

2. Числові функції

2.1. Мультиплікативні функції

Функція $f(n)$, що визначена на множині всіх натуральних чисел і набуває дійсних значень, називається *мультиплікативною*, якщо виконуються такі умови:

- (a) функція $f(n)$ не є тотожно рівною нулю;
- (b) для довільних взаємно простих натуральних чисел m і n виконується рівність $f(mn) = f(m)f(n)$.

Прикладом мультиплікативної функції є $f(n) = n^s$, де s – фіксоване дійсне число.

Відзначимо дві властивості мультиплікативних функцій:

$$1) f(1) = 1.$$

Справді, нехай число $a \in \mathbb{N}$ таке, що $f(a) \neq 0$. Тоді $f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) \cdot f(a)$, отже, $f(1) = 1$.

2) Якщо f та g – мультиплікативні функції, то їх добуток fg також є мультиплікативною функцією.

Справді, $(fg)(1) = f(1)g(1) = 1 \cdot 1 = 1$, тому функція $f(n)$ не є тотожно рівною нулю. Крім цього, для взаємно простих чисел m і n отримуємо: $(fg)(mn) = f(mn)g(mn) = f(m)f(n)g(m)g(n) = f(m)g(m)f(n)g(n) = (fg)(m)(fg)(n)$.

Наступна конструкція дозволяє будувати нові мультиплікативні функції. Для довільної визначененої на множині натуральних чисел функції $f(n)$ розглянемо функцію $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ (тобто сума береться по всім натуральним дільникам d числа n), яка називається *суматорною* функцією для функції $f(n)$.

Теорема 2.1. *Функція $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ буде мультиплікативною тоді й лише тоді, коли мультиплікативною буде її суматорна функція $F(n)$.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція f – мультиплікативна. Для взаємно простих чисел m і n кожний дільник d числа mn однозначно записується у вигляді $d = lt$, де $l|m$ і $t|n$, тому маємо:

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{l|m} \sum_{t|n} f(lt) = \sum_{l|m} f(l) \sum_{t|n} f(t) = F(m)F(n).$$

Отже, суматорна функція $F(n)$ є мультиплікативною.

Достатність. Нехай функція $F(n)$ – мультиплікативна. Тоді $f(1) = F(1) = 1$. Очевидно, що $f(1 \cdot 1) = f(1) = 1 = 1 \cdot 1 = f(1) \cdot f(1)$. Нехай тепер m і n – довільні взаємно прості числа. Припустимо, що для всіх взаємно простих чисел l і t , таких, що $lt < mn$, рівність $f(lt) = f(l)f(t)$ уже доведена, і покажемо, що $f(mn) = f(m)f(n)$. Справді,

$$\sum_{l|m} \sum_{t|n} f(lt) = F(mn) = F(m)F(n) = \sum_{l|m} f(l) \sum_{t|n} f(t). \quad (2.1)$$

Розпишемо ліву і праву суми таким чином:

$$\begin{aligned} \sum_{l|m} \sum_{t|n} f(lt) &= \sum_{\substack{l|m \\ l \neq m}} f(lt) + \sum_{\substack{t|n \\ l \neq m}} f(mt) = \sum_{\substack{l|m \\ l \neq m}} f(lt) + \sum_{\substack{t|n \\ t \neq n}} f(mt) + f(mn), \\ \sum_{l|m} f(l) \sum_{t|n} f(t) &= \sum_{l|m} \sum_{t|n} f(l)f(t) = \sum_{\substack{l|m \\ l \neq m}} f(l)f(t) + \sum_{\substack{t|n \\ t \neq n}} f(m)f(t) + f(m)f(n). \end{aligned}$$

За припущенням $f(lt) = f(l)f(t)$, поки $lt < mn$. Тому

$$\sum_{\substack{l|m \\ l \neq m}} f(lt) = \sum_{\substack{l|m \\ l \neq m}} f(l)f(t) \text{ і } \sum_{\substack{t|n \\ t \neq n}} f(mt) = \sum_{\substack{t|n \\ t \neq n}} f(m)f(t).$$

Із рівності (2.1) тепер випливає $f(mn) = f(m)f(n)$, що й вимагалось. \square

Теорема 2.2. *Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n . Тоді для мультиплікативної функції $f(n)$ ії суматорна функція $F(n)$ дорівнює*

$$F(n) = (1 + f(p_1) + f(p_1^2) + f(p_1^{\alpha_1})) \cdots (1 + f(p_k) + f(p_k^2) + f(p_k^{\alpha_k})). \quad (2.2)$$

Доведення. Після розкриття дужок у правій частині рівності (2.2) отримаємо суму доданків вигляду $f(p_1^{\beta_1}) \cdots f(p_k^{\beta_k}) = f(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k})$, де $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$, причому для кожного можливого набору $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ буде зустрічатись рівно один доданок. Але коли набір $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ пробігає всі можливі значення, то добуток $p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ пробігає всі можливі дільники числа n , тому права частина рівності (2.2) дорівнює $F(n)$. \square

Наслідок 1. Для функції $f(n) = n^s$ рівність (2.2) набуває вигляду

$$\sum_{d|n} d^s = (1 + p_1^s + p_1^{2s} + p_1^{\alpha_1 s}) \cdots (1 + p_k + p_k^{2s} + p_k^{\alpha_k s}). \quad (2.3)$$

Зокрема, при $s = 1$ ми одержуємо рівність для суматорної функції для функції $f(n) = n$, тобто для суми $\sigma(n)$ дільників числа n . Якщо тепер у кожній дужці рівності (2.3) замінити вираз за формулою для суми членів геометричної прогресії, то одержимо:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \quad (2.4)$$

При $s = 0$ суматорна функція для функції $f(n) = n^s$ — це кількість $\tau(n)$ дільників числа n , і ми отримуємо: $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Наприклад, $\sigma(2016) = \sigma(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = \frac{2^{5+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = 6552$, $\tau(2016) = (5 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 36$.

Задача 2.1. Позначимо через $\sigma_m(n)$ суму m -их степенів усіх натуральних дільників числа n . Знайти явний вираз для $\sigma_m(n)$, якщо відомий канонічний розклад $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ числа n .

Розв'язання. Розглянемо число $n^m = (p_1^{\alpha_1})^m \cdots (p_k^{\alpha_k})^m = (p_1^m)^{\alpha_1} \cdots (p_k^m)^{\alpha_k}$. Тоді, підставляючи в (2.4) замість p_1, \dots, p_k відповідно p_1^m, \dots, p_k^m , отримуємо:

$$\sigma_m(n) = \frac{(p_1^m)^{\alpha_1+1} - 1}{p_1^m - 1} \cdots \frac{(p_k^m)^{\alpha_k+1} - 1}{p_k^m - 1}. \quad \square$$

Задача 2.2. Знайти натуральне число n , яке ділиться на 12 і має рівно 14 натуральних дільників.

Розв'язання. Оскільки $12 = 2^2 \cdot 3$, то n має вигляд $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, де $\alpha_1 \geq 2$ і $\alpha_2 \geq 1$. Із рівностей $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = 14 = 7 \cdot 2$ тепер випливає, що $\alpha_1 + 1 = 7$, $\alpha_2 + 1 = 2$ і $k = 2$, тобто $n = 2^6 \cdot 3^1 = 192$. \square

Задача 2.3. Довести, що добуток усіх натуральних дільників числа n дорівнює $n^{\tau(n)/2}$.

