

# ЛІНІЙНА

## Розділ 4. Арифметичний числовий векторний простір

### 1 семестр

Для побудови загальної теорії систем лінійних рівнянь недостатньо того апарату, який ми розглянули раніше. Окрім матриць, ми будемо змушені використовувати нове поняття (яке викликає, можливо, ще більшу загальноматематичну цікавість), а саме — поняття багатовимірного векторного простору.

#### 4.1. Вектори та лінійні операції над ними

Нехай  $n$  — довільне фіксоване натуральне число.

**Означення 4.1.**  *$n$ -вимірним числовим вектором* називають впорядковану послідовність  $n$  дійсних чисел

$$(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

де  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); при цьому числа  $a_i$  називають *координатами* заданого вектора.

Вектори позначатимемо малими латинськими буквами  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  і записуватимемо у вигляді вектор-рядка або вектор-стовпця:

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{або} \quad \vec{a}^\top = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(тут індекс « $\top$ » означає транспонування; у більшості випадків ми домовимося його опускати, тобто символ  $\vec{a}$  означатиме вектор-рядок або вектор-стовпчик залежно від контексту).

**Означення 4.2.** Вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, називають *нульовим* (нуль-вектором) і позначають  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

**Приклад 4.1.**  $\vec{a} = (1, \frac{3}{4}, -2)$  — 3-вимірний вектор,  $\vec{b} = (\sqrt{4}, -3, -\frac{1}{2}, 9)$  — 4-вимірний вектор,  $\vec{0} = (0, 0)$  — 2-вимірний нульовий вектор.

**Означення 4.3.** Два  $n$ -вимірні вектори  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  та  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$  вважатимемо *рівними*, якщо їхні відповідні координати рівні, тобто  $a_i = b_i$  для всіх  $i \in \overline{1, n}$ .

**Приклад 4.2.** Якщо  $\vec{a} = (3, 4, -2)$ ,  $\vec{b} = (3, 4, -2)$ ,  $\vec{c} = (1, 4, -2)$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  $\vec{a} \neq \vec{c}$  і  $\vec{b} \neq \vec{c}$ .

Означимо лінійні операції додавання векторів та множення векторів на скаляри.

**Означення 4.4.** Сумою двох  $n$ -вимірних числових векторів  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  та  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$  називається вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ , кожна координата якого є сумою відповідних координат векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \quad (4.1)$$

**Означення 4.5.** Добутком вектора  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  на довільне дійсне число  $\lambda$  називається вектор  $\lambda\vec{a}$ , кожна координата якого є добутком відповідної координати вектора  $\vec{a}$  на  $\lambda$ :

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n). \quad (4.2)$$

**Приклад 4.3.** Нехай  $\vec{a} = (7, 3, -2)$ ,  $\vec{b} = (4, -3, -1)$ . Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (7, 3, -2) + (4, -3, -1) = (11, 0, -3), \\ 10 \cdot \vec{a} &= 10 \cdot (7, 3, -2) = (70, 30, -20).\end{aligned}$$

**Твердження 4.1.** Для довільних  $n$ -вимірних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  та будь-яких скалярів  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  виконуються такі рівності:

- (1)  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ;
- (2)  $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$ ;
- (3)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{o}$ ;
- (4)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- (5)  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ ;
- (6)  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ ;
- (7)  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$ ;
- (8)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ , де  $1 \in \mathbb{R}$ .

**Доведення.** Оскільки всі ці властивості доводяться аналогічно, то доведемо тільки, наприклад, четверту та сьому.

Нехай  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \\ &= \{a_i \text{ та } b_i \text{ — дійсні числа, а для дійсних чисел виконується рівність } a_i + b_i = b_i + a_i\} = \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{b} + \vec{a}.\end{aligned}$$

Нехай  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Тоді

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= (\lambda + \mu) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2, \dots, (\lambda + \mu)a_n) = \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \dots, \lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) + (\mu a_1, \mu a_2, \dots, \mu a_n) = \\ &= \lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) + \mu \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a},\end{aligned}$$

що й потрібно було показати.  $\square$

**Означення 4.6.** Множину всіх  $n$ -вимірних числових векторів, на якій визначено лінійні операції додавання векторів (4.1) та множення векторів на скаляри (4.2), називають  *$n$ -вимірним арифметичним векторним простором* і позначають  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

## 4.2. Лінійна залежність векторів

Нехай  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  — вектори простору  $\mathbb{R}^n$ .

