

### 3. Системи числення

#### 3.1. Позиційні системи числення

За свою довгу історію людство створило багато *систем запису чисел*, більшість з яких нині забуті. Лише кілька з них витримали природний відбір і використовується сьогодні. Причина в тому, що хороша система числення повинна задовольняти багато суперечливих умов:

- (a) принципова можливість запису будь-якого натурального числа;
- (b) система повинна допускати розширення, придатне для запису довільних дійсних чисел;
- (c) записи чисел мають бути компактними;
- (d) система має бути зручною для засвоєння;
- (e) над записаними в даній системі числами легко виконувати арифметичні дії.

Скажімо, система з “паличок” певним чином задовольняє вимоги (a) і (d) і частково (e), (щоб додати два числа, треба дописати одне до другого). Але спробуйте виразити в цій системі хоча б кілька з тих чисел, якими оперують астрономи або політики.

Найкраще задовольняють зазначені вимоги позиційні системи числення, які історично виникли досить пізно, але завдяки своїм незалежним перевагам поступово витіснили всі інші системи. Найвідомішою з них є звична нам з дитинства десяткова система.

Щоб побудувати *позиційну систему числення*, зафіксуємо натуральне число  $m > 1$  (*основу системи*). Візьмемо довільне натуральне число  $n$  і почнемо ділити його на  $m$  з остачею, аж поки частка не стане рівною 0 (таке рано чи пізно трапиться, бо кожного разу частка зменшується):

$$n = q_1 m + r_0, \quad 0 \leq r_0 < m, \quad q_1 = q_2 m + r_1, \quad 0 \leq r_1 < m$$

$$q_2 = q_3 m + r_2, \quad 0 \leq r_2 < m, \quad \dots,$$

$$q_{k-1} = q_k m + r_{k-1}, \quad 0 \leq r_{k-1} < m, \quad q_k = 0 \cdot m + r_k, \quad 0 \leq r_k < m.$$

Цей ланцюжок рівностей можна “розкрутити” наступним чином:  $n = q_1 m + r_0 = (q_2 m + r_1)m + r_0 = q_2 m^2 + r_1 m + r_0 = (q_3 m + r_2)m^2 + r_1 m + r_0 = \dots$

$q_3m^3 + r_2m^2 + r_1m + r_0 = \dots = q_km^k + r_{k-1}m^{k-1} + \dots + r_1m + r_0 = r_km^k + r_{k-1}m^{k-1} + \dots + r_1m + r_0$ . Одержана рівність

$$n = r_km^k + r_{k-1}m^{k-1} + \dots + r_1m + r_0, \quad (3.1)$$

де  $r_k \neq 0$  і  $0 \leq r_j < m$  для всіх  $j = 0, 1, \dots, k$ , називається зображенням числа  $n$  у позиційній системі числення з основою  $m$  (або в  $m$ -ковій позиційній системі числення чи просто в  $m$ -ковій системі).

**Теорема 3.1.** Нехай натуральне число  $m > 1$  – фіксоване. Тоді кожне натуральне число  $n$  єдиним чином зображується в позиційній системі числення з основою  $m$ .

**Доведення.** Існування зображення доведено вище. Для доведення єдності розглянемо два зображення числа  $n$  в  $m$ -ковій системі:  $n = r_km^k + \dots + r_0$  і  $n = s_lm^l + \dots + s_0$ . Якщо від першого зображення відняти друге, отримо рівність

$$0 = (r_0 - s_0) + (r_1 - s_1)m + (r_2 - s_2)m^2 + \dots . \quad (3.2)$$

Зауважимо, що  $r_i \geq r_i - s_i \geq -s_i$ , тому  $|r_i - s_i| \leq m - 1$  для всіх  $i$ . Припустимо, що серед коефіцієнтів  $r_0 - s_0, r_1 - s_1, \dots$  є ненульові. Нехай  $r_j - s_j$  – останній з них. Тоді рівності (3.2) можна надати вигляду

$$(r_0 - s_0) + \dots + (r_{j-1} - s_{j-1})m^{j-1} = (s_j - r_j)m^j, \quad (3.3)$$

де права частина задовільняє нерівність  $|(s_j - r_j)m^j| = |s_j - r_j| \cdot m^j \geq m^j$ , а ліва – нерівності  $|(r_0 - s_0) + (r_1 - s_1)m + \dots + (r_{j-1} - s_{j-1})m^{j-1}| \leq |(r_0 - s_0)| + |r_1 - s_1|m + \dots + |r_{j-1} - s_{j-1}|m^{j-1} \leq (m-1) + (m-1)m + \dots + (m-1)m^{j-1} = (m-1)(1+m+\dots+m^{j-1}) = m^j - 1 \leq m^j$ . Оскільки нерівності для лівої і правої частин (3.3) суперечать одна одній, то припущення про наявність в (3.2) ненульового коефіцієнта є хибним. Тому  $r_0 - s_0 = 0, r_1 - s_1 = 0, \dots$ , звідки  $r_0 = s_0, r_1 = s_1, \dots$ , що й доводить єдиність зображення числа  $n$ .  $\square$

Якщо кожний елемент  $r$  множини  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  позначити своїм окремим символом  $\bar{r}$ , то рівність (3.1) символічно записується у вигляді  $n = \bar{r}_k\bar{r}_{k-1}\dots\bar{r}_1\bar{r}_0$  або  $n = \bar{r}_k\bar{r}_{k-1}\dots\bar{r}_1\bar{r}_0$  (або  $n = (\bar{r}_k\bar{r}_{k-1}\dots\bar{r}_1\bar{r}_0)_m$ , якщо треба явно вказати основу  $m$ ). Символи  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}$  називаються цифрами  $m$ -кової системи.

Якщо  $m \leq 10$ , то в ролі цифр звичайно використовують перші  $m$  символів з множини арабських цифр  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Якщо ж

$m > 10$ , то доводиться вводити нові символи. Наприклад, у поширеній в інформації 16-ковій системі цифрами є символи  $0, 1, 2, \dots, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ .

Цифри – це просто певні графічні чи типографічні значки. Але часто зручно не розрізняти цифри і відповідні, позначені цими цифрами, числа – елементи множини  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ . Ми теж будемо дотримуватись цієї вільності. Із контексту завжди буде зрозуміло, чи йдеться, наприклад, про цифру 5, чи про число 5.

Позиційна система запису легко поширюється на від'ємні цілі числа: щоб записати число  $n < 0$  в  $m$ -ковій системі числення, ми просто ставимо знак „–“ перед  $m$ -ковим записом числа  $|n|$ .

Слово “позиційна” в назві “позиційна система числення” означає, що значення цифри в записі числа залежить не тільки від самої цифри, а й від її місця в записі (від її “позиції”). Наприклад, у десятковій системі в записі 555 одна й та ж цифра 5 один раз означає кількість сотень, другий раз – кількість десятків, а третій – кількість одиниць. У непозиційних системах – найбільш відомою з них є римська – значення цифр більш чи менш фіксовані: у записі  $XXX$  всі цифри  $X$  означають одне та ж число 10. Тому в таких системах для запису все більших чисел потрібні все нові цифри.

Номер  $i$  позиції цифри  $r_i$  (який збігається з показником степеня основи  $m$  у розкладі (3.1) ще називають *роздядом* цифри). Історично склалась традиція виписувати цифри числа в порядку спадання їх розрядів.

