

4. Ланцюгові дроби

4.1. Скінченні ланцюгові дроби

Раціональні числа можна зображувати у вигляді звичайних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in \mathbb{Z}$ і $b \in \mathbb{N}$, або у вигляді періодичних дробів. У різних способів зображення є свої переваги й недоліки. Так, наприклад, зображення раціонального числа у вигляді періодичного дробу залежить не тільки від самого числа, а ще й від основи системи числення, а зображення у вигляді звичайного дробу не є однозначним (дроби $\frac{4}{6}$ і $\frac{6}{9}$ зображують одне й те ж раціональне число). Ми розглянемо ще один спосіб зображення раціональних чисел у вигляді так званих неперервних або ланцюгових дробів, причому звернемо увагу як на переваги, так і на недоліки цього способу.

Нагадаємо послідовність рівностей, які з'являються, коли за допомогою алгоритму Евкліда шукають найбільший спільний дільник чисел a і b (див. параграф 2.7):

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

де $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$, $q_1 \geq 1, \dots, q_{n-1} \geq 1$ і $q_n > 1$. Перепишемо ці рівності в рівносильному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b}, \\ \frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1}, \\ \frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{r_3}{r_2}, \\ &\dots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}, \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Кожна з рівностей (4.2) описує просту процедуру: виділення цілої частини з неправильного дробу, оскільки $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$. Використовуючи ці рівності, можна виразити число $\frac{a}{b}$ через числа q_0, q_1, \dots, q_n :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_2}{q_1 + \frac{r_1}{r_2}}} =$$

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \dots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n}}} . \quad (4.3)$$

Останній із виразів у рівностях (4.3) називається (*скінченим*) *ланцюговим дробом*. Ціле число q_0 і натуральні числа $q_1, \dots, q_n, q_n \neq 1$, називають елементами ланцюгового дробу або його *неповними частками*. З метою скорочення запису ланцюговий дріб символічно записують у вигляді $[q_0; q_1, \dots, q_n]$; крапка з комою після q_0 підкреслює значення q_0 як цілої частини дробу.

Таким чином, з алгоритму Евкліда випливає можливістьображення довільного раціонального числа у вигляді ланцюгового дробу, а рівності (4.2) фактично дають це зображення. Виникає природне питання про єдиність такого зображення. Бачимо, що $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, тобто $[0; 2] = [0; 1, 1]$. Більше того, якщо $q_n \neq 1$, то $[q_0; q_1, \dots, q_n] = [q_0; q_1, \dots, q_n - 1, 1]$. Але природа зазначених неоднозначностей запису числа у вигляді ланцюгового дробу того ж роду, що і неоднозначність типу $1 = 0,999\dots$ при записі чисел у вигляді десяткових дробів. У випадку десяткових дробів неоднозначності уникають за допомогою домовленості не розглядати записи, в яких, починаючи з певного місця, йдуть лише дев'ятки. У випадку ланцюгових дробів неоднозначності можна уникнути, якщо в означенні ланцюгового дробу додатково вимагати виконання умови $q_n \neq 1$ (з рівностей (4.1) випливає, що це завжди можливо). Справді, має місце

Теорема 4.1. *Кожне раціональне число можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$, $q_n \neq 1$, причому таке зображення єдине.*

Доведення. Існування такого зображення випливає з алгоритму Евкліда і рівностей (4.1). Для доведення однозначності зображення раціонального числа a/b ланцюговим дробом $[q_0; q_1, \dots, q_n]$, $q_n \neq 1$, перепишемо рівність (4.3) у вигляді $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, \dots, q_n]}$. Оскільки

$[q_1; q_2, \dots, q_n] > 1$, то $0 < \frac{1}{[q_1; q_2, \dots, q_n]} < 1$ і q_0 є цілою частиною числа a/b . Отже, неповна частка q_0 ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$, $q_n \neq 1$, визначена єдиним чином. Але тоді однозначно визначається й число $[q_1; q_2, \dots, q_n] = \frac{1}{(a/b) - q_0}$. Продовжуючи аналогічні міркування далі, доводимо однозначність неповних часток q_1, q_2, \dots, q_n . \square

Із кожним ланцюговим дробом $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ природним чином по-в'язується набір чисел $[q_0], [q_0; q_1], [q_0; q_1, q_2], \dots, [q_0; q_1, \dots, q_n]$. Запиши-мо останні у вигляді звичайних дробів:

$$\begin{aligned} [q_0] &= q_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}, \quad [q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1}, \\ [q_0; q_1, q_2] &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{(q_0 q_1 + 1)q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_2}{Q_2}, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Дріб $\frac{P_k}{Q_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, називатимемо k -им раціональним вкороченням (або k -им підхідним дробом) ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$.

Дуже простий рекурентний метод обчислення раціональних вкорочень ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ дає наступна

Теорема 4.2. Чисельники і знаменники раціональних вкорочень $\frac{P_k}{Q_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ задовільняють такі ре-курентні спiввiдношення:

$$\begin{aligned} P_0 &= q_0, \quad P_1 = q_1 P_0 + 1, \quad P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad \text{для } 1 < k \leq n; \\ Q_0 &= 1, \quad Q_1 = q_1, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad \text{для } 1 < k \leq n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Для $k = 0$ і $k = 1$ твердження безпосередньо випливає з рівностей (4.4). Припустимо, що

для k -го раціонального вкорочення P_k/Q_k твердження вже доведене, і розглянемо $(k+1)$ -е раціональне вкорочення

$$[q_0; q_1, \dots, q_{k+1}] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\dots}{\cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}}.$$

З цієї рівності видно, що число $[q_0; q_1, \dots, q_{k+1}]$ одержується з числа $[q_0; q_1, \dots, q_k]$ заміною величини q_k на величину $q_k + 1/q_{k+1}$. Числа P_{k-1} , P_{k-2} , Q_{k-1} , Q_{k-2} залежать лише від q_0, q_1, \dots, q_{k-1} і не залежать від q_k . Тому після заміни у виразі $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$ числа q_k на $q_k + 1/q_{k+1}$ матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} &= \frac{(q_k + 1/q_{k+1})P_{k-1} + P_{k-2}}{(q_k + 1/q_{k+1})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2} + (P_{k-1}/q_{k+1})}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} + (Q_{k-1}/q_{k+1})} = \\ &= \frac{P_k + (P_{k-1}/q_{k+1})}{Q_k + (Q_{k-1}/q_{k+1})} = \frac{q_{k+1}P_k + P_{k-1}}{q_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}. \end{aligned}$$

Отже, числа P_{k+1} і Q_{k+1} також задовольняють співвідношення (4.5). Тому ці співвідношення виконуються для всіх $k < n$. \square

Результати обчислень чисельників і знаменників раціональних вкорочень ланцюгового дробу за формулами (4.5) зручно записувати в таблицю

k	—	—	0	1	...	n
q_k	—	—	q_0	q_1	...	q_n
P_k	0	1	q_0	$q_1 P_0 + 1$...	$q_n P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	1	0	1	q_1	...	$q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$

(4.6)

Результати обчислень займають два нижніх рядки цієї таблиці, причому два перших стовпчики відіграють допоміжну роль і заповнюються завжди однаково. Решта клітинок заповнюється зліва направо з використанням рівностей (4.5) (кожного разу використовується вміст двох клітинок зліва від даної і значення неповної частки, що стоїть над даним клітинкою).

Задача 4.1. Записати число $\frac{677}{263}$ у вигляді ланцюгового дробу і знайти всі раціональні вкорочення цього дробу.

Розв'язання. Застосовуючи алгоритм Евкліда, одержуємо: $677 = 263 \cdot 2 + 151$, $263 = 151 \cdot 1 + 112$, $151 = 112 \cdot 1 + 39$, $112 = 39 \cdot 2 + 34$, $39 = 34 \cdot 1 + 5$, $34 = 5 \cdot 6 + 4$, $5 = 4 \cdot 1 + 1$, $4 = 1 \cdot 4$. Тому маємо такі неповні частки: $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 1$, $q_5 = 6$, $q_6 = 1$, $q_7 = 4$, тобто $\frac{677}{263} = [2; 1, 1, 2, 1, 6, 1, 4]$. Для знаходження раціональних вкорочень заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2	3	4	5	6	7
q_k	—	—	2	1	1	2	1	6	1	4
P_k	0	1	2	3	5	13	18	121	139	677
Q_k	1	0	1	1	2	5	7	47	54	263

Отже, $\frac{P_0}{Q_0} = 2$, $\frac{P_1}{Q_1} = 3$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{13}{5}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{18}{7}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{121}{47}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{139}{54}$, $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{677}{263}$. \square

Задача 4.2. Записати ланцюговий дріб $[0; 4, 2, 4, 1, 1, 6]$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2	3	4	5	6
q_k	—	—	0	4	2	4	1	1	6
P_k	0	1	0	1	2	9	11	20	131
Q_k	1	0	1	4	9	40	49	89	583

Отже, даний ланцюговий дріб дорівнює $\frac{131}{583}$. \square

Тепер встановимо ряд важливих властивостей раціональних вкорочень ланцюгових дробів.

Твердження 4.1. Для довільного номера $k \geq 0$ знаменники Q_k і Q_{k+1} двох послідовних раціональних вкорочень ланцюгового дробу є взаємно простими.

