

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ ВІЛЕТ*теорія*

[1] Що таке **власний вектор** та **власне значення** лінійного оператора? Наведіть приклади. Що таке **характеристичний поліном лінійного оператора**? Як змінюється характеристичний поліном лінійного оператора при переході до іншої бази? Відповідь обґрунтуйте доведенням. (7 балів)

[2] Що таке **унітарний простір**? Наведіть приклади. Чим відрізняється унітарний простір від евклідового? Сформулюйте та доведіть **нерівність трикутника** для унітарного простору. Сформулюйте та доведіть **теорему про ортогоналізацію** для унітарного простору. (11 балів)

[3] Що таке **індекси інерції** та **сигнатура**? Наведіть приклади. Сформулюйте та доведіть **закон інерції**. (7 балів)

практика

[1] З лінійного простору видалили деякий вектор. Чи може отримана після цього видалення множина векторів залишатися лінійним простором? (4 балів)

[2] Довести, що простір \mathbb{R}^n є прямою сумою двох лінійних підпросторів: U_1 , заданого рівнянням $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, і U_2 , заданого системою рівнянь $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. (6 балів)

[3] За допомогою процесу ортогоналізації побудувати ортогональну базу лінійної оболонки системи векторів

$$a_1 = (2; 1; -i), \quad a_2 = (1 - i; 2; 0), \quad a_3 = (-i; 0; 1 - i)$$

унітарного простору. (5 балів)

[4] Знайти перетворення, яке приводить квадратичну форму

$$q(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

до нормального вигляду. (6 балів)

[5] Доведіть, що для унітарного оператора всі власні значення за модулем дорівнюють 1. (4 балів)