**Задача 3.1.** Записати в 7-ковій системі число 25148.

*Розв'язання.* Із ланцюжка рівностей  $25148 = 7 \cdot 3592 + 4; 3592 = 7 \cdot 513 + 1; 513 = 7 \cdot 73 + 2; 73 = 7 \cdot 10 + 3; 10 = 7 \cdot 1 + 3; 1 = 7 \cdot 0 + 1$  випливає, що  $25148 = 133214_7$ .  $\square$

**Задача 3.2.** Знайти в 7-ковій системі всі 6-цифрові числа вигляду  $(abcabc)_7$ , які є точними квадратами.

*Розв'язання.*  $(abcabc)_7 = a \cdot 7^5 + b \cdot 7^4 + c \cdot 7^3 + a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = (a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c)(7^3 + 1) = (a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c) \cdot 43 \cdot 2 \cdot 2^2$ . Тому  $(abcabc)_7$  буде точним квадратом тоді й лише тоді, коли  $a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 43 \cdot 2 \cdot k^2$  для деякого натурального  $k$ . Оскільки  $(abc)_7 < 7^3$ , тобто  $a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c < 7^3$ , то з нерівності  $43 \cdot 2 \cdot k^2 < 7^3$  маємо:  $k^2 < \frac{7^3}{86}$ . Тому  $k = 1$ , звідки  $(abc)_7 = 86$  і  $a = 1, b = 5, c = 2$ . Отже, шуканим числом є лише  $(152152)_7$ .  $\square$

### 3.2. Арифметичні дії в позиційних системах

З найомі з дитинства правила виконання арифметичних дій над числами, записаними в десятковій системі, з очевидними невеликими змінами (інший набір цифр, інша таблиця множення) можна застосувати в будь-якій позиційній системі. Тому ми тільки проілюструємо ці правила прикладами.

(a) *Додавання.*

$$\begin{array}{r} 330143_5 \\ + 342024_5 \\ \hline 12222225 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 330143_7 \\ + 342024_7 \\ \hline 12222227 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 330143_8 \\ + 342024_8 \\ \hline 12222228 \end{array} .$$

Незважаючи на позірну схожість доданків, суми вийшли дуже різними. Це й зрозуміло, адже одна й та ж послідовність символів у системах із різними основами позначає зовсім різні числа.

(b) *Віднімання.*

$$\begin{array}{r} 223103_5 \\ - 132414_5 \\ \hline 401345 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 223103_7 \\ - 132414_7 \\ \hline 603567 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 223103_8 \\ - 132414_8 \\ \hline 704678 \end{array} .$$

(c) *Множення “стовпчиком”.* Як і в десятковій системі, в кожній позиційній системі для виконання множення зручно користуватись готовою таблицею множення одноцифрових чисел. Наведемо таку таблицю для сімкової системи. Щоб не захаращувати таблицю, ми скрізь опустимо нижній індекс 7, який вказує на основу системи

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

(Можна лише поспівчувати учням давньовавілонських шкіл, які мусили завчати таблицю множення для позиційної системи з основою 60.)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2\ 5\ 1\ 3_7 \\
 \times\ 4\ 6\ 2\ 5_7 \\
 \hline
 1\ 6\ 5\ 0\ 1_7 \\
 5\ 3\ 2\ 6_7 \\
 \hline
 2\ 2\ 3\ 1\ 4_7 \\
 \hline
 1\ 3\ 6\ 5\ 5_7 \\
 \hline
 1\ 6\ 3\ 2\ 2\ 4\ 6\ 1_7
 \end{array};
 \begin{array}{r}
 3\ 0\ 2\ 1\ 4_7 \\
 \times\ 2\ 6\ 1\ 0\ 5_7 \\
 \hline
 2\ 1\ 1\ 4\ 0\ 6_7 \\
 3\ 0\ 2\ 1\ 4_7 \\
 \hline
 2\ 4\ 1\ 6\ 2\ 3_7 \\
 \hline
 6\ 0\ 4\ 3\ 1_7 \\
 \hline
 1\ 1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 6\ 1\ 0\ 6_7
 \end{array}
 \end{array}.$$

(d) Ділення “ріжком”.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2\ 3\ 5\ 3\ 0\ 4_7 \\
 -\ 1\ 2\ 3_7 \\
 \hline
 1\ 1\ 2\ 3_7 \\
 -\ 1\ 1\ 0\ 4_7 \\
 \hline
 1\ 6\ 0_7 \\
 -\ 1\ 2\ 3_7 \\
 \hline
 3\ 4\ 4_7 \\
 -\ 2\ 4\ 6_7 \\
 \hline
 6\ 5_7
 \end{array}
 \end{array}$$

Таким чином, при діленні з  
остачею  $235304_7$  на  $123_7$  одержуємо частку  $1612_7$  й остаточу  $65_7$ ,  
тобто  $235304_7 = 123_7 \cdot 1612_7 + 65_7$ .

(e) Особливо простого вигляду набувають таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у двійковій системі числення:

$$\begin{array}{c|c|c}
 + & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0
 \end{array}
 ;
 \begin{array}{c|c|c}
 \times & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 1
 \end{array}.$$

Тому в цій системі особливо легко виконувати арифметичні дії:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1_2 \\
 +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1_2 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0_2
 \end{array};
 \begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2 \\
 \times\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1_2 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1_2
 \end{array}
 \end{array}.$$

Із погляду людини двійкова система має й певні недоліки. Зокрема, стають трохи задовгими записи чисел (порівняно з десятковою системою довжина записів зростає приблизно втрічі). Множення тих же чисел у десятковій системі має вигляд  $237 \cdot 181 = 42897$ . Крім того, довга послідовність лише з двох символів 0 і 1 сприймається як одноманітна і важко запам'ятовується. Однак для позбавлених людських емоцій електронних обчислювальних машин наявність усього двох цифр і легкість виконання арифметичних дій стали вирішальними у виборі саме двійкової системи.

Унаслідок цих же причин – зручності виконання арифметичних дій і наперед фіксованої невеликої кількості цифр – непозиційні системи числення витіснили позиційні. Спробуйте, наприклад, користуючись лише римськими цифрами, обчислити квадрат числа MMCDLXXXIV. Історично випадковим є лише те, що найбільшого поширення набула саме десяткова система (у Давньому Вавилоні використовувалась 60-кова система, майя колись створили позиційну систему з основою 20, у деяких мовах залишились сліди 12-кової системи). Непозиційні системи нині можуть використовуватись лише для позначення порядкових чисел. Наприклад, пункти плану чи розділи книжки інколи нумерують буквами якогось алфавіту чи латинськими цифрами.

### 3.3. Перехід до іншої позиційної системи

Може виникнути потреба перейти від запису числа  $n = (a_k \dots a_2 a_1 a_0)_m$  в одній позиційній системі до його запису  $n = (b_t \dots b_2 b_1 b_0)_p$  в іншій системі. Наприклад, від звичної для людини десяткової системи до зручної для машини двійкової. Є два основні способи здійснення такого переходу.

*I способ* ґрунтуються на рівності  $n = b_t p^t + b_{t-1} p^{t-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = ((\dots((b_t p + b_{t-1}) p + b_{t-2}) p + \dots + b_2) p + b_1) p + b_0$ . Виконуючи в  $m$ -ковій системі ділення з остачею числа на  $p$ , послідовно знаходимо:

частку  $(\dots((b_t p + b_{t-1}) p + b_{t-2}) p + \dots + b_2) p + b_1$  й остачу  $b_0$ ;

частку  $\dots((b_t p + b_{t-1}) p + b_{t-2}) p + \dots + b_2$  й остачу  $b_1$ ;  $\dots$ ;

частку  $b_t p + b_{t-1}$  й остачу  $b_{t-2}$ ; частку  $b_t$  й остачу  $b_{t-1}$ ;

частку 0 й остачу  $b_t$ .

Остачі  $b_t, b_{t-1}, b_{t-2}, \dots, b_1, b_0$  є цифрами числа  $n$  у системі числення з основою  $p$ .