Доведення. Це очевидно для $k = 0$, бо $Q_0 = 1$. А з рівності $Q_{k+2} = q_{k+2}Q_{k+1} + Q_k$ випливає, що $\text{НСД}(Q_k, Q_{k+1}) = \text{НСД}(Q_{k+1}, Q_{k+2})$. Отже, якщо Q_k і Q_{k+1} — взаємно прості, то Q_{k+1} і Q_{k+2} — також взаємно прості. \square

Твердження 4.2. Для $k = 1, 2, \dots, n$ виконується рівність

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}. \quad (4.7)$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Для $k = 1$ маємо: $P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = (q_1 q_0 + 1) \cdot 1 - q_0 q_1 = 1$, тобто рівність (4.7) виконується. Припустимо, що для числа k , $1 \leq k < n$, рівність (4.7) вже доведена. Тоді $P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (q_{k+1} P_k + P_{k-1}) Q_k - P_k (q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}) = P_{k-1} Q_k - P_k Q_{k-1} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k$, тобто рівність (4.7) виконується і для числа $k + 1$. \square

Наслідок 1. Усі раціональні вкорочення ланцюгового дробу є нескоротними дробами, тобто $\text{НСД}(P_k, Q_k) = 1$ для всіх k , $0 \leq k \leq n$.

Доведення. Для $k = 0$ маємо $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$, так що $\text{НСД}(P_0, Q_0) = 1$. Нехай $k > 0$. Позначимо $d = \text{НСД}(P_k, Q_k)$. Оскільки $d | P_k$ і $d | Q_k$, то $d | (P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k)$, тобто $d | (-1)^{k-1}$. Тому $d = 1$. \square

Наслідок 2. a) Для всіх k , $1 \leq k \leq n$, виконується рівність

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}.$$

b) Для всіх k , $2 \leq k \leq n$, виконується рівність

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^{k-1} q_k}{Q_k Q_{k-2}}.$$

Доведення. Твердження a) очевидне. Доведемо b):

$$\begin{aligned} \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{P_{k-2} Q_k - P_k Q_{k-2}}{Q_k Q_{k-2}} = \\ &= \frac{P_{k-2} (q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) - Q_{k-2} (q_k P_{k-1} + P_{k-2})}{Q_k Q_{k-2}} = \\ &= \frac{q_k (P_{k-2} Q_{k-1} - P_{k-1} Q_{k-2})}{Q_k Q_{k-2}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-2}}. \end{aligned}$$

\square

Раніше, у параграфі 2.8, уже детально обговорювалось питання існування цілих розв'язків лінійного діофантового рівняння. Твердження 4.2 і наслідок 2b) дають зручний для практичного використання метод знаходження всіх розв'язків такого рівняння.

Наслідок 3. *Нехай $ax+by = c$ – лінійне діофантове рівняння із взаємно простими коефіцієнтами a і b , а $a/b = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ – зображення числа a/b у вигляді ланцюгового дробу. Тоді всі цілі розв'язки рівняння $ax+by = c$ описуються рівностями*

$$x = (-1)^{n-1}Q_{n-1}c - bt, \quad y = (-1)^n P_{n-1}c + at, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.12 всі цілі розв'язки рівняння $ax+by = c$ описуються рівностями $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, де (x_0, y_0) – довільний частковий розв'язок. Тому досить довести, що пара $((-1)^{n-1}Q_{n-1}c, (-1)^n P_{n-1}c)$ є частковим розв'язком рівняння $ax+by = c$. Оскільки $(a, b) = 1$ і $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$, то, згідно з наслідком 1, $P_n = a$, $Q_n = b$. Із рівності (4.7) тепер випливає:

$$\begin{aligned} a(-1)^{n-1}Q_{n-1}c + b(-1)^n P_{n-1}c &= c(a(-1)^{n-1}Q_{n-1} + b(-1)^n P_{n-1}) = \\ &= (-1)^{n-1}c(P_n Q_{n-1}) - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}c(-1)^{n-1} = c, \end{aligned}$$

що й треба було довести. \square

Зauważення. Якщо a і b не взаємно прості, то, згідно з теоремою 1.11, рівняння $ax+by = c$ має цілі розв'язки тоді й лише тоді, коли c ділиться на НСД(a, b). Якщо ця умова виконується, то після ділення на НСД(a, b) переходимо до рівняння, що задовільняє умову наслідку 3. Отже, в цьому випадку цілі розв'язки рівняння $ax+by = c$ описуються рівностями

$$x = (-1)^{n-1}Q_{n-1}c_0 - b_0t, \quad y = (-1)^n P_{n-1}c_0 + a_0t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

де $a_0 = a/\text{НСД}(a, b)$, $b_0 = b/\text{НСД}(a, b)$, $c_0 = c/\text{НСД}(a, b)$.

Задача 4.3. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $119x - 68y = 34$.

Розв'язання. За алгоритмом Евкліда знаходимо: $119 = 68 \cdot 1 + 51$, $68 = 51 \cdot 1 + 17$, $51 = 17 \cdot 3$. Отже, $119/68 = [1; 1, 3]$ і $\text{НСД}(119, 68) = 17$.

Позаяк $17|34$, то дане рівняння має цілі розв'язки. Щоб скористатись рівностями (4.9), заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2
q_k	—	—	1	1	3
P_k	0	1	1	2	7
Q_k	1	0	1	1	4

Таким чином, цілі розв'язки рівняння $119x - 68y = 34$ мають вигляд $x = (-1)^1 \cdot 1 \cdot 2 + 4t = -2 + 4t$, $y = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 2 + 7t = -4 + 7t$, $t \in \mathbb{Z}$. \square

Для непарного номера k раціональне вкорочення P_k/Q_k будемо для зручності називати *непарним*, а для парного — відповідно *парним*.

Теорема 4.3. *Нехай $a/b = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ — зображення раціонального числа a/b у вигляді ланцюгового дробу. Тоді:*

- (a) *парні раціональні вкорочення $P_0/Q_0, P_2/Q_2, \dots$ цього дробу утворюють зростаючу, а непарні $P_1/Q_1, P_3/Q_3, \dots$ — спадну послідовність;*
- (b) *для номерів, менших за n , всі парні раціональні вкорочення менші за a/b , а всі непарні — більші за a/b ;*
- (c) *коєсне парне раціональне вкорочення менше за будь-яке непарне;*
- (d) *для всіх k , $0 < k < n$, виконується нерівність*

$$\left| \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| > \left| \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right|.$$

Доведення. (a) Оскільки всі неповні частки ланцюгового дробу (за винятком, можливо, q_0) додатні, то з наслідку 2(b) для парного k отримуємо нерівність $P_k/Q_k > P_{k-2}/Q_{k-2}$, а для непарного k — нерівність $P_k/Q_k < P_{k-2}/Q_{k-2}$.

(b) Якщо n — парне, то на підставі пункту (a) маємо: $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots < \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$, $\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \dots > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Але за наслідком 2(a) $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > 0$, тому $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$. Для непарного n

маємо відповідно $\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \dots > \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$, $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$,
 $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} < 0$ і $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$.

(c) Безпосередньо випливає з пункту (b).

(d) Покажемо спочатку, що знаменники раціональних вкорочень утворюють зростаючу послідовність, точніше, що

$$Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < \dots < Q_n. \quad (4.10)$$

Справді, $Q_0 \leq Q_1$, бо $Q_0 = 1$, а $Q_1 = q_1 \geq 1$. А далі з рівності $Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ (теорема 4.2) і додатності неповних часток q_k , $k > 0$, випливає, що всі знаменники Q_k додатні і $Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} > Q_{k-1}$ для $k > 1$.

Потрібна нерівність тепер відразу випливає з наслідку 2(a):

$$\left| \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \frac{1}{Q_{k-1} Q_k} > \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} = \left| \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right|. \quad \square$$

З останньої теореми одержуємо такий ланцюжок нерівностей:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots < \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b} < \dots < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}. \quad (4.11)$$

Тепер у нас є все необхідне для доведення твердження, яке відіграє дуже важливу роль у теорії наближень чисел.

Теорема 4.4. *Нехай P_k/Q_k є k -м раціональним вкороченням ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$, яким зображене раціональне число a/b . Тоді*

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leq \frac{1}{Q_k^2}. \quad (4.12)$$

Доведення. Друга нерівність випливає з нерівностей (4.10), тому доводити треба лише першу. Якщо k — парне, то з нерівностей (4.11) маємо:
 $\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b} < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, звідки $\left| \frac{a}{b} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \left| \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$
(на останньому кроці використали наслідок 2(a)). Випадок непарного k розглядається аналогічно. \square

Теорія ланцюгових дробів, творцем якої був Христіан Гюйгенс, історично виникла з потреби наближеного зображення дробів з великими

чисельниками і знаменниками дробами з маленькими чисельниками і знаменниками й оцінки похибки такого наближення. Така потреба виникає в багатьох практичних задачах. Розглянемо один приклад.

Задача 4.4. Потрібно сполучити два вали з зубчатими колесами так, щоб відношення кутових швидкостей валів дорівнювало $587/113$ (нагадаємо, що кутові швидкості коліс обернено пропорційні кількості зубців на них, тому відношення кількості зубців на другому колесі до кількості зубців на першому також має дорівнювати $587/113$). Чи можна так підібрати колеса з меншою кількістю зубців, щоб нове відношення кутових швидкостей відрізнялося від потрібного менше ніж на $0,001$?