**Означення 4.7.** Вектор

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  — дійсні числа, називається *лінійною комбінацією* векторів  $\vec{a}_i$  з числовими коефіцієнтами  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Множину всіх лінійних комбінацій векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  називають *лінійною оболонкою* цих векторів і позначають  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \rangle$ , тобто

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \rangle = \{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k \mid \vec{a}_i \in \mathbb{R}^n, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, k \}.$$

Кажуть, що лінійна оболонка  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \rangle$  *породжена* векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  або *натягнута на* вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ .

**Означення 4.8.** Вектор  $\vec{b}$  *лінійно виражається* через вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , якщо існують такі скаляри  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ , що

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k.$$

**Приклади 4.4. 1.** Вектор  $\vec{b} = (-5, 3, 4)$  лінійно виражається через вектори  $\vec{a}_1 = (1, 0, 3)$ ,  $\vec{a}_2 = (-2, 1, 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (2, -1, 1)$ , оскільки  $\vec{b} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ .

**2.** Частковим випадком поняття лінійного вираження векторів є випадок пропорційності векторів. Вектор  $\vec{b}$  називається *пропорційним до вектора*  $\vec{a}$ , якщо існує таке число  $\beta$ , що  $\vec{b} = \beta \vec{a}$ . Нульовий вектор пропорційний довільному вектору  $\vec{a}$ , оскільки  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$ . Якщо ж вектор  $\vec{b}$  ненульовий і  $\vec{b} = \beta \vec{a}$ , то  $\beta \neq 0$ , а тому  $\vec{a} = \frac{1}{\beta} \vec{b}$ , тобто для ненульових векторів пропорційність володіє властивістю симетричності. Наприклад, вектор  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$  пропорційний вектору  $\vec{b} = (-3, 9, 6)$ , оскільки  $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$  або, що те саме,  $\vec{a} = \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$ . Аналогічно, заданий вектор  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$  не пропорційний вектору  $\vec{c} = (2, -1, 3)$ , оскільки рівність  $\vec{c} = \gamma \cdot \vec{a}$  не виконується при жодному значенні числа  $\gamma$ .

**Означення 4.9.** Систему векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  простору  $\mathbb{R}^n$  називають *лінійно залежною*, якщо рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \quad (4.3)$$

виконується хоча б при одному ненульовому скалярі  $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ; у цьому випадку говоримо, що лінійна залежність (4.3) *нетривіальна*.

Якщо ж рівність (4.3) можлива тоді і лише тоді, коли  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  називається *лінійно незалежною* (відповідно лінійна залежність (4.3) є *тривіальною*).

**Приклади 4.5. 1.** Система, що складається з одного ненульового вектора  $\vec{a}$ , є лінійно незалежною, оскільки рівність

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

можлива лише тоді, коли  $\lambda = 0$ . Аналогічно, система, що складається з одного нульового вектора  $\vec{0}$ , є лінійно залежною, оскільки рівність

$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

можлива при довільному ненульовому  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**2.** Будь-яка система векторів, що містить нульовий вектор  $\vec{0}$ , є лінійно залежною. Дійсно, лінійна залежність системи векторів  $\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_k$  випливає з правильності такої нетривіальної залежності

$$\lambda_1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0},$$

де  $\lambda_1$ , як легко бачити, може бути будь-яким ненульовим числом.

**3.** Будь-яка система векторів, що містить два пропорційні (або рівні) вектори, є лінійно залежною. Доведення аналогічне доведенню в попередньому прикладі, а тому пропонуємо виконати його самостійно.

**4.** З'ясуємо, чи є система векторів  $\vec{a}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{a}_2 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (4, 4, 7) \in \mathbb{R}^3$  лінійно залежною чи лінійно незалежною. Для цього прирівняємо до нуль-вектора лінійну комбінацію цих векторів

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \quad (4.4)$$

і знайдемо скаляри  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , які задовольняють цю рівність. Якщо серед цих скалярів існуватиме хоча б один ненульовий, то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  є лінійно залежною. Якщо ж рівність (4.4) задовольняє тільки нульовий набір скалярів  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  є лінійно незалежною.