Розв'язання. Кожному дільнику d числа n поставимо у відповідність дільник n/d . Таким чином, натуральні дільники числа n розбиваються на пари $(d, n/d)$, окрім випадку, коли n є точним квадратом (якщо $n = m^2$, то дільнику m відповідає дільник $m^2/m = m$, тобто цей самий дільник). Якщо n не є точним квадратом, то добуток дільників кожної пари $(d, n/d)$ дорівнює $d \cdot n/d = n$, і таких пар буде $\tau(n)/2$. Таким чином, у цьому випадку добуток усіх дільників дорівнює $P = (d \cdot n/d)^{\tau(n)/2} = n^{\tau(n)/2}$. У випадку $n = m^2$ маємо: $P = (d \cdot n/d)^{(\tau(n)-1)/2} \cdot m = n^{(\tau(n)-1)/2} \cdot n^{1/2} = n^{\tau(n)/2}$. \square

Задача 2.4. Знайти натуральнне число n , добуток усіх дільників якого дорівнює 810000.

Розв'язання. $810000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$, тому n має вигляд $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$. Згідно із задачею 2.3 маємо: $810000 = (2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma)^{\tau(n)/2}$, де $\tau(n) = \tau(2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$. Оскільки $\tau(n)/2 \leq 4$, то $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \leq 8$. Крім того, $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1$. Отже, $\alpha = \beta = \gamma = 1$ і $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. \square

Задача 2.5. Довести, що для кожного натурального числа n виконується рівність

$$n = \frac{d_1 + \cdots + d_k}{(1/d_1) + \cdots + (1/d_k)},$$

де d_1, \dots, d_k – усі натуральні дільники числа n .

Розв'язання. Не обмежуючи загальності можна вважати, що дільники d_1, \dots, d_k вписані в порядку їх зростання. Тоді $d_1 = n/d_k, d_2 = n/d_{k-1}, \dots$. Отже,

$$\frac{d_1 + \cdots + d_k}{(1/d_1) + \cdots + (1/d_k)} = \frac{n(d_1 + \cdots + d_k)}{(n/d_1) + \cdots + (n/d_k)} = \frac{n(d_1 + \cdots + d_k)}{d_k + \cdots + d_1} = n. \quad \square$$

2.2. Функції $[x]$ і $\{x\}$

Для кожного дійсного числа x через $[x]$ позначається найбільше ціле число, яке не перевищує x . $[x]$ називається *цілою частиною* числа x . Отже, $[x]$ – це єдине ціле число з проміжку $(x-1, x]$.

Наприклад, $[5] = 5$, $[1,6] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-2,75] = -3$.

Різниця $\{x\} = x - [x]$ називається *дробовою частиною* числа x і задовольняє нерівності $0 \leq \{x\} < 1$.

Наприклад, $\{-3\} = -3 - [-3] = -3 + 3 = 0$, $\{7,26\} = 7,26 - [7,26] = 7,26 - 7 = 0,26$, $\{-1,6\} = -1,6 - [-1,6] = -1,6 + 2 = 0,4$.

Вправа 2.1. Довести, що $[x + y] \geq [x] + [y]$.

Вправа 2.2. Довести, що для кожного натурального числа n : а) $[x + n] = [x] + n$; б) $\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right]$; в) $\{ny\} = \{n\{y\}\}$.

Теорема 2.3. Степінь l , в якому просте число p входить до канонічного розкладу числа $n!$, дорівнює $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$.

Доведення. Зауважимо, що $\left[\frac{n}{p} \right]$ дорівнює кількості тих чисел ряду 1, 2, ..., n , які діляться на p , $\left[\frac{n}{p^2} \right]$ – кількості тих чисел цього ряду, які діляться на p^2 , і т.д. Тому, міняючи порядок сумування, одержуємо:

$$l = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ p^j|m}}^{\infty} 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ p^j|m}}^n 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right],$$

що й вимагалось довести. \square

Із цього твердження випливає такий

Наслідок 1. Біноміальний коефіцієнт $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ є цілим числом.

Доведення. Позначимо через t_p, l_p і s_p степені, з якими просте число p входить до канонічних розкладів чисел $n!, m!$ і $(n-m)!$ відповідно.

Тоді $\binom{n}{m} = \prod_{p - \text{просте}} p^{t_p - l_p - s_p}$, і це число буде цілим, коли для всіх p виконуватиметься нерівність $t_p - l_p - s_p \geq 0$. За теоремою 2.3 $t_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right]$, $l_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^j} \right]$, $s_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n-m}{p^j} \right]$. Із вправи 1 випливає, що $\left[\frac{n}{p^j} \right] = \left[\frac{m + (n-m)}{p^j} \right] \geq \left[\frac{m}{p^j} \right] + \left[\frac{n-m}{p^j} \right]$. Тому

$$t_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n-m}{p^j} \right] + \left[\frac{m}{p^j} \right] \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n-m}{p^j} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^j} \right] = l_p + s_p$$

і $t_p - l_p - s_p \geq 0$. \square

Вправа 2.3. Нехай числа n_1, n_2, \dots, n_k — натуральні і $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Довести, що число $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ є цілим.

Задача 2.6. Знайти канонічний розклад числа $20!$.

Розв'язання. Із теореми 2.3 випливає, що канонічний розклад числа $n!$ має вигляд $n! = \prod_{p \text{ — просте}} p^{\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots}$. Тому показник двійки в канонічному розкладі числа $20!$ дорівнює $\left[\frac{20}{2} \right] + \left[\frac{20}{4} \right] + \left[\frac{20}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$. Аналогічно показник числа 3 дорівнює $\left[\frac{20}{3} \right] + \left[\frac{20}{9} \right] = 6 + 2 = 8$, показник числа 5 дорівнює $\left[\frac{20}{5} \right] = 4$, показник числа 7 дорівнює $\left[\frac{20}{7} \right] = 2$, а показники чисел 11, 13, 17 і 19 дорівнюють $\left[\frac{20}{11} \right] = \left[\frac{20}{13} \right] = \left[\frac{20}{17} \right] = \left[\frac{20}{19} \right] = 1$. Отже, $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. \square

Задача 2.7. Знайти кількість цифр у записі натурального числа x в системі числення з основою n , $n \neq 1$.

Розв'язання. Записати число x в системі числення з основою n означає подати x у вигляді $x = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot n + \gamma_2 \cdot n^2 + \dots + \gamma_k \cdot n^k$, де $0 \leq \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k < n$ і $\gamma_k \neq 0$. Зрозуміло, що таке зображення єдине. Тому кількість m цифр у записі числа x дорівнює $k+1$, де k — найбільше ціле число, для якого виконується нерівність $n^k \leq x$, тобто $n^k \leq x < n^{k+1}$. Логарифмуючи останню нерівність за основою n (це можна робити, оскільки усі члени нерівності — додатні числа, а $n \neq 1$), отримуємо: $\log_n n^k \leq \log_n x < \log_n n^{k+1}$. Звідси $k \leq \log_n x < k+1$. Отже, $k = [\log_n x]$, і $m = [\log_n x] + 1$. \square

Задача 2.8. Знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 180 і не діляться на жодне з простих чисел 5, 7 і 11.