*II спосіб* використовує рівність

$$\begin{aligned} n &= a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = \\ &= ((\dots((a_k m + a_{k-1})m + a_{k-2})m + \cdots + a_2)m + a_1)m + a_0 . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Записавши  $m$  і кожну з цифр  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$  у системі з основою  $p$ , обчислюємо  $n$  у цій же системі за формулою (3.4). Самі обчислення зручно організувати в таблицю (так звану *схему Горнера*), всі елементи якої обчислюються за одним і тим же правилом:

	$a_k$	$a_{k-1}$	$a_{k-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$m$	$c_k =$	$c_{k-1} =$	$c_{k-2} =$	$\dots$	$c_1 =$	$c_0 =$
	$a_k$	$mc_k + a_{k-1}$	$mc_{k-1} + a_{k-2}$	$\dots$	$mc_2 + a_1$	$mc_1 + a_0$

Останній елемент  $c_0$  збігається, як бачимо, з числом  $n$ .

Таким чином, способи розрізняються вибором системи, в якій проводяться обчислення: “старої” з основою  $m$  у першому способі і “нової” з основою  $p$  – у другому.

**Задача 3.3.** Записати число  $32106_7$  в системі числення з основою 4.

*Розв’язання. I спосіб.* Щоб не захарашувати записів, ми опускатимемо в обчисленнях нижній індекс 7, який вказує на основу системи.

$$\begin{array}{r}
 32106 \quad | \quad 4 \\
 -26 \quad | \quad 5535 \quad | \quad 4 \\
 31 \quad | \quad -4 \quad | \quad 1306 \quad | \quad 4 \\
 -26 \quad | \quad 15 \quad | \quad -11 \quad | \quad 235 \quad | \quad 4 \\
 20 \quad | \quad -15 \quad | \quad 20 \quad | \quad -22 \quad | \quad 43 \quad | \quad 4 \\
 -15 \quad | \quad 35 \quad | \quad -15 \quad | \quad 15 \quad | \quad -4 \quad | \quad 10 \quad | \quad 4 \\
 26 \quad | \quad -33 \quad | \quad 26 \quad | \quad -15 \quad | \quad 3 \quad | \quad -4 \quad | \quad \underline{\underline{1}} \\
 -26 \quad | \quad \underline{\underline{2}} \quad | \quad -26 \quad | \quad \underline{\underline{0}} \quad | \quad \underline{\underline{3}} \quad | \quad \underline{\underline{0}} \quad | \quad \underline{\underline{4}} \\
 \underline{\underline{0}} \quad | \quad \underline{\underline{0}}
 \end{array}$$

Отже,  $32106_7 = 1330020_4$ .

*II спосіб.* Заміняємо число 7 і цифри числа  $32106_7$  їх записами в 4-ковій системі й далі всі обчислення проводимо в цій системі (нижній індекс 4, який вказує на основу системи, знову для зручності опускаємо).

	3	2	1	0	12
13	3	$3 \cdot 13 + 2$	$113 \cdot 13 + 1$	$2202 \cdot 13 + 0$	$101232 \cdot 13 + 12$
		$= 113$	$= 2202$	$= 101232$	$= 1330020$

Отже,  $32106_7 = 1330020_4$ . □

### 3.4. Ознаки подільності

Ще зі школи добре відомі прості ознаки подільності на деякі числа, наприклад на 2, 3 або 5. Ці ознаки використовують особливості десяткової системи числення. Аналогічні ознаки можна сформулювати в кожній позиційній системі.

**Твердження 3.1.** *Нехай  $d$  є дільником основи  $m$ . Число  $n = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  ділиться на  $d$  тоді й лише тоді, коли його остання цифра  $a_0$  ділиться на  $d$ .*

*Доведення.* За умовою у правій частині рівності  $n = a_k m^k + \dots + a_1 m + a_0$  всі доданки, крім останнього, діляться на  $d$ . Тому для подільності  $n$  на  $d$  необхідно й достатньо, щоб і останній доданок  $a_0$  також ділився на  $d$ . □

Ця ознака є узагальненням ознак подільності на 2, 5 і 10 у десятковій системі числення. Її можна сформулювати у більш загальному вигляді.

**Твердження 3.2.** *Нехай для деякого натурального  $r$  число  $d$  є дільником числа  $m^r$ . Число  $n = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  ділиться на  $d$  тоді й лише тоді, коли на  $d$  ділиться число  $(a_{r-1} \dots a_1 a_0)_m$ , утворене останніми  $r$  цифрами числа  $n$ .*

*Доведення.* Рівність  $n = a_k m^k + \dots + a_r m^r + a_{r-1} m^{r-1} + \dots + a_1 m + a_0$  можна переписати у вигляді:  $n = a_k m^k + \dots + a_r m^r + (a_{r-1} \dots a_1 a_0)$  і повторити міркування з попереднього доведення. □

У десятковій системі в такий спосіб формулюють ознаки подільності на 4, 25, 8 і т.д. Узагальненням ознак подільності на 3 і 9 у тій же системі є

**Твердження 3.3.** *Нехай  $d$  є дільником числа  $m - 1$ . Число  $n = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  ділиться на  $d$  тоді й лише тоді, коли на  $d$  ділиться сума  $a_k + \dots + a_1 + a_0$  його цифр.*

*Доведення.* Із рівності  $m^r - 1 = (m - 1)(m^{r-1} + m^{r-2} + \dots + m + 1)$  випливає, що кожне з чисел  $m - 1, m^2 - 1, \dots, m^k - 1$  ділиться на  $d$ . Записуючи  $n$  у вигляді  $n = a_k m^k + \dots + a_1 m + a_0 = a_k(m^k - 1) + \dots + a_1(m - 1) + (a_k + \dots + a_1 + a_0)$ , бачимо, що всі доданки, крім останнього, напевне

ділиться на  $d$ . Тому для подільності  $n$  на  $d$  необхідно й достатньо, щоб і останній доданок  $a_k + \dots + a_1 + a_0$  також ділився на  $d$ .  $\square$

**Вправа 3.1.** Число  $l$  одержано з числа  $n = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  перестановкою цифр. Довести, що число  $n - l$  ділиться на  $m - 1$ .

**Твердження 3.4.** Нехай  $d$  є дільником числа  $m + 1$ . Число  $n = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  ділиться на  $d$  тоді й лише тоді, коли на  $d$  ділиться сума  $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$ .

**Доведення.** За допомогою індукції легко довести, що для кожного натурального  $r$  число  $m^r$  можна записати у вигляді  $m^r = (-1)^r + A_r \cdot (m + 1)$ , де  $A_r$  – ціле число. Справді, для  $r = 1$  і  $r = 2$  це очевидно:  $m^1 = (-1)^1 + 1 \cdot (m + 1)$ ,  $m^2 = (-1)^2 + (m - 1) \cdot (m + 1)$ . Індукційний крок також перевіряється просто. Якщо  $r > 2$ , то  $m^r = m^{r-2} \cdot m^2 = ((-1)^{r-2} + A_{r-2}(m + 1)) \cdot ((-1)^2 + (m - 1)(m + 1)) = (-1)^r + ((-1)^{r-2}(m - 1) + (-1)^2 A_{r-2} + A_{r-2}(m^2 - 1)) \cdot (m + 1) = (-1)^r + A_r(m + 1)$ , де  $A_r = (-1)^{r-2}(m - 1) + (-1)^2 A_{r-2} + A_{r-2}(m^2 - 1)$ . Тоді  $n$  можна записати у вигляді  $n = a_k m^k + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = a_k((-1)^k + A_k(m + 1)) + \dots + a_2((-1)^2 + A_2(m + 1)) + a_1((-1)^1 + A_1(m + 1)) + a_0 = (a_k A_k + \dots + a_2 A_2 + a_1 A_1)(m + 1) + (-1)^k a_k + \dots + a_2 - a_1 + a_0$ . Оскільки перший доданок ділиться на  $d$ , бо кратний  $m + 1$ , то для подільності на  $d$  числа  $n$  необхідно й достатньо, щоб на  $d$  ділився і другий доданок  $(-1)^k a_k + \dots + a_2 - a_1 + a_0$ .  $\square$

**Задача 3.4.** Знайти всі такі основи  $m$ , що в  $m$ -ковій системі виконується кожна із вказаних ознак подільності:

- 1) число  $n$  ділиться на 5 тоді й лише тоді, коли сума його цифр ділиться на 5;
- 2) число  $n$  ділиться на 8 тоді й лише тоді, коли число, утворене двома останніми цифрами числа  $n$ , ділиться на 8.

