо в матриці  $B$  рядки, всі елементи яких рівні нулю. Ранг отриманої матриці, яка містить  $r$  рядків, дорівнює  $r$ , оскільки

мінор

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

що стоїть у верхньому лівому куті, відмінний від нуля. Отже, й ранг матриці  $B$  дорівнює  $r$ . А оскільки матриця  $B$  отримана з матриці  $A$  за допомогою елементарних перетворень, то й ранг матриці  $A$  дорівнює  $r$ .

Для практичності можемо сказати так: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків у східчастій матриці, до якої дана матриця зведена елементарними перетвореннями рядків (стовпчиків).

**Приклад.** Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Зведемо її до східчастого вигляду. Для цього спочатку до другого рядка додамо перший, помножений на  $(-3)$ , а до третього рядка — перший, домножений на  $(-5)$ ; потім від третього рядка віднімемо другий:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали східчасту матрицю, у якій два ненульові рядки. Тому її ранг дорівнює 2, а, отже, й  $\text{rk } A = 2$ .

**Зауваження 5.1.** Легко бачити, що будь-яку ненульову матрицю за допомогою елементарних перетворень можна звести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

який є одним із часткових випадків трапецієвидної матриці. Ранг цієї матриці дорівнює числу її одиниць.

**Теорема 5.8.** Якщо матрицю  $A$  домножити зліва або справа на невироджену матрицю  $B$ , то ранг отриманої матриці буде рівний рангу матриці  $A$ , тобто якщо  $\det B \neq 0$ , то

$$\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA) = \text{rk}(A).$$

*Доведення.* Оскільки довільна невироджена матриця може бути отримана із одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень лише над стовпчиками (твердження-наслідок 3.8), то множення матриці  $A$  справа на невироджену матрицю  $B$  рівносильне застосуванню елементарних перетворень над стовпчиками матриці  $A$  (твердження 3.3). Оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу матриці (теорема 5.7), то  $\text{rk}(AB) = \text{rk}(A)$ .

Аналогічно можна показати, що  $\text{rk}(BA) = \text{rk}(A)$ . □







У доведенні твердження 5.11 міститься спосіб знаходження розв'язків невизначеної системи лінійних рівнянь, який полягає в тому, що систему (5.2) заміняємо еквівалентною їй системою (5.4). Покажемо, що таким способом можна отримати будь-який розв'язок невизначеної системи. Дійсно, якщо  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — деякий розв'язок системи (5.3), то в якості значень для вільних невідомих беремо числа  $c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_n$ . Тоді числа  $c_1, c_2, \dots, c_r$  задовольнятимуть систему (5.5) і тому будуть тим єдиним розв'язком цієї системи, який обчислюється, наприклад, за правилом Крамера.

Все сказане вище об'єднується у вигляді такого *правила розв'язання довільної системи лінійних рівнянь*.

Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (5.2) і нехай основна матриця  $A$  цієї системи має ранг, рівний  $r$ . Виберемо в  $A$   $r$  лінійно незалежних рядків і залишимо в системі (5.2) лише ті рівняння, коефіцієнти яких увійшли у вибрані рядки. У цих рівняннях залишаємо у лівій частині ті  $r$  невідомих, визначник із коефіцієнтів біля яких відмінний від нуля, а решту невідомих оголошуємо вільними і переносимо у праву частину рівнянь. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення і обчислюючи значення решти невідомих, ми отримаємо всі розв'язки системи (5.2).

**Приклади.** 1. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

Знайдемо ранги її основної та розширеної матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_b = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{array} \right).$$

Отримаємо  $\text{rk } A = \text{rk } A_b = 3$ . Тому система сумісна. В якості ненульового мінора порядку 3 матриці  $A$  (а, отже, й матриці  $A_b$ ) візьмемо, наприклад, мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді початкова система лінійних рівнянь буде еквівалентною системі

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \end{cases}$$

в якій, як бачимо, число невідомих дорівнює рангу основної матриці цієї системи. Отже, система має єдиний розв'язок (який можна обчислити за методом Гаусса, або за правилом Крамера):  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 1$ .

2. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

Знайдемо ранги її основної та розширеної матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_b = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{array} \right).$$

Отримаємо  $\text{rk } A = \text{rk } A_b = 2$ . Тому система сумісна. В якості ненульового мінора порядку 2 візьмемо, наприклад, мінор

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$





Розглянемо вектор-розв'язки

$$C_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad C_{n-r} = \begin{pmatrix} d_{1,n-r} \\ d_{2,n-r} \\ \vdots \\ d_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Очевидно, що ці вектор-розв'язки лінійно незалежні, і для довільного вектор-розв'язку  $C$  маємо

$$C = c_{r+1}C_1 + c_{r+2}C_2 + \dots + c_n C_{n-r},$$

тобто вектор-розв'язок (5.9) є лінійною комбінацією вектор-розв'язків

$$C_1, C_2, \dots, C_{n-r},$$

що й потрібно було показати.  $\square$

Фундаментальну систему розв'язків вигляду (5.10) часто називають *нормованою фундаментальною системою розв'язків системи* (5.6).

**Приклад.** Знайдемо фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Складемо матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що ранг матриці дорівнює 2. Тому  $n-r = 5-2 = 3$ , фундаментальна система розв'язків складається з трьох розв'язків.

Знайдемо головні невідомі (наприклад,  $x_2, x_3$ ) системи. З другого рядка східчастої матриці отримаємо

$$x_3 = 5x_4 - x_5; \quad (5.12)$$

з першого рядка цієї самої матриці (зважаючи на співвідношення (5.12)) знайдемо

$$x_2 = 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2x_1 + 3(5x_4 - x_5) - 2x_4 + 4x_5 = 2x_1 + 13x_4 + x_5. \quad (5.13)$$

Шукаємо перший базовий розв'язок  $C_1$ . Для цього у співвідношення (5.12) та (5.13) приймемо  $x_1 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ , звідки отримаємо  $x_2 = 2, x_3 = 0$ . Тому

$$C_1 = (1, 2, 0, 0, 0).$$

Прийнявши у рівностях (5.12) та (5.13)  $x_1 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ , аналогічно знаходимо  $x_2 = 13, x_3 = 5$ , тобто другим базовим розв'язком є вектор

$$C_2 = (0, 13, 5, 1, 0).$$

Зрештою, прийнявши  $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$ , знаходимо  $x_2 = 1, x_3 = -1$ . Тому третім базовим розв'язком є вектор

$$C_3 = (0, 1, -1, 0, 1).$$

Отже, фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (5.11) отримано. Для наочності її можна записати у вигляді таблиці

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$C_1$	1	2	0	0	0
$C_2$	0	13	5	1	0
$C_3$	0	1	-1	0	1



**Приклад.** Розв'яжемо неоднорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20. \end{cases} \quad (5.16)$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок зведеної до неї однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Легко бачити, що ця система має нетривіальний розв'язок, оскільки  $4 = n > m = 3$ . Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Віднімаючи від другого рядка перший, а від третього подвоєний другий, отримуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

з двома однаковими рядками. Очевидно, що  $r = \text{rk } A = 2$ . Вихідна система (5.17) рівносильна системі із двох рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Число вільних змінних  $s = n - r = 2$ . Змінні  $x_3$  і  $x_4$  можна прийняти за вільні;  $x_1$  і  $x_2$  через них виражаються:

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4, \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4.$$

Знайдемо нормовану фундаментальну систему розв'язків. Поклавши  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 0$ , отримаємо  $x_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . Поклавши  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$ , отримаємо  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ . Таким чином, нормованою фундаментальною системою розв'язків є

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а тому загальний розв'язок системи (5.17) має вигляд

$$c_1 C_1 + c_2 C_2 = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок вихідної неоднорідної системи (5.16). Оскільки

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

то система (5.16) рівносильна системі

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Поклавши тут  $x_3 = x_4 = 0$ , знайдемо  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 2$ . Отож, ми знайшли частковий розв'язок

$$C_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальним розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь (5.16) є

$$C = C_0 + c_1 C_1 + c_2 C_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$