Розв'язання. Серед перших 180 натуральних чисел є $[180/5] = 36$ чисел, що діляться на 5, $[180/7] = 25$ чисел, що діляться на 7 і $[180/11] = 16$ чисел, що діляться на 11. Усі ці числа треба викинути. Але $180 - 36 - 25 - 16$ не буде правильною відповіддю, бо при такому способі підрахунку деякі числа викидаються кілька разів. Наприклад, число 35 викидається і як число, що ділиться на 5, і як число, що ділиться на 7. Щоб викинути подібні числа лише один раз, треба до суми $180 - 36 - 25 - 16$ додати кількість чисел, що діляться на $5 \cdot 7$ (таких чисел

буде $180/35 = 5$), кількість чисел, що діляться на $5 \cdot 11$ (таких чисел буде $180/55 = 3$), і кількість чисел, що діляться на $7 \cdot 11$ (таких чисел буде $180/77 = 2$). Таким чином, буде викинуто рівно по одному разу як числа, що діляться тільки на одне з простих чисел 5, 7 і 11, так і числа, що діляться рівно на два з цих простих чисел. Позаяк $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385 > 180$, то жодне з перших 180 натуральних чисел не ділиться на всі три дані прості числа. Отже, враховані всі можливості і кількість натуральних чисел, що не перевищують 180 і не діляться на жодне з простих чисел 5, 7 і 11, дорівнює $180 - 36 - 25 - 16 + 5 + 3 + 2 = 113$. \square

Зауважимо, що в загальному випадку кількість натуральних чисел, що не перевищують n і не діляться на жодне з простих чисел p_1, p_2, \dots, p_k , дорівнює

$$\begin{aligned} [n] - \left[\frac{n}{p_1} \right] - \left[\frac{n}{p_2} \right] - \cdots - \left[\frac{n}{p_k} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2} \right] + \\ + \left[\frac{n}{p_1 p_3} \right] + \left[\frac{n}{p_{k-1} p_k} \right] - \cdots + (-1)^k \left[\frac{n}{p_1 \cdots p_k} \right]. \end{aligned}$$

Проте доведення цього факту базується на принципі включення–виключення, який виходить за межі даного посібника. Ознайомитись із цим принципом можна за будь-яким підручником, що містить хоча б початки комбінаторики.

Задача 2.9. Знайти кількість натуральних чисел $n \leq 500$, які взаємно прості з числом 960.

Розв'язання. $960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$. Тому задачу можна переформулювати таким чином: знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 500 і не діляться на жодне з простих чисел 2, 3 і 5. Міркуючи, як і в задачі 2.8, знаходимо, що таких чисел буде $[500] - [500/2] - [500/3] - [500/5] + [500/(2 \cdot 3)] + [500/(2 \cdot 5)] + [500/(3 \cdot 5)] - [500/(2 \cdot 3 \cdot 5)] = 500 - 250 - 166 - 100 + 83 + 50 + 33 - 16 = 134$. \square

Задача 2.10. Знайти кількість натуральних розв'язків рівняння $\left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{x}{a-1} \right]$, де $a > 1$ – натуральне число.

Розв'язання. Спочатку для кожного цілого числа k знайдемо кількість натуральних розв'язків системи рівнянь $\left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{x}{a-1} \right] = k$. Ця система

рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} k \leq \frac{x}{a} < k + 1 \\ k \leq \frac{x}{a-1} < k + 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} ak \leq x < ak + a \\ ak - k \leq x < ak + a - k - 1 \end{cases} . \quad (2.5)$$

З умови задачі випливає, що $k \geq 0$, тому $ak - k \leq ak$ і $ak + a - k - 1 < ak + k$. Таким чином, система (2.5) зводиться до системи

$$ak \leq x < ak + a - k - 1 , \quad (2.6)$$

яка сумісна тоді й лише тоді, коли $a - k - 1 > 0$, тобто коли $k < a - 1$. У випадку сумісності системи (2.6) має $a - k - 1$ розв'язків $ak, ak + 1, \dots, ak + a - k - 2$. Оскільки множини розв'язків систем вигляду $\left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{x}{a-1} \right] = k$ для різних k не перетинаються, то, підраховуючи кількість розв'язків такої системи для $k = 0, 1, \dots, a - 2$, одержуємо, що рівняння $\left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{x}{a-1} \right]$ має $(a-1) + (a-2) + \dots + 2 + 1 = a(a-1)/2$ натуральних розв'язків. \square

При розв'язуванні багатьох задач теорії чисел використовується наступна очевидна властивість функції “ціла частина”.

Теорема 2.4. *Нехай $f(x)$ – невід’ємна й неперервна на відрізку $[a, b]$ функція. Тоді кількість точок, що належать криволінійній трапеції $a \leq x \leq b, 0 < y \leq f(x)$ (тобто точки відрізка $[a, b]$ не враховуються) і координатами яких є цілі числа, дорівнює $\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ a \leq t \leq b}} [f(t)]$.*

Задача 2.11. *Довести, що для довільних дійсного числа a і натурального n виконується рівність*

$$[a] + [a + 1/n] + [a + 2/n] + \dots + [a + (n-1)/n] = [na] . \quad (2.7)$$

Розв’язання. Нехай $a \geq 0$. Розглянемо функцію $f(x) = a + x/n$, графіком якої є пряма лінія. На відрізку $[0, n-1]$ ця функція неперервна і невід’ємна. За теоремою 2.4 кількість точок, що належать трапеції $0 \leq x \leq n-1, 0 < y \leq f(x)$ і координатами яких є цілі числа, дорівнює

$$K = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq t \leq n-1}} [f(t)] = \sum_{t=0}^{n-1} \left[a + \frac{t}{n} \right] = [a] + \left[a + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[a + \frac{n-1}{n} \right] .$$

Отже, ліва частина рівності (2.7) дорівнює кількості точок з цілими координатами, що належать прямокутній трапеції $OABD$ (Рис. 1) з основами $OA = f(0) = a$, $BD = f(n-1) = a + (n-1)/n$ і висотою $OD = n - 1$, за винятком точок відрізка OD .

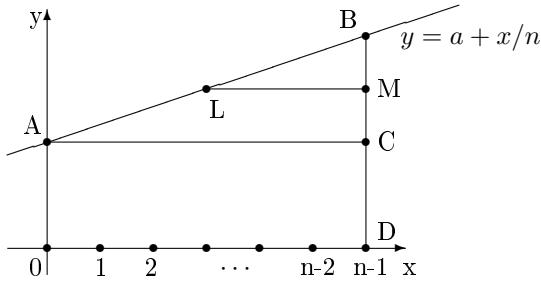


Рис. 1

Розіб'ємо трапецію $OABD$ на прямокутник $OACD$ (включно зі стороною AC) і прямокутний трикутник ACB (без катета AC). Прямокутник $OACD$ без сторони OD містить $n \cdot [a]$ точок із цілими координатами. Трикутник ACB без катета AC буде містити точки з цілими координатами тоді й лише тоді, коли відрізок CB (без точки C) міститиме точку M з цілими координатами (така точка може бути лише одна, бо довжина відрізка CB дорівнює $(n-1)/n < 1$). Якщо така точка M існує, то її ордината y_0 дорівнює $[a] + 1$. Тоді всі потрібні нам точки трикутника ACB лежатимуть на горизонтальному відрізку LM . Абсцису x_0 точки L знаходимо з рівняння $a + x_0/n = [a] + 1$, звідки $x_0 = n([a] + 1 - a) = n(1 - \{a\})$. Тому кількість точок із цілими координатами на відрізку LM дорівнює $\lceil |LM| \rceil + 1 = [n - 1 - x_0] + 1 = [n - 1 - n(1 - \{a\})] + 1 = [n\{a\} - 1] + 1 = [n\{a\}]$.