Розв'язання. Будемо шукати нове відношення кількостей зубців на колесах серед раціональних вкорочень ланцюгового дробу, яким зображується число $587/113$. Маємо: $587 = 113 \cdot 5 + 22$, $113 = 22 \cdot 5 + 3$, $22 = 3 \cdot 7 + 1$, $3 = 3 \cdot 1$, звідки $587/113 = [5; 7, 3]$. Заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2	3
q_k	—	—	5	5	7	3
P_k	0	1	5	26	187	587
Q_k	1	0	1	5	36	113

Перше раціональне вкорочення $P_1/Q_1 = 26/5$ нас не влаштовує, бо $26/5 - 587/113 = 3/565 > 0,001$ (зауважимо, однак, що навіть для такого грубого наближення похибка виходить відносно маленька). Для другого раціонального вкорочення $P_2/Q_2 = 187/36$ теорема 4.4 дає $|587/113 - 187/36| < 1/Q_2 Q_3 = 1/(36 \cdot 113) = 1/4068 < 0,001$, тобто похибка стала меншою за допустиму. Таким чином, вали можна з'єднати колесами із суттєво меншою кількістю зубців. Зокрема, таке з'єднання буде значно надійнішим із технічного погляду, бо зубці можна зробити крупнішими. \square

Зауважимо, що якби ми шукали потрібне наближення до числа $587/113$ за допомогою десяткових дробів, то довелося б розглядати принаймні 3 знаки після коми, тобто розглядати дроби із знаменником 1000. У такого наближення чисельник і знаменник були б ще більшими, ніж у початкового числа, і з технічного погляду таке наближення було б безглуздим. Отже, у певних питаннях, пов'язаних із наближенням чисел, ланцюгові дроби мають значні переваги над десятковими. Однак

в інших питаннях стають явними переваги десяткових (загальніше — систематичних) дробів. Наприклад, добре відомо, як зручно виконувати арифметичні дії з десятковими дробами. А хорошого правила для додавання двох ланцюгових дробів знайти так і не вдалося.

Інколи може бути корисним не рекурентний (як в теоремі 4.2), а запропонований Ойлером явний опис чисельників і знаменників раціональних вкорочень $\frac{P_k}{Q_k}$. Для цього опису зручно ввести наступне по-значення. Розглянемо всі одночлени, які можна одержати з одночлена $x_1x_2 \cdots x_n$, якщо викреслити якісь два сусідні множники. Потім розглянемо одночлени, які можна за допомогою аналогічної процедури одержати із одночленів, вже одержаних раніше, і т.д. Як звичайно, вважаємо, що добуток нульової кількості множників дорівнює 1. Суму всіх одержаних таким чином різних одночленів позначимо $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Наприклад, $S(x_1, x_2) = x_1x_2 + 1$, $S(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$, $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1$.

Теорема 4.5 (правило Ойлера). *Знаменник і чисельник k -го раціонального вкорочення $\frac{P_k}{Q_k}$ ланцюгового дробу $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ можна знайти за правилом $P_k = S(q_0, q_1, \dots, q_k)$, $Q_k = S(q_1, \dots, q_k)$. Зокрема,*

$$[q_0; q_1, \dots, q_n] = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{S(q_0, q_1, \dots, q_n)}{S(q_1, \dots, q_n)}.$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Твердження виконується для $k = 1$: $P_1 = q_0q_1 + 1 = S(q_0, q_1)$, $Q_1 = q_1 = S(q_1)$; і для $k = 2$: $P_2 = q_0q_1q_2 + q_2 + q_0 = S(q_0, q_1, q_2)$, $Q_2 = q_1q_2 + 1 = S(q_1, q_2)$. Припустимо тепер, що твердження теореми доведене для всіх ланцюгових дробів вигляду $[q_0; q_1, \dots, q_l]$, де $l \leq k - 1$. Із рекурентних співвідношень (4.5) маємо: $P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} = q_k S(q_0, \dots, q_{k-1}) + S(q_0, \dots, q_{k-2})$. Але $S(q_0, \dots, q_{k-2})$ дорівнює сумі всіх тих одночленів многочлена $S(q_0, q_1, \dots, q_k)$, у процесі одержання яких з одночлена $q_0q_1 \cdots q_k$ на одному з кроків викреслюється пара множників, одним з яких є q_k . Справді, будь-який одночлен многочлена $S(q_0, \dots, q_{k-2})$ одержується з одночлена $q_0q_1 \cdots q_{k-2}$, який у свою чергу одержується з $q_0q_1 \cdots q_k$ викреслюванням пари $q_{k-1}q_k$. Навпаки, нехай у процесі одержання з $q_0q_1 \cdots q_k$ одночленена f на якомусь кроці викреслили пару множників q_iq_k . Тоді множники q_{i+1}, \dots, q_{k-1} мають бути викреслені на по-передніх кроках, причому кожного разу, коли один із множників, що викреслюються, належить множині $\{q_{i+1}, \dots, q_{k-1}\}$, то й другий множник

належить цій множині. Зокрема, ця множина містить парну кількість елементів. Якщо тепер ми візьмемо одночлен $q_0q_1 \cdots q_k$ і викреслимо спочатку пари $q_{k-1}q_k, q_{k-3}q_{k-2}, \dots, q_iq_{i+1}$, а потім у їх природній послідовності ті пари множників, які використовувались при одерженні одночлена f , але не зачіпали множників із множини $\{q_i, q_{i+1}, \dots, q_k\}$, то знову одержимо одночлен f . Оскільки після першого викреслення одержується одночлен $q_0q_1 \cdots q_{k-2}$, то f є одним із одночленів многочлена $S(q_0, \dots, q_{k-2})$.

У той же час $q_k S(q_0, \dots, q_{k-1})$ дорівнює сумі всіх тих одночленів многочлена $S(q_0, q_1, \dots, q_k)$, при одерженні яких з одночлена $q_0q_1 \cdots q_k$ на кожному з кроків не викреслюється множник q_k . Справді, кожний одночлен многочлена $q_k S(q_0, \dots, q_{k-1})$ належить $S(q_0, q_1, \dots, q_k)$ і містить множник q_k , тому цей множник викреслюватися не міг. А з іншого боку, якщо одночлен f многочлена $S(q_0, q_1, \dots, q_k)$ містить множник q_k , то відповідні викреслювання зачіпають лише частину $q_0q_1 \cdots q_{k-1}$ одночлена $q_0q_1 \cdots q_{k-1}q_k$, а тому f є одним з одночленів добутку $q_k S(q_0, \dots, q_{k-1})$.

Таким чином, $P_k = S(q_0, q_1, \dots, q_k)$ і для чисельників P_k твердження теореми доведено.

Запишемо тепер у вигляді звичайного нескоротного дробу $\frac{P}{Q}$ ланцюговий дріб $[q_1; q_2, \dots, q_k]$. За припущенням індукції $P = S(q_1, \dots, q_k)$. Але з рівностей

$$\frac{P_k}{Q_k} = [q_0; q_1, \dots, q_k] = q_0 + \frac{1}{P/Q} = q_0 + \frac{Q}{P} = \frac{q_0P + Q}{P}$$

випливає, що $Q_k = P$. Отже, $Q_k = S(q_1, \dots, q_k)$, що й завершує доведення теореми. \square

Звісно, правило Ойлера для обчислення чисельників і знаменників раціональних вкорочень є громіздким і для конкретних підрахунків мало придатним. Однак є задачі, де це правило може виявитись дуже корисним. Наприклад, одне з найкоротших розв'язань наступної класичної задачі базується саме на правилі Ойлера.

Задача 4.5. *Довести, що кожне просте число вигляду $4s + 1$ можна подати як суму двох квадратів.*

Розв'язання. Нехай $p = 4s + 1$ – просте число. Розглянемо звичайні дроби $\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \dots, \frac{p}{2s}$. Усі вони більші за 2 і нескоротні. Зобразимо кожен з цих дробів у вигляді ланцюгового дробу. Нехай l – одне з чисел

$2, 3, \dots, 2s$. Тоді $\frac{p}{l} = [q_0; q_1, \dots, q_n] = \frac{P_n}{Q_n}$, де $q_0 \geq 2$, $n \geq 1$ і $q_n \geq 2$, бо дріб $\frac{p}{l}$ не є цілим числом. За теоремою 4.5 $p = P_n = S(q_0, q_1, \dots, q_n)$, $l = Q_n = S(q_1, \dots, q_n)$. Але з означення суми $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ одразу випливає, що $S(q_0, q_1, \dots, q_n) = S(q_n, q_{n-1}, \dots, q_0)$. Тому з рівностей

$$[q_n; q_{n-1}, \dots, q_0] = \frac{S(q_n, q_{n-1}, \dots, q_0)}{S(q_{n-1}, \dots, q_0)} = \frac{p}{S(q_{n-1}, \dots, q_0)}$$

матимемо, що число $r = S(q_{n-1}, \dots, q_0)$ теж є одним з чисел $2, 3, \dots, 2s$. Із ланцюгових зображень чисел $\frac{p}{l}$ і $\frac{p}{r}$ видно, що коли повторити попередні міркування для числа r , то ми прийдемо до числа l . Таким чином, числа $2, 3, \dots, 2s$ розбиваються на пари вигляду (l, r) . Але всього чисел $2s - 1$ — непарна кількість, тому є пара (l, r) , в якій $l = r$. Тоді для відповідного ланцюгового дробу $\frac{p}{l} = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ має бути $q_n = q_0$, $q_{n-1} = q_1$ і т.д. Далі можливі два випадки:

1) Число n — непарне, $n = 2m + 1$. Міркуючи, як і при доведенні теореми 4.5, отримуємо:

$$\begin{aligned} p &= S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2, q_1, q_0) = \\ &= q_0 S(q_0, \dots, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2, q_1) + S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2) = \\ &= q_0 (q_1 S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2) + S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_3)) + \\ &\quad + S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2) = \\ &= S(q_0, q_1) S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2) + S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_3) = \\ &\dots = S(q_0, \dots, q_m) S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}) + S(q_0, \dots, q_{m-1}) S(q_0, \dots, q_m) = \\ &= S(q_0, \dots, q_m) (S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}) + S(q_0, \dots, q_{m-1})). \end{aligned}$$

Отже, p розкладається в добуток двох множників, кожний з яких більший за 1. Позаяк це суперечить простоті числа p , то цей випадок неможливий.