**Розв'язання.** Із рівностей  $5 = 101_2 = 12_3 = 11_4$  випливає, що в системах з основами 2, 3 і 4 не виконується перша ознака. Тому  $m \geq 5$ . Якщо в системі з основою  $m$  виконується перша ознака, то кожне з чисел  $2m+3$  і  $3m+2$  ділиться на 5. Тому на 5 ділиться і число  $(3m+2)-(2m+3) = m-1$ . З іншого боку, за твердженням 3.3 умова  $5|m-1$  достатня для виконання першої ознаки. Друга ознака виконується тоді й лише тоді, коли  $8|m^2$ , а для цього необхідно й достатньо, щоб  $4|m$ . Таким чином, обидві ознаки виконуються тоді і тільки тоді, коли  $m$  задовольняє дві умови:  $5|m-1$  і  $4|m$ . Найменшим натуральним числом, що задовольняє ці умови,

є 16. Щоб знайти всі  $m$ , зауважимо, що умови  $5|m - 1$  і  $4|m$  рівносильні умовам  $5|m - 16$  і  $4|m - 16$ . Оскільки 5 і 4 взаємно прості, то  $m - 16$  ділиться на  $5 \cdot 4 = 20$ . Тому  $m - 16 = 20k$  і  $m = 16 + 20k$ , де  $k \in \mathbb{N}$ . Із тверджень 3.2 і 3.3 випливає, що всі такі  $m$  справді задовільняють умову задачі.  $\square$

### 3.5. Систематичні дроби

Як і десяткову систему з її десятковими дробами, кожну позиційну систему числення можна використати для зображення довільних дійсних чисел. Основу ж системи вважатимемо фіксованою.

Нехай  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  – нескінчена послідовність  $m$ -кових цифр, в якій є нескінченно багато цифр, відмінних від  $m - 1$  (тобто ми не розглядаємо послідовності, “хвіст” яких містить лише цифру  $m - 1$ ). Нескінчений ряд

$$\frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \frac{\alpha_3}{m^3} + \cdots + \frac{\alpha_k}{m^k} + \cdots \quad (3.5)$$

називається *систематичним  $m$ -ковим дробом* (або просто  $m$ -ковим дробом) і звичайно позначається

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots . \quad (3.6)$$

Якщо в послідовності  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ , починаючи з певного місця, зустрічаються лише нулі, то дріб (3.5) називається *скінченим*. У противному разі він називається *нескінченим*. Для скінчених дробів “хвіст” із нулів звичайно не вписують і замість (3.6) вживають скорочене позначення  $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k$ . Наприклад, дріб  $0,011000\dots$  (починаючи з 4-го місця йдуть лише нулі) може позначатись або  $0,011$ , або  $0,0110$ , або  $0,01100$  і т.д.

Із нерівностей  $0 \leq \alpha_i \leq m - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$  і того, що серед цифр дробу є відмінні від  $m - 1$ , випливає, що

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \frac{\alpha_3}{m^3} + \cdots < \frac{m-1}{m} + \frac{m-1}{m^2} + \frac{m-1}{m^3} + \cdots = \\ &\frac{m-1}{m} \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \cdots\right) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд (3.5) завжди збігається і його сума  $\alpha$  належить проміжку  $[0, 1]$ . Говорять, що число  $\alpha$  зображується дробом (3.6), або що дріб (3.6) дорівнює  $\alpha$ , і пишуть  $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots$ .

**Теорема 3.2.** Кожне дійсне число  $\alpha \in [0, 1)$  зображується деяким  $m$ -ковим дробом. Таке зображення однозначне.

*Доведення.* Існування зображення. Побудуємо ланцюжок рівностей

$$m\alpha = \alpha_1 + \beta_1, \text{ де } \alpha_1 = [m\alpha], \beta_1 = \{m\alpha\};$$

$$m\beta_1 = \alpha_2 + \beta_2, \text{ де } \alpha_2 = [m\beta_1], \beta_2 = \{m\beta_1\};$$

$$m\beta_2 = \alpha_3 + \beta_3, \text{ де } \alpha_3 = [m\beta_2], \beta_3 = \{m\beta_2\}; \text{ і т.д.}$$

За умовою теореми та означенням дробової частини числа всі числа  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  належать проміжку  $[0, 1)$ , тому всі числа  $m\alpha, m\beta_1, m\beta_2, \dots$  належать проміжку  $[0, m)$ , а всі числа  $\alpha_1 = [m\alpha], \alpha_2 = [m\beta_1], \alpha_3 = [m\beta_2], \dots$  – множині  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ . Тому числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  можна розглядати як  $m$ -кові цифри.

Доведемо, що  $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ , тобто що

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \frac{\alpha_3}{m^3} + \dots \quad (3.7)$$

Для цього розглянемо різницю  $\gamma_k = \alpha - (\frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{m^k})$ . Оскільки  $m^k \gamma_k = m^k \alpha - m^{k-1} \alpha_1 - m^{k-2} \alpha_2 - \dots - \alpha_k = m^{k-1} (m\alpha - \alpha_1) - m^{k-2} \alpha_2 - \dots - \alpha_k = m^{k-1} \beta_1 - m^{k-2} \alpha_2 - m^{k-3} \alpha_3 - \dots - \alpha_k = m^{k-2} (m\beta_1 - \alpha_2) - m^{k-3} \alpha_3 - \dots - \alpha_k = m^{k-2} \beta_2 - m^{k-3} \alpha_3 - \dots - \alpha_k = \dots = m\beta_{k-1} - \alpha_k = \beta_k$  і  $0 \leq \beta_k < 1$ , то  $0 \leq \gamma_k < \frac{1}{m^k}$ . Тому  $\gamma_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Отже, послідовність часткових сум ряду  $\frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{m^k} + \dots$  збігається до числа  $\alpha$ , що й доводить рівність (3.7).

Єдиність зображення. Треба довести, що різні дроби зображують різні дійсні числа. Нехай послідовності цифр  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  і  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  – різні, і нехай  $k$  – найменший номер позиції, в якій вони розрізняються (тобто  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ , але  $\alpha_k \neq \beta_k$ ). Без обмеження загальності можна вважати, що  $\alpha_k > \beta_k$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \frac{\alpha_3}{m^3} + \dots \right) - \left( \frac{\beta_1}{m} + \frac{\beta_2}{m^2} + \frac{\beta_3}{m^3} + \dots \right) = \\ & \frac{\alpha_k - \beta_k}{m^k} + \left( \frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{m^{k+1}} + \frac{\alpha_{k+2} - \beta_{k+2}}{m^{k+2}} + \dots \right) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

За означенням дробу серед цифр  $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots$  є нескінченно багато менших за  $m - 1$ , а тому серед чисел  $\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}, \alpha_{k+2} - \beta_{k+2}, \dots$  буде нескінченно багато більших за  $-(m - 1)$ . Звідси випливає, що

$$\frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{m^{k+1}} + \frac{\alpha_{k+2} - \beta_{k+2}}{m^{k+2}} + \dots > \frac{-(m - 1)}{m^{k+1}} + \frac{-(m - 1)}{m^{k+2}} + \dots =$$

$$= -\frac{m-1}{m^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \dots\right) = -\frac{m-1}{m^{k+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = -\frac{1}{m^k}.$$