Таким чином, трапеція $OABD$ містить $n[a] + [n\{a\}] = [n[a] + n\{a\}] = [n([a] + \{a\})] = [na]$ точок із цілими координатами і рівність (2.7) доведена.

Випадки $a \leq (1-n)/n$ та $(1-n)/n < a < 0$ розглядаються аналогічно. Радимо читачеві розглянути ці випадки самостійно. \square

Задача 2.12. Довести, що всі члени послідовності $\{\sqrt{2}\}$, $\{10\sqrt{2}\}$, $\{10^2\sqrt{2}\}$, $\{10^3\sqrt{2}\}$, ... є попарно різними.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{2} = 1.a_1a_2\dots a_n\dots$. Позначимо $\alpha_n = \{10^n\sqrt{2}\}$. Тоді $\alpha_n = 0.a_{n+1}a_{n+2}\dots$. Якби для деяких n і m виконувалась рівність $\alpha_n =$

α_{n+m} , то було б $a_{n+1} = a_{n+m+1}$, $a_{n+2} = a_{n+m+2}$, ..., $a_{n+m} = a_{n+2m}$, $a_{n+m+1} = a_{n+2m+1}$ і т.д., тобто набір цифр $(a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+m})$ був би періодом у десятковому записі іrrаціонального числа $\sqrt{2}$, що неможливо. Тому всі α_n різні. \square

Задача 2.13. Обчислити суму

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{2m}{n}\right\} + \dots + \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\} + \left\{\frac{nm}{n}\right\}, \quad (2.8)$$

де n і m – натуральні числа.

Розв'язання. Позначимо $\{m/n\} = \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Тоді $\{2m/n\} = \{2\alpha\}$, ..., $\{nm/n\} = \{n\alpha\}$. Візьмемо коло радіуса $1/2\pi$ і довжини 1 і зафіксуємо на ньому точку A (Рис. 2). Нехай O – центр цього кола. Відкладемо на колі точку B так, щоб довжина дуги AB дорівнювала α . Потім у цьому ж напрямі відкладемо дугу BC довжини α , тоді довжина дуги ABC дорівнюватиме 2α . Потім відкладемо точку D , для якої довжина дуги $AB\dots D$ дорівнює 3α , і т.д. Останньою відкладемо точку E , для якої довжина дуги $AB\dots E$ дорівнює $n\alpha$. Оскільки $\alpha = \{m/n\} = m/n - [m/n]$, то $n\alpha = m - n \cdot [m/n]$ є цілим числом і точка E збігатиметься з точкою A .

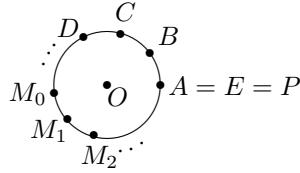


Рис. 2

Нехай точка P , що відповідає дузі довжини $s\alpha$, є першою з точок послідовності B, C, D, \dots , яка збігається з точкою A . Тоді після точки P нових точок на колі ми не одержимо: точка, що відповідає дузі довжини $(s+1)\alpha$, збігатиметься з точкою B , наступна точка, що відповідає дузі довжини $(s+2)\alpha$, збігатиметься з точкою C і т.д. Очевидно також, що точки B, C, \dots, P попарно різні.

Нехай тепер M_0 і M_1 – такі дві точки з множини $\{B, C, \dots, P\}$, для яких дуга M_0M_1 є найменшою з можливих. Нехай точка M_0 відповідає числу $k\alpha$, а точка M_1 – числу $(k+l)\alpha$ (Рис. 2). Розглянемо послідовність точок M_0, M_1, \dots, M_{s-1} , що відповідає числам $k\alpha, (k+l)\alpha, \dots, (k+(s-1)l)\alpha$. Очевидно, що всі ці точки належать множині

$\{B, C, \dots, P\}$ і що дуги $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{s-2}M_{s-1}, M_{s-1}M_0$ — рівні. З іншого боку, кожна точка множини $\{B, C, \dots, P\}$ мусить збігатися з однією з точок M_0, M_1, \dots, M_{s-1} . Справді, в противному разі множина $\{B, C, \dots, P\}$ містила б точку N , яка була б внутрішньою точкою якоїсь дуги M_iM_{i+1} . Але тоді кожна з дуг M_iN і NM_{i+1} була б меншою за дугу M_0M_1 , що суперечить вибору точок M_0 і M_1 . Отже, $\{B, C, \dots, P\} = \{M_0, M_1, \dots, M_{s-1}\}$ і точки $B, C, \dots, P = A$ є вершинами вписаного в коло правильного s -кутника, які розбивають коло на s одинакових дуг довжини $1/s$.

Далі під довжиною дуги XY розумітимо найкоротший шлях по колу від точки X до точки Y проти руху годинникової стрілки, і вважатимемо, що довжина дуги дорівнює 0, якщо $X = Y$. Із означення дробової частини числа випливає, що сума (2.8) дорівнює сумі довжин дуг $AB, AC, \dots, AP, \dots, AE$. Оскільки точки $B, C, \dots, P = A$ є вершинами правильного s -кутника, то сума довжин дуг $AB, AC, \dots, AP = AA$ дорівнює

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s} + \dots + \frac{s-1}{s} + 0 = \frac{s-1}{2}. \quad (2.9)$$

За означенням точки P число s є найменшим натуральним числом, для якого число $s\alpha$ буде цілим. Але числа $s\alpha = s \cdot \{m/n\}$ і $s \cdot m/n$ будуть цілими одночасно, а найменше натуральне s , для якого число $s \cdot m/n$ є цілим, це $s = n/\text{НСД}(m, n)$. Тому, відмічаючи на колі точки B, C, \dots, P, \dots, E , ми кожну точку відмітимо $n/s = \text{НСД}(m, n)$ разів. Враховуючи це і значення суми (2.9), одержуємо, що сума (2.8) дорівнює

$$\text{НСД}(m, n) \cdot \frac{s-1}{2} = \frac{\text{НСД}(m, n) \cdot ((n/\text{НСД}(m, n)) - 1)}{2} = \frac{n - \text{НСД}(m, n)}{2}.$$

□

2.3. Функція Ойлера $\varphi(n)$

Для натурального числа n функція Ойлера $\varphi(n)$ визначається як кількість чисел ряду $1, 2, \dots, n$, які взаємно прості з числом n . Так, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Теорема 2.5. Функція Ойлера $\varphi(n)$ є мультиплікативною.

Доведення. Оскільки $\varphi(1) = 1$, то $\varphi(n)$ не є тотожно рівною нулю. Покажемо, що для довільних взаємно простих натуральних чисел m і n

виконується рівність $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Для цього числа від 1 до mn випишемо у вигляді такої таблиці:

1	2	3	\dots	m	
$m+1$	$m+2$	$m+3$	\dots	$2m$	
$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	\dots	$3m$	(2.10)
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	$(n-1)m+3$	\dots	nm	

і знайдемо кількість тих чисел у цій таблиці, які взаємно прості з mn . За лемою 1.1 для довільних натуральних k, m і r маємо $\text{НСД}(km+r, m) = \text{НСД}(r, m)$. Тому числа, які взаємно прості з m , а з mn і поготів, можуть бути лише в стовпчиках, номери r яких взаємно прості з числом m . За означенням функції φ кількість таких стовпчиків дорівнює $\varphi(m)$, а стовпчик із номером r складається з чисел $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$.