2) Число n — парне, $n = 2m$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку, отримуємо:

$$\begin{aligned} p &= S(q_0, q_1, \dots, q_m, q_m, \dots, q_0) = \dots = S(q_0, q_1, \dots, q_m) S(q_0, q_1, \dots, q_m) + \\ &\quad + S(q_0, q_1, \dots, q_{m-1}) S(q_0, q_1, \dots, q_{m-1}) = P_m^2 + P_{m-1}^2. \end{aligned}$$

Отже, кожне просте число вигляду $4s + 1$ можна подати як суму двох квадратів. \square

4.2. Нескінченні ланцюгові дроби

У цьому параграфі ми поширимо апарат ланцюгових дробів на множину \mathbb{R} усіх дійсних чисел.

Нескінченними ланцюговими дробами будемо називати вирази вигляду

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{q_n + \cfrac{\ddots}{\ddots}}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, \dots], \quad (4.13)$$

де $q_0 \in \mathbb{Z}$ і $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots \in \mathbb{N}$.

Це означення поки що формальне. Щоб зробити його змістовним, розглянемо послідовність

$$\frac{P_0}{Q_0} = q_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \dots, \quad \frac{P_n}{Q_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{q_n}}}, \quad \dots \quad (4.14)$$

скінчених ланцюгових дробів. Називатимемо їх, як і раніше, *раціональними вкороченнями* дробу (4.13). За теоремою 4.3 із послідовності (4.14) можна виділити зростаючу підпослідовність

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \dots,$$

усі члени якої менші за $\frac{P_1}{Q_1}$. Оскільки кожна монотонна обмежена по-

слідовність має границю, то існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \alpha$.

Аналогічно з послідовності (4.14) можна виділити спадну підпослідовність

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \dots > \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} > \dots,$$

усі члени якої більші за $\frac{P_0}{Q_0}$. Тому також існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \beta$.

Разом з тим із теореми 4.3 випливає, що для довільного $k \geq 0$ виконую-

ться нерівності $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \alpha \leq \beta < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$, звідки $0 \leq \beta - \alpha < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$.

Але знаменники раціональних вкорочень утворюють монотонно зростаючу послідовність (див. співвідношення (4.10) із доведення теореми 4.3). Тому при $k \rightarrow \infty$ маємо $Q_k \rightarrow \infty$ і $\beta - \alpha \rightarrow 0$. Позаяк ні α , ні β від k не залежать, то $\beta - \alpha = 0$ і $\beta = \alpha$. Отже, для довільного нескінченного ланцюгового дробу (4.13) існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha$ його раціональних вкорочень, яку природно взяти за значення цього дробу (ми будемо також говорити, що дріб (4.10) задає число α).

Результати попередніх міркувань можна сформулювати у вигляді наступної теореми:

Теорема 4.6. *Кожний нескінчений ланцюговий дріб (4.10) задає деяке дійсне число α , яке визначається як $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{Q_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [q_0; q_1, \dots, q_k]$. При цьому для довільного $k \geq 0$*

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \alpha < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} \quad i \quad \left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^2}. \quad (4.15)$$

Розглянемо тепер зворотну задачу: чи для кожного дійсного числа існує — скінчений або нескінчений — ланцюговий дріб, який задає це число? Якщо такий дріб існує, то чи єдиний він? І як такий дріб можна знайти?

Теорема 4.7. *Для довільного дійсного числа α існує один і тільки один ланцюговий дріб, який задає це число.*

Доведення. Спочатку доведемо існування дробу. У попередньому параграфі (теорема 4.1) доведено, що кожне раціональне число можна задати деяким скінченим ланцюговим дробом. Нехай тепер число α — ірраціональне. Позначимо: $q_0 = [\alpha]$, $\alpha_1 = \{\alpha\}^{-1}$ (позаяк α — ірраціональне, то $q_0 \neq \alpha$ і $\{\alpha\} \neq 0$). Тоді $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, число α_1 — ірраціональне і $\alpha_1 > 1$. Потім знаходимо таке ціле число $q_1 = [\alpha_1]$ і ірраціональне

$\alpha_2 > 1$, що $\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$. Продовжуючи аналогічно, отримуємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad q_0 = [\alpha], \\ \alpha_1 &= q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad q_1 = [\alpha_1], \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_n &= q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \quad q_n = [\alpha_n], \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{4.16}$$

де для всіх $n \geq 1$ число α_n (його часто називають n -тою повною частиною) — ірраціональне і більше 1. Тому $q_n = [\alpha_n] \geq 1$ для всіх $n \geq 1$. Числа q_0, q_1, \dots визначають нескінчений ланцюговий дріб $[q_0; q_1, \dots]$, який, згідно з попередньою теоремою, задає дійсне число $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$, де $\frac{P_n}{Q_n} = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ — n -те раціональне вкорочення цього дробу.

Справді, з (4.16) випливає, що $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}$. Ви-

дно, що коли в $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + q_n + \frac{1}{q_{n+1}}}$ замінити q_{n+1} на α_{n+1} , то отримаємо α . Але згідно з теоремою 4.2 $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{q_{n+1}P_n + P_{n-1}}{q_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}$, де числа $P_n, P_{n-1}, Q_n, Q_{n-1}$ не залежать від q_{n+1} . Тому, замінивши в останній рівності q_{n+1} на α_{n+1} , отримаємо

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}P_n + P_{n-1}}{\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}. \tag{4.17}$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma| &= \left| \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}P_n + P_{n-1}}{\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_nP_{n-1} - P_nQ_{n+1}}{Q_n(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q_n(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})} \end{aligned}$$

(на останньому кроці ми скористалися твердженням 4.2). Але послідовність натуральних чисел Q_n монотонно зростає (нерівність (4.10) із доведення теореми 4.3) і $\alpha_n > 1$ для всіх $n \geq 1$. Тому $Q_n(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1}) \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q_n(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})} = 0$ і $\alpha = \gamma$.

Доведемо тепер однозначність зображення дійсного числа у вигляді ланцюгового дробу. Нехай кожен із ланцюгових дробів $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ і $[r_0; r_1, r_2, \dots]$ задає число α . Якщо обидва дроби скінченні, то за теоремою 4.1 вони збігаються. Нехай тепер дріб $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ — нескінчений і припустимо, що існує таке n , що $q_0 = r_0, \dots, q_{n-1} = r_{n-1}$, але $q_n \neq r_n$.

Позначимо $\alpha_n = q_n + \frac{1}{q_{n+1} + \dots}$, $\gamma_n = r_n + \frac{1}{r_{n+1} + \dots}$. Тоді з

рівностей

$$\begin{aligned} \alpha &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots} = r_0 + \frac{1}{r_1 + \dots} = \\ &\quad + q_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n} \quad + r_{n-1} + \frac{1}{\gamma_n} \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots} \\ &\quad + q_{n-1} + \frac{1}{\gamma_n} \end{aligned}$$

випливає рівність $\alpha_n = \gamma_n$, а отже, і рівність $[\alpha_n] = [\gamma_n]$, тобто $q_n = r_n$, що суперечить припущення. Однозначність доведено. \square

Таким чином, кожному дійсному числу відповідає єдиний ланцюговий дріб і кожний ланцюговий дріб задає деяке число. При цьому раціональні числа, і тільки вони, зображуються скінченними ланцюговими дробами.

Доведення теореми 4.7 має конструктивний характер, тобто не тільки встановлюється сам факт існування зображення дійсного числа у вигляді ланцюгового дробу, а й дається метод знаходження всіх елементів цього дробу. Проілюструємо цей метод на прикладі.

Задача 4.6. Зобразити число $\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу і замінити дріб його раціональним вкороченням із похибкою, не більшою за 0,0001.

Розв'язання. Дріб $[q_0; q_1, q_2, \dots]$, який задає число $\alpha = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$, знайдено за допомогою рівностей (4.16):

$$\begin{aligned} q_0 &= [\alpha] = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_0} = \frac{3}{\sqrt{5} - 1}, \quad q_1 = [\alpha_1] = 2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = \\ &= 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad q_2 = [\alpha_2] = 2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - q_2} = \frac{5}{3\sqrt{5} - 5}, \quad q_3 = [\alpha_3] = 2, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 - q_3} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}, \quad q_4 = [\alpha_4] = 1, \quad \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - q_4} = 3(\sqrt{5} + 2), \\ q_5 &= [\alpha_5] = 12, \quad \alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5 - q_5} = \frac{2 + \sqrt{5}}{3} = \alpha, \quad q_6 = [\alpha_6] = q_0 = 1 \end{aligned}$$

і далі все періодично повторюється. Отже, $\frac{2 + \sqrt{5}}{3} = [1; 2, 2, 2, 1, 12, 1, \dots]$.

Для знаходження раціональних вкорочень цього дробу заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2	3	4	5	6	...
q_k	—	—	1	2	2	2	1	12	1	...
P_k	0	1	1	3	7	17	24	305	329	...
Q_k	1	0	1	2	5	12	17	216	233	...