З іншого боку,

$$\frac{\alpha_k - \beta_k}{m^k} \geq \frac{1}{m^k}.$$

Із цих нерівностей для доданків правої частини рівності (3.8) отримуємо:

$$\left(\frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \dots\right) - \left(\frac{\beta_1}{m} + \frac{\beta_2}{m^2} + \dots\right) > \frac{1}{m^k} - \frac{1}{m^k} = 0.$$

Таким чином, для чисел  $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  і  $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$  виконується нерівність  $\alpha - \beta > 0$ . Тому  $\alpha \neq \beta$ , що й треба було довести.  $\square$

**Зауваження.** Із доведення теореми 3.2 стає зрозумілим, звідки взялось обмеження на цифру  $m-1$  в означенні  $m$ -кового дробу. Воно потрібне для однозначності зображення дійсних чисел дробами. Без цього обмеження однозначності не було б. Справді, з рівності

$$\sum_{i \geq k} \frac{m-1}{m^i} = \frac{m-1}{m^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{1}{m^{k-1}}$$

випливає, що тоді дроби

$$0, \alpha_1 \dots \alpha_{k-2} 1000 \dots \text{ і } 0, \alpha_1 \dots \alpha_{k-2} 0 \overline{m-1} \overline{m-1} \dots$$

зображували б одне і те ж дійсне число.

Зображення дійсних чисел дробами легко узагальнюється спочатку на довільні додатні, а потім і на від'ємні числа. Додатне число  $a$  на основі рівності  $a = [a] + \{a\}$  зображується у вигляді  $a = a_k \dots a_1 a_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ , де  $[a] = (a_k \dots a_1 a_0)_m$  і  $\{a\} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ . Від'ємне число  $b$  записують у вигляді  $-|b|$ .

Зауважимо, що дроби вигляду  $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ , тобто з нульовою цілою частиною, інколи називають *правильними*.

**Вправа 3.2.** Довести, що в  $m$ -ковій системі числення з рівності  $a = a_k \dots a_1 a_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  випливає рівність  $m^p a = a_k \dots a_1 a_0 \alpha_1 \dots \alpha_p, \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \dots$

**Задача 3.5.** Знаючи початок  $\pi = 3, 1415926535 \dots$  десяткового розкладу числа  $\pi$ , знайти 20 знаків після коми у двійковому розкладі числа  $\pi$ .

*Розв'язання.* Із вправи 3.2 випливає, що задача рівносильна знаходженню двійкового розкладу числа  $[2^{20}\pi]$ . Оскільки  $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ , то  $3294198 < 2^{20}\pi < 3294199$ . Тому

$$[2^{20}\pi] = 3294198 = 110010010000111110110_2.$$

Таким чином, початок двійкового розкладу числа  $\pi$  має вигляд

$$\pi = (11,0010010000111110110\dots)_2. \quad \square$$

$m$ -ковий дріб  $\alpha = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  називається *періодичним*, якщо послідовність  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  його цифр є періодичною, тобто якщо існують такі числа  $k \geq 0$  і  $t \geq 1$ , що для всіх  $n > k$  виконується рівність  $\alpha_n = \alpha_{n+t}$ . Якщо для періодичного дробу  $\alpha = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  серед таких  $k$  вибрати найменше  $k_0$ , то  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k_0}$  називається *передперіодом* дробу  $\alpha$ , а саме число  $k_0$  – *довжиною передперіоду*. Аналогічно найменше з усіх можливих  $t$  число  $t_0$  називається *довжиною періоду*, а набір цифр  $\alpha_{k_0+1}\alpha_{k_0+2}\dots\alpha_{k_0+t_0}$  – *періодом дробу*.

Періодичний дріб, передперіод якого має нульову довжину, називається *чисто періодичним* дробом.

Періодичний дріб із довжиною передперіоду  $k$  і довжиною періоду  $t$  має вигляд

$$\alpha = a, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+t}\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+t}\alpha_{k+1}\dots$$

Оскільки після передперіоду цифри регулярно повторюються, то для періодичних дробів використовують позначення  $\alpha = a, \alpha_1\dots\alpha_k(\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+t})$ .

**Теорема 3.3.** В  $m$ -ковій системі числення кожне раціональне число зображується періодичним дробом. Навпаки, кожний періодичний дріб зображує певне раціональне число.

*Доведення.* Нехай  $\alpha = \frac{a}{b}$  – раціональне число. Нас цікавлять лише знаки після коми, тому можна вважати, що  $0 \leq \frac{a}{b} < 1$ . Із вправи 3.2 випливає, що перша цифра  $\alpha_1$  дробу  $\frac{a}{b} = 0$ ,  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  дорівнює  $\alpha_1 = [m\frac{a}{b}]$ , тобто  $\alpha_1$  визначається з рівності  $ma = \alpha_1 b + r_1$ ,  $0 \leq r_1 < b$ . Аналогічно, друга цифра  $\alpha_2$  визначається з рівності  $mr_1 = \alpha_2 b + r_2$ ,  $0 \leq r_2 < b$ , третя – з рівності  $mr_2 = \alpha_3 b + r_3$ ,  $0 \leq r_3 < b$  і т.д. Але всі члени послідовності  $a, r_1, r_2, r_3, \dots$  належать скінченій множині  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ , тому рано чи пізно якийсь із них повториться. Отже, існують такі натуральні

числа  $k$  і  $t$ , що  $r_k = r_{k+t}$ . Але тоді  $mr_{k+t} = mr_k = \alpha_{k+1}b + r_{k+1}$ . З іншого боку,  $mr_{k+t} = \alpha_{k+t+1}b + r_{k+t+1}$ . Із однозначності ділення з остачею випливає, що  $\alpha_{k+t+1} = \alpha_{k+1}$  і  $r_{k+t+1} = r_{k+1}$ . Аналогічно доводиться, що  $\alpha_{k+t+2} = \alpha_{k+2}$  і  $r_{k+t+2} = r_{k+2}$ , і т.д. Отже, дріб  $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  – періодичний.

Навпаки, нехай дріб  $\alpha = 0, \alpha_1\dots\alpha_k(\beta_1\dots\beta_t)$  – періодичний. Познавши для зручності  $A = (\alpha_1\dots\alpha_k)_m$ ,  $B = (\beta_1\dots\beta_t)_m$ , ми можемо записати число  $\alpha$  у вигляді ряду

$$\alpha = \frac{A}{m^k} + \frac{B}{m^k \cdot m^t} + \frac{B}{m^k \cdot m^{2t}} + \frac{B}{m^k \cdot m^{3t}} + \dots$$

Але тоді

$$\alpha = \frac{A}{m^k} + \frac{B}{m^{k+t}} \left(1 + \frac{1}{m^t} + \frac{1}{m^{2t}} + \dots\right) = \frac{A}{m^k} + \frac{B}{m^{k+t}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m^t}} = \frac{A(m^t - 1) + B}{m^k(m^t - 1)}.$$

Числа  $A$  і  $B$  – цілі, тому  $\alpha$  – раціональне число.  $\square$

Із доведення першої частини теореми випливає, що перше повторення в послідовності  $a, r_1, r_2, r_3, \dots$  трапиться не пізніше, ніж на  $(b+1)$ -му кроці. Тому одержуємо такий

**Наслідок 1.** У зображенії раціонального числа  $\frac{a}{b}$  т-ковим дробом су-  
ма довжин періоду і передперіоду не перевищує  $b$ .