Отож, підставивши в рівності (4.4) замість векторів їхні координати (у вигляді вектор-стовпчика, для зручності), отримаємо

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто, виконавши потрібні лінійні операції,

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 \\ 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 7 \cdot \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси, прирівнявши відповідні координати вектор-стовпчиків, отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 = 0, \\ 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 = 0, \\ 2 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 7 \cdot \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо метод Гауса для розв'язання цієї системи: оскільки розширенна матриця системи задовольняє такий ланцюг елементарних перетворень

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

то задана система рівнянь еквівалентна такій східчастій системі

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 = 0, \\ -1 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Отриманий вигляд східчастої системи (кількість рівнянь менша за кількість невідомих) уже говорить про те, що серед її розв'язків будуть ненульові. Знайдемо їх: спочатку, взявши змінну  $\lambda_3$  в ролі вільної, а змінні  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  — в ролі головних, знайдемо загальний розв'язок

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \cdot \lambda_3, \\ \lambda_2 = -\lambda_3, \\ \lambda_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

а потім звідси отримаємо частковий ненульовий розв'язок (наприклад, при  $\lambda_3 = 1$ )

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Отже, ми знайшли ненульовий набір скалярів  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 1$ , який задовольняє рівність (4.4),

$$-3 \cdot \vec{a}_1 - 1 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{o},$$

а тому задані вектори  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  є лінійно залежними за означенням.

5. Система векторів  $\vec{a}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  є лінійно незалежною, оскільки рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{o}$$

можлива лише за умови, що  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . У цьому легко переконатися, провівши дослідження, аналогічні тим, які були проведенні у попередньому прикладі. Дійсно,

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а тому

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

звідки  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , що й потрібно було показати.

**Зауваження 4.1.** Властивість векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  бути лінійно залежними чи незалежними жодним чином не пов'язана з порядком розгляду цих векторів, оскільки складові  $\lambda_i \vec{a}_i$  у рівності (4.3) можуть бути переставлені довільним чином.

Розглянемо ще один важливий приклад лінійно незалежних векторів — одиничні вектори.

**Означення 4.10.** Одиничними векторами простору  $\mathbb{R}^n$  називають вектори

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

**Зауваження 4.2.** 1. Одиничні вектори є лінійно незалежними. Дійсно, з співвідношення

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

випливає, що  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ , а, отже, рівність  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{o}$  правильна лише при нульовому наборі скалярів.

2. Довільний вектор  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  можна записати як лінійну комбінацію одиничних векторів :

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n.$$

### 4.3. Леми про лінійну залежність

**Лема 4.2.** Якщо хоча б одна підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система векторів лінійно залежна.

**Доведення.** Нехай, наприклад, перші  $s$  векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$  системи  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  ( $s < k$ ) лінійно залежні, тобто рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{o}$$

виконується при деякому ненульовому наборі скалярів  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ . Тоді, прийнявши

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \dots = \lambda_k = 0,$$

отримаємо нетривіальну лінійну залежність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s + 0 \cdot \vec{a}_{s+1} + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{o},$$

звідки й випливає, що вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  лінійно залежні. □

**Лема 4.3.** Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

**Доведення.** Від супротивного: якщо хоча б одна підсистема лінійно незалежної системи векторів виявилася лінійно залежною, то, за лемою 4.2, і вся система була б лінійно залежною — суперечність. □

**Лема 4.4.** Вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  ( $k \geq 2$ ) лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.

**Доведення.** Нехай система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  — лінійно залежна, тобто існує ненульовий набір дійсних чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , при якому правильною є рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}.$$

Припустимо для визначеності, що  $\lambda_1 \neq 0$ . Тоді

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \vec{a}_k,$$

тобто  $\vec{a}_1$  лінійно виражається через  $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ .

Навпаки, нехай один вектор (наприклад,  $\vec{a}_1$ ) є лінійною комбінацією решти векторів системи,

$$\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \cdots + \mu_k \vec{a}_k.$$

Тоді звідси отримуємо нетривіальну рівність

$$1 \cdot \vec{a}_1 - \mu_2 \vec{a}_2 - \cdots - \mu_k \vec{a}_k = \vec{o},$$

що і доводить лінійну залежність векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ .  $\square$

**Зауваження 4.3.** Загалом неправильно стверджувати, що кожен вектор лінійно залежної системи лінійно виражається через інші. Нехай, наприклад,  $\vec{a}$  — довільний ненульовий вектор. Система векторів  $\vec{a}, \vec{o}$  лінійно залежна, оскільки

$$0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{o} = \vec{o},$$

але, очевидно, ненульовий вектор  $\vec{a}$  не виражається через нульовий вектор  $\vec{o}$ .