Обчислимо межі похибки $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$ одержаних раціональних вкорочень числа $\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_0 Q_1} &= \frac{1}{2} > 0,0001; \quad \frac{1}{Q_1 Q_2} = \frac{1}{10} > 0,0001; \quad \frac{1}{Q_2 Q_3} = \frac{1}{60} > 0,0001; \quad \frac{1}{Q_3 Q_4} = \\ &\frac{1}{204} > 0,0001; \quad \frac{1}{Q_4 Q_5} = \frac{1}{3672} > 0,0001; \quad \frac{1}{Q_5 Q_6} = \frac{1}{50328} \approx 0,00002 < 0,0001. \end{aligned}$$

Отже, $\left| \frac{2 + \sqrt{5}}{3} - \frac{305}{216} \right| \approx 0,00002 < 0,0001$. \square

Задача 4.7. Знайти перші п'ять елементів зображення числа $\sqrt[3]{2}$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу.

Розв'язання. Очевидно, що $q_0 = [\sqrt[3]{2}] = 1$. Позначимо $\alpha = \sqrt[3]{2}$ і нехай тепер $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$. Для знаходження α_1 скористаємося тим, що α — єдиний дійсний корінь рівняння $x^3 - 2 = 0$. Тому α_1 є єдиним дійсним коренем рівняння $(1 + \frac{1}{\alpha_1})^3 - 2 = 0$ або $\alpha_1^3 - 3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 - 1 = 0$. А позаяк $3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1 = -11 < 0$ і $4^3 - 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3 > 0$, то $3 < \alpha_1 < 4$ і $q_1 = [\alpha_1] = 3$. Далі з рівності $\alpha_1 = 3 + \frac{1}{\alpha_2}$ одержуємо, що α_2 є єдиним дійсним коренем рівняння $(3 + \frac{1}{\alpha_2})^3 - 3(3 + \frac{1}{\alpha_2})^2 - 3(3 + \frac{1}{\alpha_2}) - 1 = 0$ або $10\alpha_2^3 - 6\alpha_2^2 - 6\alpha_2 - 1 = 0$. Із нерівностей $10 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 = -3 < 0$ і $10 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 1 = 43 > 0$ тепер маємо, що $1 < \alpha_2 < 2$ і $q_2 = [\alpha_2] = 1$. Таким же чином з рівності $\alpha_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_3}$ знаходимо рівняння для α_3 : $3\alpha_3^3 - 12\alpha_3^2 - 24\alpha_3 - 10 = 0$, звідки $5 < \alpha_3 < 6$ і $q_3 = [\alpha_3] = 5$. Потім аналогічно знаходимо $q_4 = 1$. Отже, $\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, \dots]$. \square

Задача 4.8. *Довести, що $\frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, \dots, 4n+1, \dots]$.*

Розв'язання. Розглянемо функції $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, визначені таким чином: $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(2n+2k)!} x^{2k}$. Зокрема, $f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f_1(x) = \frac{1}{2x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = \frac{1}{4x}(e^x + e^{-x})$, і тому $\frac{f_0(1/2)}{f_1(1/2)} = \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} = \frac{e+1}{e-1}$. Очевидно, що для всіх невід'ємних n і k буде $0 < \frac{(n+k)!}{k!(2n+2k)!} < 1$, а тому для кожного n відповідний ряд для функції $f_n(x)$ збігається для всіх $x \in (0, 1)$ (насправді він збігається для всіх x , але це нам не потрібно). Крім того, має місце тотожність

$$f_n(x) - (4n+2)f_{n+1}(x) = 4x^2 f_{n+2}(x) \quad (4.18)$$

(перевірку цього твердження лишаємо читачам як вправу). Позначимо $\alpha_n = \frac{f_n(1/2)}{f_{n+1}(1/2)}$. Тоді з рівності (4.18) випливає, що $\alpha_n = (4n+2) + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$, і оскільки $\alpha_{n+1} > 0$, то для всіх n $\alpha_n > 4n+2 > 1$ і $\frac{1}{\alpha_{n+1}} < 1$, тобто $[\alpha_n] = 4n+2$. Отже, $\alpha_0 = 2 + \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = 6 + \frac{1}{\alpha_2}$, $\alpha_2 = 10 + \frac{1}{\alpha_3}$, ..., а тому $\frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, \dots, 4n+1, \dots]$. \square

Наступне дещо несподіване застосування нескінченних ланцюгових дробів пов'язане з різними календарними системами. Як відомо з астрономії, рік триває 365,2421987... так званих середніх діб. Тому здавна люди намагалися замінити це складне відношення між тривалістю року й тривалістю доби хай і не таким точним, але більш придатним для створення календаря і літочислення.

Зобразимо число $\alpha = 365,2421987\dots$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу:

$$\begin{aligned} q_0 &= [\alpha] = 365, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_0} = \frac{1}{0,2421987\dots}, \quad q_1 = [\alpha_1] = 4, \quad \alpha_2 = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = 1 + \frac{1}{0,128841\dots}, \quad q_2 = [\alpha_2] = 7, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - q_2} = \frac{1}{0,761486\dots}, \\ q_3 &= [\alpha_3] = 1, \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - q_3} = \frac{1}{0,31322\dots}, \quad q_4 = [\alpha_4] = 3, \quad \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - q_4} = \\ &= \frac{1}{0,1926\dots}, \quad q_5 = [\alpha_5] = 5, \quad \alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5 - q_5} = \frac{1}{0,191\dots}, \quad q_6 = [\alpha_6] = 5 \end{aligned}$$

і т.д. Для знаходження раціональних вкорочень одержаного ланцюгового дробу [365; 4, 7, 1, 3, 5, 5, ...] заповнимо таблицю (4.6):

k	—	—	0	1	2	3	4	5	...
q_k	—	—	365	4	7	1	3	5	...
P_k	0	1	365	1461	10592	12053	46751	1275791	...
Q_k	1	0	1	4	29	33	128	673	...

Наближення $\frac{P_0}{Q_0} = 365$ було відоме багатьом стародавнім народам. Стародавнім єгиптянам, асирійцям та китайцям було відоме і наближення $\frac{P_1}{Q_1} = 365 \frac{1}{4}$, хоча вони ще не мали регулярних високосних років. У 238 р. до н.е. вийшов “Канопський декрет” Птолемея Евергета, за яким кожний четвертий рік мав тривати не 365, а 366 діб (гадають, що в цій — одній з перших — реформ календаря брав участь славетний грецький вчений Ератостен). Однак про цей декрет за кілька десятиліть забули й тільки в 47 р. до н.е. Юлій Цезар знову поновив його, наказавши кожного четвертого року додавати одну зайву добу в лютому місяці. Це і є *юліанський* календар (або *старий стиль*). Проте він трохи завищує тривалість року і приблизно за 128 років набігає лише

дoba. Тому за кожні 128 років юліанський календар відстає від астрономічного на одну добу. Протягом століть це розходження ставало все помітнішим. У XV ст. воно сягнуло 10 діб і на часі стала чергова реформа календаря. Але реформування відбулося лише в кінці XVI ст. за участю німецького математика Клавіуса. У католицьких країнах Західної Європи новий календар впроваджувався булою папи Григорія XIII від 1 березня 1582 р., тому він і називається *григоріанським* (або *новим стилем*).

Реформа папи Григорія XIII мала дві складові. По-перше, з календаря, щоб узгодити його з астрономічним, викреслювалося 10 діб і після 4 жовтня 1582 р. йшло одразу 15 жовтня. По-друге, щоб зблизити тривалість календарного року й астрономічного, роки, які закінчуються двома нулями, оголошувались не високосними, а звичайними (за винятком тих років, число сотень в яких ділиться на 4). Тому роки 1700–й, 1800–й, 1900–й, 2100–й і т.д. — не високосні, тоді як 1600–й, 2000–й — високосні.

Таким чином, за новим стилем середня тривалість року становить $365\frac{97}{400}$ діб, що трохи більше за одержані вище друге $\frac{P_2}{Q_2} = 365\frac{7}{29}$ і третє $\frac{P_3}{Q_3} = 365\frac{8}{33}$ раціональні вкорочення для астрономічного року ($365\frac{7}{29} < 365,2421987\dots < 365\frac{8}{33} < 365\frac{97}{400}$). Календарний рік за новим стилем і астрономічний рік розрізняються приблизно на 0,0003013... доби, і розходження на 1 добу набігає приблизно за 3300 років.

Невідомо, чи в якій–небудь календарній системі використовувалось друге раціональне вкорочення $365\frac{7}{29}$. У кінці XI ст. видатний персько-таджицький астроном, поет і математик Омар Хайям намагався впровадити в Персії календар, що ґрунтувався на третьому раціональному вкороченні $365\frac{8}{33}$. За Хайяном календарний цикл складався з 33 років, де кожний 4–й рік є високосним, окрім 32–го; замість 32–го високосним є 33–й рік. За календарем Омара Хайяма календарний рік і астрономічний розрізняються приблизно на 0,000225... доби, і розходження на 1 добу набігає приблизно за 4500 років, тобто цей календар є значно точнішим за григоріанський.

У кінці XIX ст. в Росії обговорювався проект календарної реформи, що ґрунтувався на четвертому раціональному наближенні $\frac{P_4}{Q_4} =$

$365\frac{31}{128}$. За цим проектом календарний цикл тривав би 128 років, з яких 31 були б високосними. При цьому календарний рік і астрономічний розрізнялися б приблизно на 0,000011... доби, і розходження на 1 добу набігало б приблизно за 90000 років.

П'яте раціональне наближення $\frac{P_5}{Q_5} = 365\frac{163}{673}$ дає змогу створити календарну систему із 673-річним циклом, що не набагато більше нинішнього 400-річного, але яка була б майже в тисячу разів точніша за нинішню. У цій системі календарний і астрономічний роки розрізнялися б лише на 0,0000004... доби, а розходження на 1 добу набігало б лише за кілька мільйонів років.