**Задача 3.6.** Зобразити 7-ковим дробом число  $\frac{3}{10}$ .

*Розв'язання.*  $3 = 3_7$ ,  $10 = 13_7$ . Виконуючи ділення в 7-ковій системі (нижній індекс 7 далі опускаємо), одержуємо:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \ 3 \\ 3 \ 0 & \quad | \quad 0, \ 2 \ 0 \ 4 \ 6 \\ - 2 \ 6 & \\ \hline 1 \ 0 & \\ - 1 \ 0 \ 0 & \\ \hline 5 \ 5 & \\ - 1 \ 2 \ 0 & \\ \hline 1 \ 1 \ 4 & \\ - 1 \ 1 \ 4 & \\ \hline 3 & \end{array} .$$

Таким чином, у послідовності остат  $3, 1, 10, 12, 3, \dots$  відбулось перше повторення. Тому далі остаті, а разом із ними і цифри дробу, будуть періодично повторюватись. Отже, шуканим дробом є  $0, (2046)_7$ .  $\square$

З'ясуємо що, коли раціональне число  $\frac{a}{b}$  зображується в  $m$ -ковій системі числення скінченим дробом. Знову досить обмежитись випадком  $0 \leq \frac{a}{b} < 1$ . Крім того, вважаємо дріб  $\frac{a}{b}$  нескоротним. Із рівності

$$\frac{a}{b} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \frac{\alpha_1}{m} + \frac{\alpha_2}{m^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{m^k} = \frac{\alpha_1 m^{k-1} + \alpha_2 m^{k-2} + \dots + \alpha_k}{m^k}$$

одержуємо:  $am^k = b(\alpha_1 m^{k-1} + \alpha_2 m^{k-2} + \dots + \alpha_k)$ . Отже,  $b|am^k$ . За твердженням 1.2(b) із взаємної простоти чисел  $a$  і  $b$  випливає, що  $b|m^k$ .

Навпаки, нехай для якогось  $k$  маємо  $b|m^k$ . Тоді  $m^k$  можна записати у вигляді  $m^k = b \cdot b_1$ , звідки

$$\frac{a}{b} = \frac{m^k a}{m^k b} = \frac{b b_1 a}{m^k b} = \frac{b_1 a}{m^k}.$$

За умовою  $0 \leq \frac{a}{b} < 1$ , тому  $0 \leq b_1 a < m^k$  і запис числа  $b_1 a$  в  $m$ -ковій системі містить не більше  $k$  цифр. Дописавши, в разі потреби, кілька нулів попереду, можемо вважати, що  $b_1 a = (\alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_1 \alpha_0)_m = \alpha_{k-1} m^{k-1} + \alpha_{k-2} m^{k-2} + \dots + \alpha_1 m + \alpha_0$ . Але тоді

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\alpha_{k-1} m^{k-1} + \alpha_{k-2} m^{k-2} + \dots + \alpha_1 m + \alpha_0}{m^k} = \\ &= \frac{\alpha_{k-1}}{m} + \frac{\alpha_{k-2}}{m^2} + \dots + \frac{\alpha_1}{m^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{m^k} = (0, \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \dots \alpha_1 \alpha_0)_m, \end{aligned}$$

тобто число  $\frac{a}{b}$  зображується в  $m$ -ковій системі скінченим дробом.

Сформулюємо одержаний результат:

**Теорема 3.4.** *Нескоротний дріб  $\frac{a}{b}$  зображується в  $m$ -ковій системі числення скінченим дробом тоді й лише тоді, коли  $b|m^k$  для деякого натурального числа  $k$ .*

**Вправа 3.3.** *Довести, що деякий степінь числа  $m$  ділиться на  $b$  тоді й лише тоді, коли кожний простий дільник числа  $b$  буде дільником  $m$ .*

### 3.6. Нестандартні системи числення

Позиційні системи числення, які ми розглядали досі, можна назвати *стандартними*. У сучасній математиці розглядаються й інші типи позиційних систем. Ми лише коротко обговоримо деякі з них. Детальніше про ці й інші системи можна прочитати в [6] (глава 4).

(a) *Від'ємно-позиційні системи.* Так називаються позиційні системи з від'ємною основою  $m \leq -2$ . Наприклад, число 1078574 у системі числення з основою  $-5$  записується як  $1078574 = (324012315)_{-5} = 3 \cdot (-5)^8 + 2 \cdot (-5)^7 + 4 \cdot (-5)^6 + 1 \cdot (-5)^4 + 2 \cdot (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 + 1 \cdot (-5) + 4$ . Як і в стандартній позиційній системі з основою  $|m|$ , цифри у від'ємно-позиційній системі з основою  $m$  – це елементи множини  $\{0, 1, 2, \dots, |m| - 1\}$ .

Цікаво, що у від'ємно-позиційних системах додатні і від'ємні числа рівноправні в тому сенсі, що для зображення від'ємних чисел не потрібен знак. Наприклад, у системі з основою  $-5$  число  $-6019$  записується як  $-6019 = (213041)_{-5}$ . Правило додавання у від'ємно-позиційних системах трохи складніше звичайного, бо при переповненні розряду перенос робиться зразу в два наступних розряди. Наприклад,  $3 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5)^2 = 7 \cdot (-5)^2 = 5 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot (-5)^2 = (-5)^4 + 4 \cdot (-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2$ , тобто

$$\begin{array}{r} (3 \ 0 \ 0)_5 \\ + (4 \ 0 \ 0)_5 \\ \hline (1 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0)_5 \end{array} .$$

Зате в таких системах стає непотрібним правило знаків для множення.

На від'ємно-позиційні системи можна поширити й поняття систематичного дробу, що дозволяє використовувати такі системи для зображення довільних дійсних чисел.

**Вправа 3.4.** Сформулюйте правило переносу при переповненні розряду для додавання цілих чисел, записаних у від'ємно-позиційній системі з основою  $-5$ .

(b) Для зображення комплексних чисел певного поширення набула позиційна система числення з основою  $2i$ . Виявляється, що кожне комплексне число  $z$  однозначно зображується у вигляді

$$z = a_k(2i)^k + a_{k-1}(2i)^{k-1} + \dots + a_1(2i) + a_0 + \frac{a_{-1}}{(2i)^1} + \frac{a_{-2}}{(2i)^2} + \dots,$$

де цифри  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$  беруться з множини  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Наприклад,  $20, 5 + 23, 5i = (121301, 12)_{2i} = 1 \cdot (2i)^5 + 2 \cdot (2i)^4 + 1 \cdot (2i)^3 + 3 \cdot (2i)^2 + 1 + 1 \cdot (2i)^{-1} + 2 \cdot (2i)^{-2} = 1 \cdot (32i) + 2 \cdot (-16) + 1 \cdot (-8i) + 3 \cdot (-4) + 1 + 1 \cdot (-\frac{1}{2}i) + 2 \cdot (-\frac{1}{4})$ . Рівності  $(2i)^{2k} = ((2i)^2)^k = (-4)^k$  і  $(2i)^{2k+1} = 2i \cdot (-4)^k$  дозволяють (за посередництвом від'ємно-позиційної системи з основою  $-4$ ) легко переходити від зображення комплексних чисел у позиційній

системі з основою  $2i$  до звичного запису в алгебричній формі і навпаки:  $(a_{2n}a_{2n-1}\dots a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}\dots)_{2i} = (a_{2n}\dots a_2a_0, a_{-2}a_{-4}\dots)_{-4} + 2i(a_{2n-1}\dots a_1, a_{-1}a_{-3}\dots)_{-4}$ . Привабливою рисою цієї і подібних їй систем зображення комплексних чисел є те, що вони не вимагають розгляду окремо дійсної й уявної частин числа і дозволяють додавати і множити комплексні числа як ціліні об'єкти за правилами, дуже схожими на відповідні правила в стандартних позиційних системах, лише трохи ускладнюється правило переносу.

**Вправа 3.5.** Сформулюйте правило переносу при переповненні розряду для додавання комплексних чисел, записаних у системі числення з основою  $2i$ .

(c) Врівноважена трійкова система. Спочатку розглянемо дві задачі.