Підрахуємо, скільки в такому стовпчику чисел, які взаємно прості з n . Для цього спочатку покажемо, що всі числа r -го стовпчика при діленні на n дають різні остачі. Справді, припустимо, що числа k_1m+r і k_2m+r при діленні на n дають однакові остачі, тобто $k_1m+r = l_1n+r_1$ і $k_2m+r = l_2n+r_1$, де $0 \leq r_1 < n$. Тоді різниця цих чисел, з одного боку, дорівнює $(k_1m+r)-(k_2m+r) = (k_1-k_2)m$, а з іншого — дорівнює $(l_1n+r_1)-(l_1n+r_1) = (l_1-l_2)n$. Отже, $(k_1-k_2)m = (l_1-l_2)n$. Але $\text{НСД}(m, n) = 1$, тому $k_1 - k_2$ ділиться на n , і позаяк $0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$, то $k_1 = k_2$.

Отже, всі числа r -го стовпчика при діленні на n дають різні остачі. Але стовпчик містить рівно n чисел, тому цими остачами будуть, у певному порядку, числа $0, 1, \dots, n-1$. За лемою 1.1 число a буде взаємно простим з n тоді й лише тоді, коли взаємно простою з n буде його остатча b від ділення на n . Тому кожний стовпчик таблиці (2.10) містить $\varphi(n)$ чисел, які взаємно прості з n .

Таким чином, у таблиці (2.10) числа, взаємно прості з m , заповнюють $\varphi(m)$ стовпчиків, а кожний такий стовпчик містить $\varphi(n)$ чисел, взаємно простих з n . Але число буде взаємно простим з mn тоді і тільки тоді, коли воно взаємно просте з m та з n (тврдження 1.2). Тому таблиця (2.10) містить рівно $\varphi(m)\varphi(n)$ чисел, взаємно простих з mn .

З іншого боку, за означенням функції Ойлера кількість чисел цієї таблиці, які взаємно прості з mn , дорівнює $\varphi(mn)$. Отже, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, що й вимагалось. \square

Теорема 2.6. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n . Тоді

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}. \quad (2.11)$$

Зокрема, для простого числа p $\varphi(p) = p - 1$ і $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = p^\alpha$, де p – просте число. Зрозуміло, що число m буде взаємно простим із числом p^α тоді й лише тоді, коли m не ділиться на p . Серед чисел $1, \dots, p, p+1, \dots, 2p, 2p+1, \dots, p^2, p^2+1, \dots, p^2+p, p^2+p+1, \dots, 2p^2, 2p^2+1, \dots, p^\alpha$ на p будуть ділитися числа $p, 2p, \dots, p^2, p^2+p, \dots, p^\alpha$, тобто кожне p -те число. Тому таких чисел буде $p^\alpha/p = p^{\alpha-1}$. Решта $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ чисел взаємно прості з p , а отже, і з p^α . Тому $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. Зокрема, $\varphi(p) = p^1 - p^0 = p - 1$.

Використовуючи мультиплікативність функції φ (теорема 2.5), у загальному випадку маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) &= \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_k^{\alpha_k}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) = \\ &= p_1^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \end{aligned}$$

що й треба було довести. \square

Наприклад, $\varphi(17) = 17 - 1 = 16$, $\varphi(128) = \varphi(2^7) = 2^7 - 2^6 = 64$, $\varphi(5040) = \varphi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = (2-1)(3-1)(5-1)(7-1) \cdot 2^{4-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{1-1} \cdot 7^{1-1} = 1152$.

Наступне співвідношення, яке інколи називають формулою Гауса, є наслідком доведених щойно теорем 2.5 та 2.6.

Твердження 2.1. Для кожного натурального числа n

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Доведення. Функція $F(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ є суматорною для функції $\varphi(n)$.

Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n . Позаяк $\varphi(n)$ мультиплікативна, то за теоремою 2.2 маємо: $F(n) = (1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \cdots + \varphi(p_1^{\alpha_1})) \cdots (1 + \varphi(p_k) + \varphi(p_k^2) + \cdots + \varphi(p_k^{\alpha_k}))$. Але за теоремою 2.6 $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. Тому $F(n) = (1 + (p_1 - 1) + (p_1^2 - p_1) + \cdots + (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})) \cdots (1 + (p_k - 1) + (p_k^2 - p_k) + \cdots + (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = n$, що й вимагалось. \square

Задача 2.14. Скільки є чисел на проміжку від 1 до 180, які не взаємно прості з числом 30?

Розв'язання. Канонічні розклади чисел 180 і 30 такі: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Отже, прості дільники чисел 180 і 30 однакові, а тому взаємно простими з 30 будуть ті і тільки ті числа, які взаємно прості з числом 180. На проміжку від 1 до 180 є $\varphi(180) = (2-1) \cdot (3-1) \cdot (5-1) \cdot 2 \cdot 3 = 48$ чисел, взаємно простих з числом 180. А тому на цьому проміжку буде рівно $180 - 48 = 132$ чисел, не взаємно простих з числом 30. \square

Задача 2.15. Скільки є натуральних чисел, які менші за 120 і взаємно прості з числом 160?

Розв'язання. $160 = 2^5 \cdot 5$, тому існує $\varphi(160) = (2-1)(5-1)2^4 = 64$ чисел, які менші за 160 і взаємно прості з числом 160. А на проміжку від 120 до 160 взаємно простими з числом 160 будуть, очевидно, ті числа, які не діляться ні на 2, ні на 5, тобто 121, 123, 127, 129, 131, 133, 137, 139, 141, 143, 147, 149, 151, 153, 157, 159 (всього 16 чисел). Отже, буде $64 - 16 = 48$ чисел, які менші за 120 і взаємно прості з числом 160. \square

Задача 2.16. Знайти кількість тих натуральних чисел n , які задовільняють умови $n < a$ і $HC\Delta(a, n) = b$, якщо $a = 480, b = 20$.

Розв'язання. За умовою $HC\Delta(480, n) = 20$, тобто $n = 20t$, де t менше за 24 і взаємно просте з числом $480/20 = 24$. Очевидно, що таких t буде $\varphi(24) = 8$, а тому натуральних чисел n , які задовільняють умову задачі, також буде 8. \square

Задача 2.17. Знайти натуральні числа n , якщо воно є добутком двох різних простих чисел, а $\varphi(n)$ дорівнює: a) 24; b) 60; c) 100; d) 120.

Розв'язання. a) Якщо $n = pq$, де p і q — різні прості числа, то за теоремою 2.6 $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Можна вважати, що $p < q$. Розглянемо всі можливі розклади числа 24 у добуток двох множників: $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Числа $24 + 1 = 25 = 5 \cdot 5$ і $3 + 1 = 4 = 2 \cdot 2$ не є простими. Тому для числа n лишаються лише дві можливості: $(2+1)(12+1) = 3 \cdot 13 = 39$ і $(4+1)(6+1) = 5 \cdot 7 = 35$.

Інші випадки залишаємо читачеві як вправу. \square

Задача 2.18. (a) Довести, що серед значень функції $\varphi(n)$ єдиним непарним числом є 1.