4.3. Раціональні вкорочення як “найкращі” наближення

Із кожним нескінченним ланцюговим дробом $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ пов’язана нескінченна послідовність наближень раціональними числами ірраціонального числа $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots]$. Цю послідовність утворюють раціональні вкорочення $P_0/Q_0, P_1/Q_1, \dots$, які в певному сенсі є “найкращими” наближеннями до числа α . “Найкращий” тут означає, що серед усіх раціональних чисел, знаменник яких не перевищує Q_k , найближчим до числа α є число P_k/Q_k . Деяку інформацію про близькість раціональних вкорочень до числа α дає нерівність (4.15). Але детальніший розгляд показує, що для нескінченної кількості раціональних вкорочень виконуються трохи “кращі” нерівності.

Теорема 4.8 (Вален). Якщо $\frac{P_n}{Q_n}$ і $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ – два раціональні вкорочення ланцюгового дробу, який задає дійсне число α , то має місце принаймні одна з нерівностей

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{2Q_n^2}, \quad \left| \alpha - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2Q_{n+1}^2}. \quad (4.19)$$

Доведення. За теоремою 4.6 числа $\frac{P_n}{Q_n}$ і $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ лежать на числовій осі по різні боки від числа α . Тому з нерівностей $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \geq \frac{1}{2Q_n^2}$ і

$\left| \alpha - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2Q_{n+1}^2}$ випливало б

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_n^2} + \frac{1}{Q_{n+1}^2} \right) \text{ або}$$

$$\frac{1}{Q_n^2} + \frac{1}{Q_{n+1}^2} - \frac{2}{Q_n Q_{n+1}} = \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n+1}} \right)^2 \leq 0,$$

що, очевидно, невірно. Отже, хоча б одна з нерівностей (4.19) виконується. \square

У певному сенсі оберненою до теореми Валена є наступна теорема, доведена Лежандром.

Теорема 4.9. Якщо для взаємно простих цілих чисел a, b ($b > 0$) виконується нерівність $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$, то дріб $\frac{a}{b}$ є одним із раціональних вкорочень числа α .

Доведення. Спочатку доведемо, що для довільного відмінного від a/b раціонального дробу m/n , $n > 0$, із нерівності $\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{2bn}$ випливає нерівність $n > b$. Без обмеження загальності дріб m/n можна вважати нескоротним. Якщо $b = n$, то

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| = \left| \alpha - \frac{m}{b} \right| = \left| \alpha - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{m}{b} \right| \geq \left| \frac{a}{b} - \frac{m}{b} \right| - \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^2} = \frac{2b-1}{2b^2} \geq$$

$\geq \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2bn}$, що суперечить припущення. Тому вважатимемо, що $n \neq b$. Тоді

$$0 \neq \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb-na}{nb} \quad \text{i} \quad |mb-na| \geq 1. \text{ Звідси}$$

$$\frac{1}{bn} \leq \frac{|mb-na|}{bn} = \left| \frac{m}{n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{m}{n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2bn} + \frac{1}{2b^2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2b}, \quad \frac{1}{2n} < \frac{1}{2b} \quad \text{i} \quad n > b.$$

Припустимо тепер, що дріб a/b не є раціональним вкороченням числа α . Тоді $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \neq 0$ і знайдеться раціональне вкорочення P_n/Q_n

числа α , для якого $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|$. Із попереднього випливає, що тоді $Q_n > b$. Оскільки $Q_0 = 1$, то існує таке k , що $Q_k \leq b < Q_{k+1}$. Розглянемо систему

$$\begin{cases} P_k x + P_{k+1} y = a, \\ Q_k x + Q_{k+1} y = b. \end{cases} \quad (4.20)$$

Із твердження 4.2 випливає, що визначник $P_k Q_{k+1} - P_{k+1} Q_k$ цієї системи дорівнює ± 1 , а тому за теоремою Крамера вона має єдиний розв'язок, який до того ж буде цілочисельним. Оскільки $\frac{P_k}{Q_k} \neq \frac{a}{b} \neq \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, то $x \neq 0$ і $y \neq 0$, а з нерівності $b < Q_{k+1}$ і другого рівняння системи (4.20) випливає, що x і y мають різні знаки. За теоремою 4.6 вирази $Q_k \alpha - P_k = O_k \left(\alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right)$ і $Q_{k+1} \alpha - P_{k+1} = Q_{k+1} \left(\alpha - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right)$ також мають різні знаки. Тому в рівності

$$b\alpha - a = (Q_k x + Q_{k+1} y) \alpha - (P_k x + P_{k+1} y) = (Q_k \alpha - P_k)x + (Q_{k+1} \alpha - P_{k+1})y$$

обидва доданки правої частини мають однакові знаки і ненульові. Але тоді $|b\alpha - a| > |Q_k \alpha - P_k|$ і

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{b} \left| Q_k \alpha - P_k \right| = \frac{Q_k}{b} \left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right|.$$

З останньої нерівності отримуємо

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{b}{Q_k} \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{b}{Q_k} \cdot \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2Q_k b},$$

звідки, за доведеним на початку, $Q_k > b$, що суперечить вибору раціонального вкорочення P_k/Q_k . Тому припущення, що дріб a/b не є раціональним вкороченням числа α , є хибним. \square

Історично теоремі Валена передувала

Теорема 4.10 (Діріхле). Для довільного дійсного числа α і довільного $\tau > 1$ можна знайти такий раціональний дріб $\frac{a}{b}$, що $b \leq \tau$ і $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b\tau}$.

Доведення. Знову позначимо через $\frac{P_k}{Q_k}$ k -те раціональне вкорочення числа α . Оскільки знаменники раціональних вкорочень монотонно зростають (нерівність (4.10)), то можна знайти найбільше n , для якого $Q_n \leq \tau$. Тоді дріб $\frac{P_n}{Q_n}$ задовільняє умову теореми. Справді, якщо $\frac{P_n}{Q_n}$ — не останнє раціональне вкорочення числа α , то $\tau < Q_{n+1}$ і, згідно з теоремою 4.4,

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n \tau}, \quad \text{де } Q_n \leq \tau.$$

Якщо ж раціональне вкорочення $\frac{P_n}{Q_n}$ — останнє, то $\alpha = \frac{P_n}{Q_n}$ і

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| = 0 < \frac{1}{Q_n \tau}, \quad \text{де } Q_n \leq \tau. \quad \square$$

Суттєва відмінність між теоремами 4.8 і 4.10 полягає в тому, що перша стверджує існування для довільного іrrаціонального числа *нескінченної* кількості раціональних наближень з непоганою оцінкою, у той час як в другій теоремі оцінка покращується, проте гарантується існування лише *одного* потрібного наближення. Виникає природне питання: чи не можна посилити теорему Валена, замінивши сталу $1/2$ в правій частині нерівності (4.19) меншою сталаю c , але такою, щоб знову ж таки для довільного іrrаціонального числа α існувало нескінченно багато раціональних наближень a/b , для яких виконувалась би нерівність $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^2}$? І якщо такі сталі c існують, то чи є серед них найменша? Вичерпну відповідь на це питання дали Борель і Гурвіц.

Теорема 4.11 (Борель–Гурвіц). a) Якщо $\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ — три послідовні раціональні вкорочення дійсного числа α , то виконується принаймні одна з нерівностей:

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} Q_n^2}, \quad \left| \alpha - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} Q_{n+1}^2}, \quad \left| \alpha - \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} Q_{n+2}^2}.$$

б) Для довільної константи $0 < c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ нерівність $\left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^2}$ задовільняє лише скінченні кількості раціональних дробів $\frac{a}{b}$.

Доведення цієї теореми нескладне, однак досить громіздке. Тому ми не будемо його наводити. Допитливий читач може спробувати довести цю теорему самостійно або знайти її доведення в літературі з ланцюгових дробів.

4.4. Квадратичні іrrаціональноті й періодичні ланцюгові дроби

Множину \mathbb{Q} раціональних чисел можна ототожнити із множиною всіх коренів усіх рівнянь першого степеня з цілими коефіцієнтами. Тому природно вважати, що найпростішими іrrаціональними числами є корені квадратних рівнянь з цілими коефіцієнтами.

Число θ називається квадратичною іrrаціональністю, якщо θ є коренем деякого квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами a, b, c і додатним дискримінантом $D = b^2 - 4ac$, причому дискримінант D не є точним квадратом.

Із формулі для коренів квадратного рівняння випливає, що число θ є квадратичною іrrаціональністю тоді й лише тоді, коли його можна подати у вигляді $\theta = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$, де числа P і Q — цілі, а D — натуральне число, яке не є точним квадратом. Ще Лагранж встановив, що квадратичні іrrаціональноті тісно пов'язані з одним дуже цікавим класом нескінчених ланцюгових дробів.

Нескінчений ланцюговий дріб $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ називається *періодичним*, якщо існує таке натуральне число m (воно називається *довжиною періоду*), що для всіх достатньо великих номерів n неповні частки q_0, q_1, q_2, \dots цього дробу задовільняють рівність $q_{n+m} = q_n$. Записуємо такі дроби у вигляді $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_k, (q_{k+1}, \dots, q_{k+m})]$, де круглі дужки виділяють блок неповних часток, який далі періодично повторюється.

Теорема 4.12. *Значення довільного періодичного ланцюгового дробу є квадратичною іrrаціональністю.*

Доведення. Нехай число α є значенням періодичного ланцюгового дробу $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, (q_k, \dots, q_{k+m-1})]$. Визначимо числа α_n , $n \geq 0$, так само, як в рівностях 4.16 із доведення теореми 4.7. Тоді $\alpha_n = [q_n; q_{n+1}, q_{n+2}, \dots]$ і з періодичності дробу випливає, що $\alpha_k = \alpha_{k+m}$.