**Лема 4.5.** Якщо вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  лінійно незалежні, а вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}$  лінійно залежні, то вектор  $\vec{b}$  є лінійною комбінацією векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ .

**Доведення.** Розглянемо нетривіальне співвідношення

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{a}_k + \mu \vec{b} = \vec{o}.$$

Якщо б  $\mu = 0$ , то й  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$  (оскільки за умовою леми вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  лінійно незалежні), а тому вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}$  були б лінійно незалежні, що суперечить умові леми. Тому  $\mu \neq 0$ , а, отже,

$$\vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\mu} \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\mu} \vec{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\mu} \vec{a}_k,$$

тобто вектор  $\vec{b}$  є лінійною комбінацією векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ , що й потрібно було довести.  $\square$

**Лема 4.6.** Якщо вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  лінійно незалежні і вектор  $\vec{b}$  не можна через них виразити, то система  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}$  — лінійно незалежна.

Доведення цієї леми безпосередньо випливає з попередньої леми 4.5.

**Лема 4.7 (основна лема про лінійну залежність).** Якщо вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$  лінійно незалежні і лінійно виражаються через вектори  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ , то  $s \leq r$ .

**Доведення.** Від супротивного: припустимо, що  $s > r$ . За умовою леми кожен з векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$  є лінійною комбінацією векторів  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ , тобто існують такі дійсні числа  $\beta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $1 \leq j \leq r$ , що

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \beta_{11} \vec{b}_1 + \beta_{12} \vec{b}_2 + \cdots + \beta_{1r} \vec{b}_r, \\ \vec{a}_2 &= \beta_{21} \vec{b}_1 + \beta_{22} \vec{b}_2 + \cdots + \beta_{2r} \vec{b}_r, \\ &\dots \\ \vec{a}_s &= \beta_{s1} \vec{b}_1 + \beta_{s2} \vec{b}_2 + \cdots + \beta_{sr} \vec{b}_r. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Прирівняємо до нуль-вектора лінійну комбінацію векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ :

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{o}. \tag{4.6}$$

Підставимо співвідношення (4.5) у рівність (4.6) і перегрупуємо її стосовно векторів  $\vec{b}_i$ :

$$(\beta_{11}\lambda_1 + \beta_{21}\lambda_2 + \cdots + \beta_{s1}\lambda_s)\vec{b}_1 + (\beta_{12}\lambda_1 + \beta_{22}\lambda_2 + \cdots + \beta_{s2}\lambda_s)\vec{b}_2 + \cdots + (\beta_{1r}\lambda_1 + \beta_{2r}\lambda_2 + \cdots + \beta_{sr}\lambda_s)\vec{b}_r = \vec{o}.$$

Прирівнявши в останній рівності всі коефіцієнти біля векторів  $\vec{b}_i$  до нуля, отримаємо систему  $r$  однорідних лінійних рівнянь з  $s$  невідомими  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$

Оскільки за припущенням  $s > r$  (кількість невідомих  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  більша за кількість рівнянь), то за лемою Гаусса 3.9 ця система має ненульовий розв'язок, тобто серед розв'язків  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  існує такий, де не всі  $\lambda_i$  одночасно дорівнюють нулю. Тому залежність (4.6) є нетривіальною, що свідчить про лінійну залежність векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ , а це суперечить умові леми.

Отож, наше припущення неправильне, а тому  $s \leq r$ .

1

**Лема 4.8.** *Будь-які  $n+1$  і більше векторів простору  $\mathbb{R}^n$  лінійно залежні.*

**Доведення.** Розглянемо систему  $k > n$  векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  простору  $\mathbb{R}^n$  і припустимо, що вони лінійно незалежні. Оскільки одиничні вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  простору  $\mathbb{R}^n$  лінійно незалежні і кожен з векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  можна через них виразити (зауваження 4.2), то за лемою 4.7 отримуємо, що  $k \leq n$ . Суперечність. Отже, наше припущення неправильне, а тому вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  лінійно залежні.  $\square$

1

#### 4.4. Підпростори. Бази та вимірність підпросторів

**Означення 4.11.** Непорожня підмножина  $U$  простору  $\mathbb{R}^n$  називається *підпростором* цього простору, якщо виконуються такі дві умови:

- (1) для довільних  $\vec{a}, \vec{b} \in U$  сума  $\vec{a} + \vec{b}$  належить  $U$ ;  
(2) для довільних  $\vec{a} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$  добуток  $\lambda\vec{a}$  також належить  $U$ .