- (b) Довести, що коли число p є простим, а число $2p+1$ — складеним, то число $2p$ не зустрічається серед значень функції $\varphi(n)$.
- (c) Довести, що коли число $p > 3$ є простим і $r \geq 1$, то $\varphi(n)$ може набувати значень вигляду $2 \cdot p^r$ не більше двох разів.
- (d) Довести, що кожного свого значення функція $\varphi(n)$ набуває лише скінченне число разів.

Розв'язання. (a) За теоремою 2.6 для числа n з канонічним розкладом $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$. Якщо $\varphi(n)$ — непарне, то жодне непарне просте число p не зустрічається в розкладі n , бо $p - 1$ ділиться на 2. Отже, n має вигляд $n = 2^\alpha$. Але тоді $\varphi(n) = (2 - 1) 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$. Останнє число буде непарним лише коли $\alpha - 1 \leq 0$, тобто $\alpha \leq 1$. Отже, $\varphi(n)$ може бути непарним лише для $n = 2^0 = 1$ і $n = 2^1 = 2$, і в цьому випадку $\varphi(n) = 1$.

(b) З умови задачі випливає, що $p \geq 7$. Припустимо, що $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ і $\varphi(n) = 2p$. Тоді $2p = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ і p ділить або множник вигляду $p_i^{\alpha_i - 1}$, або множник вигляду $p_i - 1$. Перший випадок неможливий, бо тоді $p = p_i$, $\alpha_i \geq 2$ і $\varphi(n) \geq (p - 1)p \geq 6p > 2p$. У другому випадку $p_i > p$, тому число $p_i - 1$ парне і ділиться на $2p$. Зокрема, $p_i - 1 \geq 2p$. Із нерівностей $\varphi(n) = 2p \geq p_i - 1 \geq 2p$ тепер одержуємо $p_i - 1 = 2p$ і $p_i = 2p + 1$, тобто число $2p + 1$, всупереч умові, є простим. Отже, другий випадок також неможливий.

(c) Нехай $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = 2p^r$. Якщо p ділить множник вигляду $p_i^{\alpha_i - 1}$, то $p_i = p$ і число $p - 1 = p_i - 1$ ділить добуток $2p^r$. Але це неможливо, бо з умови задачі випливає, що $2 < p - 1 < p$. Тому або $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = 2$, або $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = 1$. У першому випадку можна вважати, що $p_1 = 2$ і $n = 2^2 p_2 \cdots p_k$. Але тоді число $\varphi(n) = 2(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1)$ або дорівнює 2 (якщо $k = 1$), або ділиться на 4 (якщо $k > 1$), що суперечить умові задачі. Отже, цей випадок неможливий. Нехай тепер $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = 1$. Тоді $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$, $n = p_1 \cdots p_k$ і $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$. Серед простих дільників p_1, \dots, p_k числа n лише один може бути непарним, бо в протилежному разі добуток $(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$ ділився б на 4, всупереч умові. Оскільки єдине парне просте число — це 2, то або $n = q$, або $n = 2q$, де q — непарне просте число. В обох випадках $\varphi(n) = q - 1$, тобто $q - 1 = 2p^r$ і $q = 2p^r + 1$. Отже, рівняння $\varphi(n) = 2p^r$ має 2 розв'язки $n = 2p^r + 1$ і $n = 2(2p^r + 1)$, якщо число $2p^r + 1$ — просте, і не має розв'язків зовсім, якщо число $2p^r + 1$ — складене.

(d) Нехай $\varphi(n) = m$ і просте число p зустрічається в канонічному розкладі числа n з показником k . Тоді $(p-1)p^{k-1}|m$, звідки $p-1 \leq m$ і $p^{k-1} \leq m$, тобто $p \leq m+1$ і $k-1 \leq \log_p m$. Отже, $k \leq 1 + \log_p m \leq 1 + \log_2 m$. Крім того, очевидно, що в канонічному розкладі числа n зустрічається не більше m різних простих чисел. Тому з останніх нерівностей випливає, що

$$n \leq ((m+1)^{1+\log_2 m})^m = (m+1)^{m(1+\log_2 m)}.$$

Оскільки число n обмежене згори, то $\varphi(n)$ набуває значення m лише скінченну кількість разів. \square

Задача 2.19. Розв'язати рівняння

$$\varphi(n) = (1/a) \cdot n, \quad (2.12)$$

де a — фіксоване натуральне число.

Розв'язання. $n = 1$ є розв'язком рівняння (2.12) для $a = 1$. Нехай тепер $n > 1$. Перепишемо рівняння (2.12) у вигляді $n/\varphi(n) = a$. З іншого боку, якщо $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n , то

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \frac{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}{(p_1-1) \cdots (p_k-1) p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1}} = \frac{p_1 \cdots p_k}{(p_1-1) \cdots (p_k-1)}. \quad (2.13)$$

Щоб права частина рівняння (2.13) була цілим числом, чисельник $p_1 \cdots p_k$ має ділитись на знаменник $(p_1-1) \cdots (p_k-1)$. Але для непарного простого p число $p-1$ буде парним, а серед простих множників чисельника щонайбільше один може дорівнювати 2. Отже, серед простих дільників p_1, \dots, p_k числа n щонайбільше один може бути непарним, тобто n має вигляд $n = 2^\alpha, \alpha \geq 1$, або $n = 2^\alpha p^\beta$, де p — непарне просте число і $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$. У першому випадку $n/\varphi(n) = 2/(2-1) = 2$, отже, числа вигляду $n = 2^\alpha, \alpha \geq 1$ є розв'язками рівняння (2.12) для $a = 2$. У другому випадку $n/\varphi(n) = 2p/(2-1)(p-1) = 2p/(p-1)$. Позаяк число p — просте і $p-1 < p$, то це відношення буде цілим числом тоді й лише тоді, коли $(p-1)|2$, тобто коли $p = 3$. Отже, n має вигляд $n = 2^\alpha 3^\beta$. В останньому випадку $n/\varphi(n) = 2 \cdot 3/(2-1) \cdot (3-1) = 3$, тобто числа вигляду $n = 2^\alpha 3^\beta$ є розв'язками рівняння (2.12) для $a = 3$.

Таким чином, розв'язками рівняння (2.12) є $n = 1$ (для $a = 1$), $n = 2^\alpha, \alpha \geq 1$ (для $a = 2$), і $n = 2^\alpha 3^\beta, \alpha \geq 1, \beta \geq 1$ (для $a = 3$). Для інших значень a рівняння (2.12) розв'язків не має. \square

Задача 2.20. Довести, що $\varphi(n) \mid n!$.

Розв'язання. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n . Тоді $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$. Числа p_1, \dots, p_k — попарно різні, тому числа $p_1 - 1, \dots, p_k - 1$ також попарно різні і менші за n . Але тоді $(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) \mid (n-1)!$. Крім того, $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} \mid n$. Тому $\varphi(n)$ ділить число $(n-1)! \cdot n = n!$. \square

Задача 2.21. Знайти суму всіх натуральних чисел, які взаємно прості з числом $m > 1$ і менші за m .