**Задача 3.7.** Яку найменшу кількість важків потрібно, щоб на шалькових терезах можна було зважити будь-який вантаж вагою до  $100\text{g}$  (вага є цілим числом грамів, а важки можна ставити лише на одну шальку).

*Розв'язання.* Занумеруємо важки і нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – їх ваги. Будь-яку вагу, зважену за допомогою цих важків можна записати у вигляді  $\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \dots + \alpha_na_n$ , де  $\alpha_i = 1$ , якщо важок  $a_i$  стоїть на шальці, і  $\alpha_i = 0$  в протилежному разі. Існує лише  $2^n$  наборів із нулів і одиничок. Тому  $2^n \geq 100$ , або  $n \geq 7$ , бо  $n$  – ціле число. З іншого боку, 7 важків вагою 1, 2, 4, 8, 16, 32, і 64 відповідно досить. Справді, зважування за допомогою цих важків рівносильне зображенню ваги у двійковій системі числення, а в цій системі для запису кожного числа  $k < 128$  потрібно не більше 7 цифр.  $\square$

**Задача 3.8.** Якою буде найменша необхідна кількість важків, якщо в попередній задачі дозволити ставити важки на будь-яку шальку терезів.

*Розв'язання.* Будемо класти вантаж на ліву шальку. Тоді, користуючись позначеннями попередньої задачі, вагу вантажу можна записати у вигляді  $\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \dots + \alpha_na_n$ , де  $\alpha_i = 1$ , якщо важок  $a_i$  стоїть на правій шальці,  $\alpha_i = -1$ , якщо він стоїть на лівій шальці, і  $\alpha_i = 0$ , якщо важок  $a_i$  на жодну шальку не ставився. Тепер наборів буде  $3^n$  і має виконуватись нерівність  $3^n \geq 100$ , або  $n \geq 5$ . З іншого боку, 5 важків вагою

1, 3, 9, 27 і 81 відповідно досить, щоб у такий спосіб зважити будь-яку вагу до 121г (обґрунтуйте останнє твердження самостійно).  $\square$

Остання задача відома як “задача Баше про ваги”. Зауважимо, що в цьому, як і в багатьох інших випадках, історична справедливість порушена: за багато століть до Баше цю задачу розглядав Фіbonacci.

Використання важків 1, 3, 9, 27, ... в задачі 3.8 можна розглядати як запис цілого числа в так званій *врівноваженій трійковій системі числення*:

$$n = a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0, \quad (3.9)$$

де цифри  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$  беруться не з множини  $\{0, 1, 2\}$ , а з  $\{-1, 0, 1\}$ . Наприклад,  $62 = 1 \cdot 3^4 - 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 - 1$ .

Замість цифри  $-1$  частіше пишуть  $\bar{1}$ . Тоді число 62 записують як  $\bar{1}\bar{1}10\bar{1}$ .

**Твердження 3.5.** *Кожне натуральне число можна записати у врівноваженій трійковій системі числення.*

**Доведення.** Скористаємося математичною індукцією. Припустимо, що число  $n$  вже записано в цій системі, і запис має вигляд  $n = a_m \dots a_{k+1} a_k 1 \dots 1$ , де  $k \geq 0$  і  $a_k \neq 1$ . Тоді з рівності  $3^k - 3^{k-1} - \dots - 3 - 1 = (3^{k-1} + \dots + 3 + 1) + 1$  випливає, що  $n + 1 = a_m \dots a_{k+1} a'_k \bar{1} \dots \bar{1}$ , де цифра  $a'_k$  більша на 1 за  $a_k$ .  $\square$

Серед багатьох цікавих властивостей врівноваженої трійкової системи опишемо лише кілька:

1) Записи протилежних чисел  $n$  і  $-n$  одержуються один з одного заміною кожної цифри 1 на  $\bar{1}$  і навпаки. Це одразу випливає з рівності (3.9).

2) Знак числа визначається найдавнішою ненульовою цифрою. Наприклад,  $-74 = \bar{1}01\bar{1}1$ ,  $169 = 1\bar{1}0111$ .

3) Порядок, який цілі числа породжують на множині своїх записів у врівноваженій трійковій системі, збігається з лексикографічним. Тому в цій системі порівнювати числа можна так само, як і в звичайній десятковій: читаючи числа зліва направо.

4) У врівноваженій трійковій системі дуже просто виконуються арифметичні дії. Наприклад, таблиця додавання для одноцифрових чисел

має вигляд

+	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0
0	$\bar{1}$	0	1
1	0	1	$\bar{1}\bar{1}$

Віднімання  $a - b$  зводиться до додавання після заміни  $b$  протилежним числом  $-b$ . Наявність лише двох ненульових цифр  $1$  і  $\bar{1}$  дозволяє і множення звести до заміни знаку і додавання. Перемножимо, наприклад, числа  $73 = 10\bar{1}01$  і  $23 = 10\bar{1}\bar{1}$ :

$$\begin{array}{r}
 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 \\
 \times & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} \\
 \hline
 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} \\
 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} \\
 \hline
 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & (= 1679) .
 \end{array}$$

5) Для зображення у врівноваженій трійковій системі довільних дійсних чисел можна використовувати систематичні дроби. Цікаво, що округлення числа до найближчого цілого зводитиметься просто до відкидання всіх цифр після коми (аналогічне правило можна сформулювати і для округлення до будь-якого розряду).

Легкість виконання арифметичних дій і простота технічної реалізації цифр  $\bar{1}$ ,  $0$ ,  $1$  (наприклад, струм в одному напрямку; відсутність струму; струм у протилежному напрямку) спричинили те, що врівноважена трійкова система числення постійно розглядається як можлива альтернатива двійковій системі в ЕОМ. Були навіть побудовані дослідні зразки машин із врівноваженою трійкою арифметикою.

(d) Від'ємні цифри можна використовувати і в позиційних системах числення з основою  $m > 3$ . Наприклад, число  $118$  в четвірковій системі з цифрами  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ , в п'ятірковій системі з цифрами  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$  і в п'ятірковій системі з цифрами  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  запишеться відповідно як  $118 = 2 \cdot 4^3 - 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2 = 2\bar{1}12$ ;  $118 = 1 \cdot 5^3 - 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 = 1\bar{1}33$ ;  $118 = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 - 1 \cdot 5 - 2 = 10\bar{1}\bar{2}$ .

Уперше такі системи числення з'являються ще на початку XIX ст. Однак великого поширення вони не набули.

(e) Важливим узагальненням позиційних систем числення є *позиційні системи зі змінною основою* (їх ще називають системи зі змішаними основами). У звичайній позиційній системі з основою  $m$  “вага” одиниці

розряду, починаючи з нульового, дорівнює відповідно  $1, m, m^2, m^3, \dots$ . У системі зі змінною основою задається нескінчена послідовність  $m_0, m_1, m_2, \dots$  натуральних чисел (основ розрядів), а “вага” одиниці розряду дорівнює відповідно  $1, m_0, m_1 m_0, m_2 m_1 m_0, \dots$ . У такій системі число зображується у вигляді  $n = a_k m_{k-1} m_{k-2} \dots m_1 m_0 + a_{k-1} m_{k-2} \dots m_1 m_0 + a_2 m_1 m_0 + a_1 m_0 + a_0$ , де  $i$ -та цифра  $a_i$  береться з множини  $\{0, 1, \dots, m_i - 1\}$  (зокрема, для кожного розряду – свій набір цифр).

Численні приклади таких позиційних систем дають *системи мір* різних народів. Наприклад, час ми вимірюємо в системі, де одиниці розрядів називаються секундою, хвилиною, годиною, днем, тижнем, місяцем, роком, ..., а послідовність основ має вигляд  $60, 60, 24, 7, 4, 12, \dots$

Серед позиційних систем зі змінними основами математиків найбільше приваблює *факторіальна система числення* з послідовністю основ  $2, 3, 4, \dots, k, k+1, \dots$ . У такій системі кожне натуральне число  $n$  єдиним чином зображується у вигляді  $n = a_k \cdot k! + a_{k-1} \cdot (k-1)! + \dots + a_3 \cdot 3! + a_2 \cdot 2! + a_1$ , де  $i$ -та цифра  $a_i$  береться з множини  $\{0, 1, 2, \dots, i\}$ .