Будь-який простір  $\mathbb{R}^n$  містить два *trivialнi* підпростори: увесь простір  $\mathbb{R}^n$  і нульовий підпростір  $\{\vec{0}\}$  (тобто підпростір, який містить лише нуль-вектор).

**Приклади 4.6. 1.** Підпростором простору  $\mathbb{R}^n$  є множина всіх  $n$ -вимірних векторів, у яких перша й остання координати рівні нулю.

2. Множина всіх  $n$ -вимірних векторів, координатами яких є цілі числа, не утворює підпростір простору  $\mathbb{R}^n$ .  
 3. Якщо  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ , то лінійна оболонка  $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$  є підпростором простору  $\mathbb{R}^n$ .

Справді, нехай

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle,$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_k \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$$

і нехай  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle,$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \alpha_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\lambda \alpha_k) \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle,$$

що й потрібно було показати.

Нехай  $U$  — довільний підпростір простору  $\mathbb{R}^n$ .

**Означення 4.12.** Система векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \in U$  називається *базою* підпростору  $U$ , якщо виконуються такі дві умови:

- (1) вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$  лінійно незалежні;
- (2) кожен вектор підпростору  $U$  можна лінійно виразити через вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ .

**Приклад 4.7.** Розглянемо систему одиничних векторів  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  простору  $\mathbb{R}^n$ . Як ми вже знаємо із зауваження 4.2, одиничні вектори лінійно незалежні та через них можна лінійно виразити довільний вектор простору  $\mathbb{R}^n$ . Отже,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  — база простору  $\mathbb{R}^n$  (її називають *стандартною базою простору  $\mathbb{R}^n$* ).

**Означення 4.13.** Якщо кожен вектор підпростору  $U$  можна лінійно виразити через комбінацію векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \in \mathbb{R}^n$ , то ці вектори називають *твірними* підпростору  $U$ , а сам підпростір  $U$  вважають *породженим векторами*  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ .

**Приклади 4.8.** 1. Оскільки довільний вектор простору  $\mathbb{R}^n$  можна записати як лінійну комбінацію одиничних векторів  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  (зауваження 4.2), то ці одиничні вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  є системою твірних простору  $\mathbb{R}^n$ . Вилучення будь-якого вектора з цієї системи призводить до того, що вони перестають бути твірними простору  $\mathbb{R}^n$  (зокрема, вилучений вектор лінійно не виразиться через решту векторів, що залишилися у системі). Звідси також випливає, що лінійна оболонка одиничних векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  співпадає з простором  $\mathbb{R}^n$ , тобто

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n.$$

2. Вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  є системою твірних лінійної оболонки  $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$ .

Оскільки, як легко бачити, базові вектори підпростору є твірними цього підпростору (і цойно розглянутий приклад це підтверджує), то можна сформулювати ще одне, еквівалентне 4.12, означення бази: *базою* підпростору називається будь-яка лінійно незалежна система твірних цього підпростору.

**Теорема 4.9.** Кожен вектор підпростору можна однозначно записати у вигляді лінійної комбінації векторів бази цього підпростору.

**Доведення.** Нехай  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$  — база підпростору  $U$ . Розглянемо довільний вектор  $\vec{a} \in U$  і припустимо, що його можна записати у вигляді двох лінійних комбінацій векторів бази:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r,$$

$$\vec{a} = \lambda'_1 \vec{a}_1 + \lambda'_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda'_r \vec{a}_r.$$

Віднявши почленно другу рівність від першої, отримаємо

$$\vec{o} = (\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \vec{a}_2 + \dots + (\lambda_r - \lambda'_r) \vec{a}_r.$$

Оскільки вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$  лінійно незалежні, то остання рівність можлива лише при нульовому наборі скалярів:

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \quad \lambda_2 - \lambda'_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_r - \lambda'_r = 0,$$

звідки випливає, що

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \quad \lambda_2 = \lambda'_2, \quad \dots, \quad \lambda_r = \lambda'_r.$$

Отже, розкладання довільного вектора підпростору  $U$  за векторами його бази однозначне.  $\square$

**Теорема 4.10.** Кожен підпростір  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  має скіченну базу.

**Доведення.** Якщо  $U$  — нульовий підпростір простору  $\mathbb{R}^n$ , то доводити нічого. Тому нехай  $U$  — ненульовий підпростір простору  $\mathbb{R}^n$ .