Розв'язання. Із рівності $k + (m-k) = m$ випливає, що кожний спільний дільник чисел k і m буде спільним дільником чисел $m-k$ і m , і навпаки. А це означає, що числа k і $m-k$ будуть взаємно простими чи не взаємно простими з числом m одночасно. Отже, числа, які взаємно прості з числом m і менші за m , розбиваються на пари вигляду $(k, m-k)$. Сума чисел кожної пари дорівнює m , а кількість пар дорівнює $\varphi(m)/2$. Тому сума всіх натуральних чисел, які взаємно прості з m і менші за m , дорівнює $m \cdot \varphi(m)/2$. \square

Завершимо цей параграф одним дуже несподіваним застосуванням функції Ойлера.

Задача 2.22. Використовуючи явний вираз для $\varphi(n)$ з теореми 2.6, довести теорему Евкліда про нескінченість множини простих чисел.

Розв'язання. Припустимо, що простих чисел є скінчена кількість, і нехай це будуть числа p_1, \dots, p_k . Покладемо $a = p_1 \cdots p_k$. Кожне натуральне число $n > 1$ має якийсь простий дільник p . Але тоді p буде спільним дільником чисел a і n , тобто числа a і n — не взаємно прості. Отже, єдиним числом, взаємно простим з числом a , буде 1. А тому $\varphi(a) = 1$. З іншого боку, $\varphi(a) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) > 1$. Одержані суперечності доводить, що припущення про скінченість множини простих чисел є хибним. \square

2.4. Функція Мебіуса $\mu(n)$

Функція Мебіуса $\mu(n)$ визначається на множині натуральних чисел таким умовами: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^s$, якщо канонічний розклад числа n має вигляд $n = p_1 \cdots p_s$, і $\mu(n) = 0$, якщо в канонічному розкладі $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ числа n хоча б один із показників $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ більший за 1 (тобто якщо n ділиться на квадрат хоча б одного простого числа).

Наприклад, $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = 1$, $\mu(40) = \mu(2^3 \cdot 5) = 0$, $\mu(165) = \mu(3 \cdot 5 \cdot 11) = -1$.

Твердження 2.2. Функція Мебіуса $\mu(n)$ і її суматорна функція $\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ — мультиплікативні.

Доведення. Перша частина твердження випливає безпосередньо з означення функції $\mu(n)$, а друга — з теореми 2.1. \square

Твердження 2.3. Нехай $f(n)$ — мультиплікативна функція, а $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n . Тоді

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1 - f(p_1)) \cdots (1 - f(p_k))$$

(як завжди, добуток нульової кількості множників вважається рівним 1, тому для $n = 1$ права частина рівності дорівнює 1). Зокрема, для функції $f(n) = 1$ маємо

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 1, \\ 0, & \text{якщо } n > 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

а для функції $f(n) = 1/n$ —

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 1, \\ \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), & \text{якщо } n > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Доведення. Функція $\theta(n) = \mu(n)f(n)$ є мультиплікативною як добуток мультиплікативних функцій $\mu(n)$ і $f(n)$. А тому, за теоремою 2.2,

$$\sum_{d|n} \theta(d) = (1 + \theta(p_1) + \cdots + \theta(p_1^{\alpha_1})) \cdots (1 + \theta(p_k) + \cdots + \theta(p_k^{\alpha_k})) ,$$

де $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n . Враховуючи, що $\theta(p_i) = \mu(p_i)f(p_i) = -f(p_i)$ і $\theta(p_i^j) = 0$ для $j > 1$, переконуємося в справедливості твердження. \square

Доведена властивість функції Мебіуса використовується для обґрунтування так званої *формули обертання Мебіуса*:

Теорема 2.7. Нехай $f(n)$ — довільна функція, визначена на множині натуральних чисел, а $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ — ії суматорна функція. Тоді

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right). \quad (2.16)$$

Доведення. Справді,

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{t|(n/d)} f(t) \right) = \sum_{t|n} \left(f(t) \sum_{d|(n/t)} \mu(d) \right). \quad (2.17)$$

Але з рівності (2.14) випливає, що коли $t \neq n$, то $\sum_{d|(n/t)} \mu(d) = 0$.

Тому в правій частині рівності (2.17) лишається лише один доданок $f(n) \sum_{d|(n/n)} \mu(d) = f(n)\mu(1) = f(n)$, що й вимагалось. \square

Зауважимо, що справедливе і зворотне твердження: якщо для кожного натурального числа n виконується рівність (2.16), то функція $g(n)$ є суматорною для функції $f(n)$. Справді, рівність (2.16) можна записати у вигляді

$$f(n) = \sum_{t|n} \mu\left(\frac{n}{t}\right) g(t),$$

і тоді

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{t|(n/d)} \mu\left(\frac{n}{dt}\right) g(t) = \sum_{t|n} \left(g(t) \sum_{d|(n/t)} \mu(d) \right).$$

Знову маємо, що $\sum_{d|(n/t)} \mu(d) = 0$ для $t \neq n$, і тому $\sum_{d|n} f(d) = g(n)$.

Наведемо кілька прикладів застосування формули обертання.

Функція $\tau(n)$ — кількість дільників числа n — є суматорною для функції $f(n) = 1$, тому

$$\sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = 1.$$

За твердженням 2.1 функція $g(n) = n$ є суматорною для функції $\varphi(n)$. У цьому випадку рівність (2.16) набуває вигляду

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) = \varphi(n).$$

З останньої рівності за допомогою рівності (2.15) отримуємо:

$$\varphi(n) = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

що дає ще одне доведення теореми 2.6. Тоді теорему 2.5 можна одержати як її наслідок.

Існує аналог формул обертання Мебіуса для функцій дійсної змінної:

Твердження 2.4. *Нехай $f(x)$ – довільна функція, визначена на множині додатних дійсних чисел. Якщо*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{[x]} f\left(\frac{x}{i}\right), \text{ то } f(x) = \sum_{i=1}^{[x]} \mu(i) g\left(\frac{x}{i}\right).$$

Доведення. Справді,

$$\sum_{i=1}^{[x]} \mu(i) g\left(\frac{x}{i}\right) = \sum_{i=1}^{[x]} \left(\mu(i) \sum_{j=1}^{[x/i]} f\left(\frac{x}{ij}\right) \right) = \sum_{i=1}^{[x]} \left(f\left(\frac{x}{i}\right) \sum_{d|i} \mu(d) \right) = f(x),$$

бо з рівності (2.14) випливає, що коли $i \neq 1$, то $\sum_{d|i} \mu(d) = 0$. \square

Дзета-функцією Рімана $\zeta(s)$ називається функція, що визначається для всіх дійсних $s > 1$ як сума абсолютно збіжного ряду

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (2.18)$$

У курсі математичного аналізу доводиться, що для натурального s значення дзета-функції $\zeta(s)$ раціонально виражається через π . Наприклад,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6.$$

Дзета-функція Рімана є частковим випадком так званих *рядів Дірихле*, тобто рядів вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$.

Задача 2.23. *Довести, що для всіх дійсних чисел $s > 1$ виконується рівність $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s = \zeta^2(s)$.*

Розв'язання. Піднесемо абсолютно збіжний ряд (2.18) до квадрату:

$$\zeta^2(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^s}.$$

В останній сумі кожний доданок $1/(nm)^s$ виступає стільки разів, скількома способами число $k = nm$ можна подати у вигляді добутку двох натуральних множників (з урахуванням їх порядку), тобто $\tau(k)$ разів. Але тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^s},$$

що й треба було довести. \square

Задача 2.24. Довести, що для всіх дійсних чисел $s > 1$ виконується рівність $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s = 1/\zeta(s)$.