(f) *Система числення Фібоначчі*. Розглянемо послідовність чисел Фібоначчі  $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots$ , члени якої для  $n \geq 1$  задовільняють співвідношення  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ . Тоді довільне натуральне число  $n$  можна подати у вигляді

$$n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \dots + a_1 F_1 + a_0 F_0 , \quad (3.10)$$

де кожний з коефіцієнтів  $a_k, \dots, a_1, a_0$  дорівнює 0 або 1. Коротко рівність (3.10) записують як  $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0_F$ . Таке зображення числа  $n$  неоднозначне. Наприклад,  $12 = 11111_F = 100111_F = 101001_F$ . Однозначності можна досягти, якщо вимагати, щоб серед цифр  $a_k, \dots, a_1, a_0$  не було двох одиничок підряд. Існування такого зображення довести легко. Справді, з рівності  $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$  випливає, що дві сусідні одинички можна замінити нулями, додавши одиничку до наступного розряду. Якщо кожного разу таку процедуру робити з крайніми лівими сусідніми одиничками, то кожного разу кількість одиничок зменшувається на 1. Тому рано чи пізно сусідніх одиничок не залишиться. Однозначність зображення без сусідніх одиничок можна довести за допомогою індукції.

Доведення цих фактів, правила виконання арифметичних операцій, застосування в обчислювальній і вимірювальній техніці і багато інших цікавих речей про систему числення Фібоначчі можна знайти в [8].

### 3.7. Задачі для самостійного розв'язування

1. Записати число  $n$  в системі числення з основою  $m$ :  
(a)  $n = 39481$ ,  $m = 2$ ; (b)  $n = 42375$ ,  $m = 2$ ; (c)  $n = 72615052$ ,  $m = 5$ ;  
(d)  $n = 59483726$ ,  $m = 5$ ; (e)  $n = 3085307$ ,  $m = 13$ ; (f)  $n = 4297429$ ,  
 $m = 13$ .
2. Знайти число  $n$ , якщо  $n = (abc)_7 = (cba)_9$ .
3. Знайти 8-цифрове число  $n = (abcdefgh)_{10}$ , якщо числа  $(abcd)_{10}$  і  
 $(efgh)_{10}$  відрізняються на одиницю.
4. Побудувати таблицю множення для системи числення з основою:  
(a) 6; (b) 8.
5. Обчислити суму всіх елементів у таблиці множення для системи  
числення з основою  $m$ .
6. Обчислити значення виразу  $(42501^2 + 142035)(352140 - 225 \cdot 342)$ ,  
якщо всі числа записані в системі числення з основою:  
(a) 6; (b) 7; (c) 7; (d) 11.
7. Розділити з остаточею:  
(a)  $354122_7$  на  $211_7$ ; (b)  $491820_{11}$  на  $125_{11}$ ; (c)  $271423_8$  на  $471_8$ ;  
(d)  $3521402_6$  на  $242_6$ ; (e)  $101100010111011_2$  на  $11011_2$ ;  
(f)  $111011010011010_2$  на  $10111_2$ .
8. Записати числа:  
(a)  $1011100101101001_2$ , (b)  $12030122133_4$ , (c)  $3514621_7$ , (d)  $14712541_8$ ,  
(e)  $251493_{11}$ , (f)  $172943_{12}$   
у десятковій системі числення.
9. Записати кожне з чисел задачі 8 у системі числення з основою:  
(a) 3; (b) 5; (c) 9.
10. Довести такі твердження:  
(a) якщо десятковий запис числа  $n$  містить 30 одиниць, а решта  
цифр – нулі, то  $n$  не є точним квадратом;  
(b) якщо в десятковому записі числа  $n$  сума цифр дорівнює 50, то  
 $n$  не є точним квадратом.

11. Знайти всі такі основи  $m$ , що в  $m$ -ковій системі виконується кожна із вказаних ознак подільності:
- число  $n$  ділиться на 7 тоді й лише тоді, коли сума його цифр ділиться на 7;
  - число  $n$  ділиться на 24 тоді й лише тоді, коли число, утворене двома останніми цифрами числа  $n$ , ділиться на 24.
12. Враховуючи, що  $999 = 27 \cdot 37$  і  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ , сформулювати і довести для чисел, записаних у десятковій системі, ознаки подільності на 27, 37, 7 і 13.
13. Сформулювати й довести ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 7 і 9 для чисел, записаних у 8-ковій системі числення.
14. Сформулювати й довести ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 і 13 для чисел, записаних у 12-ковій системі числення.
15. Знайти перші 10 знаків після коми у двійковому розкладі числа:  
 (a)  $\sqrt{2}$ ; (b)  $\sqrt{5}$ ; (c)  $\sqrt[3]{3}$ ; (d)  $e$ .
16. Знайти перші 10 знаків після коми у трійковому розкладі числа:  
 (a)  $\sqrt{3}$ ; (b)  $\sqrt{5}$ ; (c)  $\sqrt{8}$ ; (d)  $\sqrt[3]{2}$ .
17. Записати у вигляді періодичного дробу в трійковій системі числення число:  
 (a)  $\frac{5}{7}$ ; (b)  $\frac{5}{8}$ ; (c)  $\frac{3}{16}$ ; (d)  $\frac{6}{13}$ ; (e)  $\frac{7}{11}$ .
18. Записати у вигляді періодичного дробу в системі числення з основою 7 число:  
 (a)  $\frac{3}{8}$ ; (b)  $\frac{2}{9}$ ; (c)  $\frac{4}{19}$ ; (d)  $\frac{5}{16}$ ; (e)  $\frac{7}{24}$ .
19. Записати у вигляді звичайного дробу періодичний дріб:  
 (a) 0, (101001011)<sub>2</sub>; (b) 0, (1201102)<sub>3</sub>; (c) 0, (231420)<sub>5</sub>; (d) 0, (13562)<sub>7</sub>; (e) 0, (37214)<sub>8</sub>.
20. Яким може бути знаменник  $b$ , якщо при записі звичайного дробу  $\frac{a}{b}$  у вигляді десяткового дробу довжина періоду дорівнює  
 (a) 2; (b) 3; (c) 4?

21. Сформулювати й обґрунтувати правило додавання двох натуральних чисел, записаних у системі Фібоначчі.
22. Записати кожне число з множини  $\{-10, -9, -8, \dots, 9, 10\}$  у системі числення:
  - (a) з основою  $-2$ ; (b) з основою  $-3$ .
23. Записати у врівноваженій трійковій системі кожне число з множини
  - (a)  $\{30, 31, 32, 33, 34\}$ ; (b)  $\{36, 37, 38, 39, 40\}$ ; (c)  $\{70, 71, \dots, 79, 80\}$ ;
  - (d)  $\{110, 111, \dots, 119, 120\}$ .
24. Довести, що кожне ціле число можна записати
  - (a) в 4-ковій системі числення за допомогою цифр  $\{-1, 0, 1, 2\}$ ;
  - (b) в 5-ковій системі числення за допомогою цифр  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
25. Сформулювати й обґрунтувати алгоритми збільшення на 1 і зменшення на 1 числа, записаного
  - (a) в двійковій системі числення;
  - (b) у трійковій системі числення;
  - (c) у від'ємно–позиційній системі з основою  $-2$ ;
  - (d) у від'ємно–позиційній системі з основою  $-3$ ;
  - (e) у трійковій врівноваженій системі числення;
  - (f) у 4-ковій системі числення із цифрами  $-1, 0, 1, 2$ .