Розглянемо довільний ненульовий вектор  $\vec{a}_1 \in U$ . Система, що складається з одного ненульового вектора  $\vec{a}_1$ , є лінійно незалежною, і якщо через цей вектор можна лінійно виразити всі інші вектори підпростору  $U$ , то все доведено. В іншому випадку знайдеться вектор  $\vec{a}_2 \in U$ , який лінійно не виражається через  $\vec{a}_1$ . Тоді за лемою 4.6 система  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  лінійно незалежна. Якщо, крім цього, довільний інший вектор підпростору  $U$  є лінійною комбінацією векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ , то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  утворює базу підпростору  $U$  і доведення завершується. У протилежному випадку, знову ж таки, знайдеться деякий вектор  $\vec{a}_3 \in U$ , який не виражатиметься лінійно через вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  і система  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  буде лінійно незалежною і т.д.

Продовжуючи аналогічно вищенаведений процес (а він є скінченним, оскільки за лемою 4.8 довільна лінійно незалежна система у просторі  $\mathbb{R}^n$  містить не більше, ніж  $n$  векторів), на деякому  $r$ -му кроці ( $r \leq n$ ) одержимо таку лінійно незалежну систему векторів  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$  підпростору  $U$ , що для довільного ненульового вектора  $\vec{a}_{r+1}$  з  $U$  система  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}$  буде лінійно залежною. Тому вектор  $\vec{a}_{r+1}$  (а з довільноті його вибору, отже, й будь-який інший вектор з підпростору  $U$ ) буде виражатися через вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ .

Отож, вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$  утворюють базу підпростору  $U$ .  $\square$

З доведення заданої теореми легко бачити, що побудову бази можна розпочати з будь-якого ненульового вектора підпростору  $U$ . Тому правильне таке твердження.

**Твердження 4.11.** Кожен ненульовий підпростір  $U$  простору  $\mathbb{R}^n$  має нескінченну кількість баз.

**Приклади 4.9. 1.** Системи векторів  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  та  $\vec{a}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (2, 1)$  є двома різними базами простору  $\mathbb{R}^2$ .

**2.** Поряд зі стандартною базою  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  у просторі  $\mathbb{R}^n$  можна розглядати базу

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

.....,

$$\vec{e}'_n = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_n.$$

У тому, що такі вектори  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  утворюють базу простору  $\mathbb{R}^n$ , пропонуємо перевірити самостійно.

**Теорема 4.12.** Усі бази підпростору  $U$  простору  $\mathbb{R}^n$  містять однакову кількість векторів.

**Доведення.** Нехай  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  — база підпростору  $U$ , і припустимо, що  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$  — ще одна база цього ж підпростору. Оскільки вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  лінійно незалежні і лінійно виражаються через вектори  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ , то за лемою 4.7 виконується нерівність  $r \leq s$ . З іншого боку, вектори  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$  також лінійно незалежні і лінійно виражаються через вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ , а тому, за тією ж лемою 4.7,  $s \leq r$ . Отже,  $s = r$ , що й треба було довести.  $\square$

**Означення 4.14.** Число векторів у довільній базі підпростору  $U$  називають його *вимірністю* і позначають  $\dim U$ .

**Приклад 4.10.** Стандартна база  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  простору  $\mathbb{R}^n$  містить  $n$  векторів, а тому й довільна база цього простору за теоремою 4.12 містить  $n$  векторів. Отже,  $\dim \mathbb{R}^n = n$ . Аналогічно,  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ,  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

**Зауваження 4.4.** Оскільки  $\dim \mathbb{R}^n = n$ , то для простору  $\mathbb{R}^n$  означення бази можна переформулювати так: *базою простору  $\mathbb{R}^n$  називається довільна лінійно незалежна система з  $n$  векторів цього простору.*