Розв'язання. Із абсолютної збіжності ряду (2.18) випливає абсолютнона збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s$. Розглянемо добуток цього ряду і ряду (2.18):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{(nk)^s} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k|m} \frac{\mu(k)}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^s} \sum_{k|m} \mu(k) \right) = 1 \end{aligned}$$

(на останньому кроці ми скористались рівністю (2.14)). Отже,

$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s = 1$, що й треба було довести. \square

Зокрема, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^2 = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2$.

2.5. Задачі для самостійного розв'язування

- Нехай $f(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ (d,n)=1}} d$. Довести, що функція $f(n)$ задовольняє співвідношення $f(n) = \varphi(n)/2$ для $n > 1$ і $\sum_{d|n} f(d) = (n+1)/2$.

2. Для натуральних чисел m і n через $\tau_m(n)$ позначається кількість розв'язків над множиною натуральних чисел рівняння $x_1 \cdots x_m = n$. Довести, що а) $\tau_1(n) = 1$; б) $\tau_2(n) = \tau(n)$; в) для кожного натурального числа m функція $\tau_m(n)$ є мультиплікативною; г) якщо число p — просте, $m > 1$ і $\alpha \geq 0$, то

$$\tau_m(p^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)}.$$

3. Якою кількістю нулів закінчується число $n!$?
4. Довести, що для довільних цілих чисел m, n, m_1, m_2 і натурального числа k виконуються співвідношення:
- $$(a) \left[\left[\frac{m}{n} \right] / k \right] = \left[\frac{m}{n \cdot k} \right]; \quad (b) \left[\frac{m_1}{n} \right] + \left[\frac{m_2}{n} \right] \leq \left[\frac{m_1 + m_2}{n} \right] \leq \left[\frac{m_1}{n} \right] + \left[\frac{m_2}{n} \right] + 1.$$
- Які з цих співвідношень залишаються справедливими для довільних дійсних чисел m, n, m_1, m_2 ?
5. Обчислити: (a) $[-5, 7]$; (b) $[1 - 2\pi]$; (c) $[\sqrt[3]{100}]$; (d) $[(\sqrt{500} + 2)/3]$; (e) $[\ln 123]$; (f) $[(15/8) + \sin 10^\circ]$.
6. Нехай $n = p^\alpha q^\beta$, де p і q — різні прості числа і $\alpha, \beta \geq 1$.
- (a) Обчислити $\tau(n^3)$, якщо $\tau(n^2) = 21$.
- (b) Обчислити $\tau(n^4)$, якщо $\tau(n^3) = 70$.
7. Знайти кількість натуральних чисел $n \leq a$, які не діляться на жодне з чисел b_1, \dots, b_k :
- (a) $k = 2, b_1 = 6, b_2 = 10, a = 800$;
- (b) $k = 3, b_1 = 6, b_2 = 10, b_3 = 15, a = 1400$;
- (c) $k = 4, b_1 = 10, b_2 = 21, b_3 = 14, b_4 = 15, a = 2311$.
8. Обчислити: (a) $\sigma_2(16)$; (b) $\sigma_3(18)$; (c) $\sigma_4(12)$.
9. Знайти натуральне число n , добуток усіх дільників якого дорівнює $2^{90} \cdot 3^{45} \cdot 5^{45}$.
10. Знайти натуральне число n , якщо воно має тільки два прості дільники і $\tau(n) = 6, \sigma(n) = 28$.

11. Послідовно вписали всі натуральні числа від 1 до 1800. Спочатку в цій послідовності закреслили, рахуючи з першого, кожне п'яте число. Потім закреслили кожне восьме число (рахуючи й ті числа, що вже були закреслені), нарешті, аналогічним чином закреслили кожне дев'яте число. Скільки з виписаних чисел не буде закреслено жодного разу?
12. Розв'язати рівняння $[ax] = n$, де додатне дійсне число a і ціле число n — фіксовані.
13. Розв'язати рівняння $[x + 1] = [(x + 2)/2]$.
14. Довести, що для довільних різних простих чисел p і q

$$\sum_{i=1}^q \left[\frac{p}{q} i \right] + \sum_{j=1}^p \left[\frac{q}{p} j \right] = pq + 1 .$$

15. (a) Знайти кількість натуральних чисел, які не перевищують 1000 і діляться на одне й тільки одне з чисел 2, 3 або 5 .
(b) Знайти кількість натуральних чисел, які не перевищують n і діляться на одне й тільки одне з простих чисел p_1, p_2, \dots, p_k .
16. Нехай $m > 1$ — натуральне число і x пробігає множину всіх тих натуральних чисел, що не діляться на m -тий степінь жодного простого числа. Довести, що для кожного додатного дійсного числа a

$$\sum_x \left[\sqrt[m]{a/x} \right] = [a] .$$

17. Чи вірно, що для довільних натуральних чисел n і k

$$\left\{ \sqrt[k]{n} \right\} > \frac{1}{k \cdot \sqrt[k]{n^{k-1}}} \quad ?$$

18. Обчислити значення функції Ойлера $\varphi(n)$ для всіх $n \leq 50$.
19. Обчислити $\varphi(n)$ для: $n = 2310, 1980, 16632, 14700, 43560, 44550$.
20. Знайти найменше натуральне число n , для якого кількість чисел, що не перевищують n і не діляться на жодне з простих чисел p_1, \dots, p_m , дорівнює a :
(a) $m = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, a = 105$;
(b) $m = 3, p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, a = 50$;
(c) $m = 3, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 11, a = 325$.

21. Знайти кількість натуральних чисел, які менші за 180 і взаємно прості з числом 200.
22. Знайти число n , якщо воно має вигляд $n = p^2q^2$, де p і q – різні прості числа, а $\varphi(n)$ дорівнює: (a) 936; (b) 2200; (c) 24750; (d) 14520; (e) 34104.
23. Розв'язати рівняння $\varphi(x) = k$, якщо k дорівнює: (a) 4; (b) 6; (c) 12; (d) 16; (e) 8; (f) 10; (g) 14.
24. Розв'язати рівняння: (a) $\varphi(n) = \frac{2}{3}n$; (b) $\varphi(n) = \frac{3}{4}n$; (c) $\varphi(n) = \frac{4}{5}n$; (d) $\varphi(n) = \frac{p-1}{p}n$, де p – фіксоване просте число; e) $\varphi(n) = \frac{k-1}{k}n$, де k – фіксоване складене число.
25. Знайти всі натуральні числа n , для яких $\varphi(n)$ буде простим числом.
26. Розв'язати рівняння $\varphi(px) = \varphi(qx)$, де p і q – фіксовані різні прості числа.
27. Довести, що коли числа n і m мають одні і ті ж прості дільники, то $\varphi(nm) = m\varphi(n) = n\varphi(m)$. Зокрема, $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$.
28. Знайти суму чисел, які взаємно прості з числом 720 і менші за це число.
29. Довести, що коли $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n , то $\sum_{d|n} d\mu(d) = \frac{(-1)^m \varphi(n)}{p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1}}$.
30. Довести, що для кожного дійсного числа x виконується рівність $\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] = 1$.
31. Довести, що для кожного дійсного числа $s > 1$ виконується рівність $\zeta(s) = \prod_{p \text{ - прості}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.
32. Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$.
33. Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2$.
34. Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$.