З іншого боку, з рівності (4.17) отримуємо:

$$\alpha_k = \frac{P_{k-2} - \alpha Q_{k-2}}{\alpha Q_{k-1} - P_{k-1}}, \quad \alpha_{k+m} = \frac{P_{k+m-2} - \alpha Q_{k+m-2}}{\alpha Q_{k+m-1} - P_{k+m-1}},$$

де $\frac{P_k}{Q_k}$ — k -те раціональне вкорочення числа α . Прирівнюючи праві частини одержаних рівностей, після нескладних перетворень отримуємо для α рівняння $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, де коефіцієнти

$$A = Q_{k-1}Q_{k+m-2} - Q_{k-2}Q_{k+m-1},$$

$$B = P_{k-2}Q_{k+m-1} - P_{k+m-2}Q_{k-1} + P_{k+m-1}Q_{k-2} - P_{k-1}Q_{k+m-2},$$

$$C = P_{k-1}P_{k+m-2} - P_{k-2}P_{k+m-1}$$

є цілими числами.

Доведемо тепер, що $A \neq 0$. Можна вважати, що $k > 2$ (інакше даний дріб можна переписати у вигляді $[q_0; q_1, \dots, q_{k+m-1}, (q_{k+m}, \dots, q_{k+2m-1})]$). Тоді рівність $A = 0$ рівносильна рівності

$$\frac{Q_{k-1}}{Q_{k-2}} = \frac{Q_{k+m-1}}{Q_{k+m-2}}.$$

За твердженням 4.1 в обох частинах цієї рівності стоять нескоротні дроби. Але тоді $Q_{k-2} = Q_{k+m-2}$ і $Q_{k-1} = Q_{k+m-1}$, що суперечить нерівностям (4.10).

Отже, α є коренем квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами та ірраціональне, бо задається нескінченим ланцюговим дробом. Тому α — квадратична ірраціональність. \square

Задача 4.9. Знайти квадратичну ірраціональність, яку задає періодичний ланцюговий дріб $[2; (1, 1, 1, 4)]$.

Розв'язання. Використовуючи позначення з доведення теореми 4.12, одержуємо для числа $\alpha = [2; (1, 1, 1, 4)]$ рівняння

$$\alpha_1 = \frac{P_{-1} - \alpha Q_{-1}}{\alpha Q_0 - P_0} = \alpha_5 = \frac{P_3 - \alpha Q_3}{\alpha Q_4 - P_4},$$

бо за умовою задачі $k = 1$ і $m = 4$. Для знаходження чисельників P_n і знаменників Q_n раціональних вкорочень заповнимо таблицю (4.6):

k	-1	0	1	2	3	4	\dots
q_k		2	1	1	1	4	\dots
P_k	0	1	2	3	5	8	\dots
Q_k	1	0	1	1	2	3	\dots

Отже, маємо рівняння $\frac{1}{\alpha - 2} = \frac{8 - 2\alpha}{14\alpha - 37}$, звідки $\alpha^2 - 7 = 0$ і $\alpha = \sqrt{7}$, оскільки $q_0 = [\alpha] = 2$. \square

Теорема 4.13 (Лагранж). *Довільна квадратична ірраціональність задається періодичним ланцюговим дробом.*

Доведення. Нехай α — квадратична ірраціональність, тобто α є коренем квадратного тричлена $Ax^2 + Bx + C$ з цілими коефіцієнтами і додатним дискримінантом, причому дискримінант не є точним квадратом. Підставляючи в рівність $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ значення $\alpha = \frac{\alpha_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$ із (4.17), після зведення до спільного знаменника матимемо:

$$A(\alpha_n P_{n-1} + P_{n-2})^2 + B(\alpha_n P_{n-1} + P_{n-2})(\alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + C(\alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2})^2 = 0 .$$

Отже, α_n є коренем рівняння

$$A_n x^2 + B_n x + C_n = 0 , \quad (4.21)$$

коефіцієнти

$$\begin{aligned} A_n &= AP_{n-1}^2 + BP_{n-1}Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2, \\ B_n &= 2AP_{n-1}P_{n-2} + B(P_{n-1}Q_{n-2} + P_{n-2}Q_{n-1}) + 2CQ_{n-1}Q_{n-2}, \quad (4.22) \\ C_n &= AP_{n-2}^2 + BP_{n-2}Q_{n-2} + CQ_{n-2}^2 \end{aligned}$$

якого є цілими числами. Із твердження 4.2 випливає, що дискримінант рівняння (4.21) дорівнює

$$B_n^2 - 4A_n C_n = (B^2 - 4AC)(P_{n-1}Q_{n-2} + P_{n-2}Q_{n-1})^2 = B^2 - 4AC , \quad (4.23)$$

тобто для всіх n дискримінант рівняння (4.21) один і той же і збігається з дискримінантом початкового рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$. Крім того, $C_n = A_{n-1}$.

Згадаймо тепер (теорема 4.6), що $\left| \alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \frac{1}{Q_{n-1}^2}$. Тому $P_{n-1} = \alpha Q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{Q_{n-1}}$, де $|\delta_{n-1}| < 1$, і з першої з рівностей (4.22) отримуємо:

$$|A_n| = \left| A \left(\alpha Q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{Q_{n-1}} \right)^2 + B \left(\alpha Q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) Q_{n-1} + C Q_{n-1}^2 \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| (A\alpha^2 + B\alpha + C)Q_{n-1}^2 + 2A\alpha\delta_{n-1} + B\delta_{n-1} + A\frac{\delta_{n-1}^2}{Q_{n-1}^2} \right| = \\
&= \left| 2A\alpha\delta_{n-1} + B\delta_{n-1} + A\frac{\delta_{n-1}^2}{Q_{n-1}^2} \right| < 2|A\alpha| + |B| + |A| .
\end{aligned}$$

Таким чином, коефіцієнти A_n і C_n обмежені за абсолютною величиною, а позаяк вони є цілими числами, то можуть набувати лише скінченної кількості різних значень. Але з рівності (4.23) випливає, що $B_n^2 = B^2 - 4AC + 4A_nC_n$, тобто B_n теж може набувати лише скінченної кількості різних значень. Тому для $n \geq 1$ серед рівнянь (4.21) може бути лише скінчена кількість різних, а в такому разі α_n теж може набувати лише скінченної кількості різних значень. Отже, при належному виборі k і m матимемо $\alpha_k = \alpha_{k+m}$. Тоді для зображення числа α нескінченим ланцюговим дробом $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots]$ одержуємо рівність

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_k}}}{\ddots + \cfrac{1}{q_{k+m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k+m}}}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_k}}}{\ddots + \cfrac{1}{q_{k+m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k+m}}}}}$$

звідки випливає, що для всіх $i \geq 0$ $q_{k+i} = q_{k+i+m}$, тобто що дріб $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ є періодичним. \square

Задача 4.10. Подати обидва корені рівняння $x^2 + 9x + 6 = 0$ як періодичні ланцюгові дроби.

Розв'язання. Коренями даного рівняння є числа $\alpha = \frac{-9 + \sqrt{57}}{2}$ і $\beta = \frac{-9 - \sqrt{57}}{2}$. Діючи як і при розв'язанні задачі 4.6, для числа α отримуємо:

$$\begin{aligned}
q_0 &= [\alpha] = -1 , \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_0} = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} , \quad q_1 = [\alpha_1] = 3 , \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = \\
&= \frac{5 + \sqrt{57}}{8} , \quad q_2 = [\alpha_2] = 1 , \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - q_2} = \frac{3 + \sqrt{57}}{6} , \quad q_3 = [\alpha_3] = 1 , \\
\alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 - q_3} = \frac{3 + \sqrt{57}}{8} , \quad q_4 = [\alpha_4] = 1 , \quad \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - q_4} = \frac{5 + \sqrt{57}}{4} ,
\end{aligned}$$

$$q_5 = [\alpha_5] = 3, \quad \alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5 - q_5} = \frac{7 + \sqrt{57}}{2}, \quad q_6 = [\alpha_6] = 7,$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{\alpha_6 - q_6} = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} = \alpha_1,$$

тому для всіх $i \geq 0$ маємо $q_{1+i} = q_{7+i}$ і $\alpha = [-1; (3, 1, 1, 1, 3, 7)]$.

Для числа β аналогічно отримуємо:

$$\begin{aligned} r_0 = [\beta] = -9, \quad \beta_1 = \frac{1}{\beta - r_0} = \frac{9 + \sqrt{57}}{12}, \quad r_1 = [\beta_1] = 1, \quad \beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - r_1} = \\ = \frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \quad r_2 = [\beta_2] = 2, \quad \beta_3 = \frac{1}{\beta_2 - r_2} = \frac{5 + \sqrt{57}}{8} = \alpha_2. \end{aligned}$$

Тому далі матимемо $r_3 = q_2 = 1, r_4 = q_3 = 1, r_5 = q_4 = 1, r_6 = q_5 = 3, r_7 = q_6 = 7, r_8 = q_7 = 3$ і для всіх $i \geq 0$ $r_{3+i} = r_{9+i}$. Отже, $\beta = [-9; 1, 2, (1, 1, 1, 3, 7, 3)]$. \square

Задача 4.11. Нехай α, β – корені рівняння $x^2 - ax - 1 = 0$, де $a \in \mathbb{N}$, $i \alpha > 0$. Показати, що знаменники раціональних вкорочень нескінченного ланцюгового дробу, яким задається число α , можна знайти за формулою $Q_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

Розв'язання. Доведемо спочатку таке допоміжне твердження:

Нехай послідовність a_0, a_1, \dots дійсних чисел для всіх $n > 0$ задовільняє рекурентне співвідношення $a_{n+1} = ba_n + a_{n-1}$. Якщо рівняння $x^2 - bx - 1 = 0$ має два різні дійсні корені x_1 і x_2 , то існують такі незалежні від n числа A і B , що $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ для всіх $n \geq 0$.

Справді, позаяк $x_1^2 = bx_1 + 1$ і $x_2^2 = bx_2 + 1$, то $Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} = Ax_1^{n-1}(bx_1 + 1) + Bx_2^{n-1}(bx_2 + 1) = b(Ax_1^n + Bx_2^n) + (Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1})$, тобто для довільних чисел A і B послідовність із загальним членом $c_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ вказане рекурентне співвідношення задовільняє. Щоб послідовність $c_n, n \geq 0$, збігалась із даною послідовністю $a_n, n \geq 0$, мусить, зокрема, виконуватись рівності $a_0 = A + B$ і $a_1 = Ax_1 = Bx_2$. Звідси знаходимо, що $A = \frac{a_0x_2 - a_1}{x_2 - x_1}$, $B = \frac{a_1 - a_0x_1}{x_2 - x_1}$. Оскільки для $n > 1$ члени обох послідовностей $a_n, n \geq 0$, і $c_n, n \geq 0$, можна шукати за одним і тим же рекурентним правилом, то далі за допомогою індукції легко доводиться, що для знайдених значень A і B послідовність c_n збігається з послідовністю a_n .

Повернемось тепер до нашої задачі. Спочатку знайдемо зображення числа $\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ у вигляді періодичного ланцюгового дробу.

Оскільки $a \in \mathbb{N}$, то $a^2 < a^2 + 4 < (a + 2)^2$ і $a < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} < a + 1$, звідки $q_0 = [\alpha] = a$. Тоді

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_0} = \frac{1}{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} - a} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4} - a} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} = \alpha .$$

Отже, всі наступні неповні частки також дорівнюватимуть a і $\alpha = [a; (a)]$. Тому знаменники Q_n раціональних вкорочень цього ланцюгового дробу задовольнятимуть рекурентне спiввiдношення $Q_{n+1} = aQ_n + Q_{n-1}$. Із допомiжного твердження тодi отримуємо, що Q_n можна подати у виглядi $Q_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Із рiвностей $1 = Q_0 = A + B$ i $a = Q_1 = A\alpha + B\beta$ легко знаходимо коефiцiєнти $A = \frac{\beta - a}{\beta - \alpha}$, $B = \frac{a - \alpha}{\beta - \alpha}$.

Таким чином, $Q_n = \frac{\beta - a}{\beta - \alpha}\alpha^n + \frac{a - \alpha}{\beta - \alpha}\beta^n$ i враховуючи, що $\alpha\beta = -1$, $a\alpha = \alpha^2 - 1$, $a\beta = \beta^2 - 1$, маємо:

$$Q_n = \frac{-\alpha^{n-1} - (\alpha^2 - 1)\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} + \frac{-\beta^{n-1} - (\beta^2 - 1)\beta^{n-1}}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} ,$$

що й треба було довести. \square

Зауваження. Неважко знайти зображення у вигляді періодичного ланцюгового дробу i вiд'ємного кореня $\beta = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ рiвняння $x^2 - ax - 1 = 0$. Справdі,

$$-1 = \frac{a - (a + 2)}{2} < \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} < \frac{a - a}{2} = 0 , \text{ звiдки } q_0 = [\beta] = -1 . \text{ Тодi}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta - q_0} = \frac{1}{\frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} + 1} = \frac{2}{a + 2 - \sqrt{a^2 + 4}} = \frac{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4}}{2a} .$$

Але

$$1 + \frac{1}{a} = \frac{a + 2 + a}{2a} < \frac{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4}}{2a} < \frac{a + 2 + a + 2}{2a} = 1 + \frac{2}{a} . \quad (4.24)$$

Розглянемо спочатку випадок $a \geq 2$. Тоді з нерівностей (4.24) випливає, що $1 < \beta_1 < 2$ і $q_1 = [\beta_1] = 1$. Далі маємо:

$$\beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - q_1} = \frac{1}{\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2a} - 1} = \frac{2a}{2-a+\sqrt{a^2+4}} = \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

і

$$a-1 = \frac{a-2+a}{2} < \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2} < \frac{a-2+a+2}{2} = a,$$

звідки $q_2 = [\beta_2] = a-1$. Оскільки

$$\beta_3 = \frac{1}{\beta_2 - q_2} = \frac{1}{\frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2} - (a-1)} = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} = \alpha,$$

то далі всі неповні частки ланцюгового дробу для числа β збігатимуться з неповними частками ланцюгового дробу для числа α , і тому $\beta = [-1; 1, a-1, (a)]$.

Залишилось розглянути випадок $a = 1$. У цьому разі $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$$\beta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad q_1 = [\beta_1] = 2, \quad \beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - q_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha = [1; (1)],$$

і тому $\beta = [-1; 2, (1)]$.

Задача 4.12. Знайти зображення у вигляді ланцюгового дробу додатного числа $\frac{b}{a}$, якщо $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots]$.

Розв'язання. Якщо $a < b$, то $q_0 = [a/b] = 0$, і позаяк $\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$,

то $\frac{b}{a} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots} = [q_1; q_2, \dots]$. Нехай тепер $a > b$. Тоді аналогі-

чно $\frac{b}{a} = \frac{1}{q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots}}$, і оскільки $[b/a] = 0$, то $b/a = [0; q_0, q_1, \dots]$. У

випадку $a = b$ матимемо $b/a = 1 = [1]$. □

Природним наступним кроком був би розгляд алгебричних іrrаціональностей вищих степенів — кубічних, біквадратних, тощо (число α називається алгебричним числом степеня n , якщо α є коренем деякого алгебричного рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ з цілыми коефіцієнтами, але не є коренем жодного такого рівняння меншого степеня). Але досягнення в цьому напрямку дуже мізерні. Так, досі невідомо жодного розкладу в ланцюговий дріб алгебричного числа степеня вищого, ніж два. Невідомо навіть, чи можуть неповні частки такого числа бути обмеженими в сукупності.

4.5. Задачі для самостійного розв'язування

1. Записати число $\frac{3653}{3107}$ у вигляді ланцюгового дробу і знайти всі його раціональні вкорочення.
2. За даними ланцюговими дробами знайти відповідні їм звичайні нескоротні дроби: а) [1; 1, 2, 3, 4] ; б) [2; 5, 3, 2, 1, 4, 2, 3] ; с) [1; 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3] .
3. Записати дане число у вигляді ланцюгового дробу, потім замінити ланцюговий дріб його 4-м раціональним вкороченням і виписати нерівність із зазначенням похибки: а) $\frac{163}{159}$; б) $\frac{1882}{1651}$; с) $\frac{2341}{1721}$.
4. Знайти всі цілі розв'язки рівняння: а) $38x + 117y = 209$; б) $258x - 175y = 113$.
5. Довести, що k -те раціональне вкорочення $\frac{P_k}{Q_k}$ числа α наближає це число точніше, ніж будь-який нескоротний дріб $\frac{r}{l}$ з умовою $0 < l < Q_k$.
6. Знайти перші 5 раціональних вкорочень ланцюгового дробу, який задає число $\pi = 3,1415926535897\dots$.
7. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $6x - 5y + 3z = 1$.
8. Довести методом математичної індукції рівність:
 - (a)
$$S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_2, q_1, q_0) = S(q_0, \dots, q_m)(S(q_0, \dots, q_m, q_{m+1}) + S(q_0, \dots, q_{m-1}));$$
 - (b)
$$S(q_0, q_1, \dots, q_m, q_m, \dots, q_1, q_0) = S(q_0, q_1, \dots, q_m) \times S(q_0, q_1, \dots, q_m) + S(q_0, q_1, \dots, q_{m-1})S(q_0, q_1, \dots, q_{m-1}).$$

9. Подати дане число у вигляді нескінченного ланцюгового дробу, потім замінити ланцюговий дріб його раціональним вкороченням із похибкою, не більшою за 0,0001: а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; в) $7 - \sqrt{13}$;
- д) $\frac{-5-\sqrt{39}}{2}$.
10. Довести, що $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots]$, тобто що $q_0 = 2$ і для всіх $n \geq 1$ $q_{3n-2} = q_{3n} = 1$, $q_{3n-1} = 2n$.
11. Користуючись ланцюговими дробами, обчислити обидва корені даного рівняння з точністю до 0,0001: а) $3x^2 - 7x - 3 = 0$; б) $2x^2 - 3x - 6 = 0$.
12. Користуючись ланцюговими дробами, обчислити з точністю до 0,0001 усі корені многочлена $x^3 - x^2 - 2x + 1$.
13. Знайти многочлен із цілыми коефіцієнтами, один з коренів якого задається таким ланцюговим дробом:
- а) $[2; 1, 2, (1, 1, 3)]$; б) $[4; (1, 1, 2, 1, 1, 8)]$.
14. Використовуючи описаний в задачі 4.5 метод, подати число 101 у вигляді суми двох квадратів.
15. Подати у вигляді квадратичної іrrаціональності періодичний ланцюговий дріб: а) $[1; (2, 4, 6, 1)]$; б) $[4; 1, (7, 2, 2)]$; в) $[1; (2, 1)]$.
16. Довести, що для довільних різних натуральних чисел a і b виконується рівність $[a; (b, a)] \cdot [0; (b, a)] = \frac{a}{b}$.
17. Розкласти в періодичний ланцюговий дріб число $\sqrt{n^2 + 1}$ і знайти його друге раціональне вкорочення.