

ЛІНІЙНА

Розділ 3.

Системи лінійних рівнянь

3.1. Поняття системи лінійних рівнянь та її розв'язків

Нехай m, n – фіксовані натуральні числа. В загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими має такий вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

При цьому через x_1, x_2, \dots, x_n позначено *невідомі*, які підлягають обчисленню (їхнє число n не обов'язково має дорівнювати числу рівнянь m); величини $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, які називають *коєфіцієнтами системи*, і величини b_1, b_2, \dots, b_m , які називають *вільними членами*, передбачаються відомими. Кожен коєфіцієнт a_{ij} має два індекси, перший з яких i вказує на номер рівняння, що містить даний елемент, а другий j — на номер невідомої, поряд з якою розміщено цей коєфіцієнт. Без зменшення загальності вважатимемо, що елементи a_{ij} та b_i — дійсні числа¹.

Із коефіцієнтів та вільних членів системи (3.1) можна утворити матрицю

до колоквиуму, (3.2)

яка називається *розвиненою матрицею системи* (3.1). Очевидно, що для задання системи лінійних рівнянь достатньо задати її розвинену матрицю.

Приклад 3.1. Розширеною матрицею системи $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ є матриця $A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{array} \right)$.

Означення 3.1. Система лінійних рівнянь називається *неоднорідною*, якщо хоча б один з її вільних членів відмінний від нуля. Якщо ж всі вільні члени системи дорівнюють нулю, то вона називається *однорідною* (детальніше про однорідні системи рівнянь у § 3.10).

Означення 3.2. Система (3.1) називається *квадратною*, якщо кількість її рівнянь m дорівнює кількості її невідомих n .

Означення 3.3. Розв'язком системи (3.1) називають таку впорядковану сукупність чисел c_1, c_2, \dots, c_n , яка при заміні у системі (3.1) невідомих x_1, x_2, \dots, x_n відповідно числами c_1, c_2, \dots, c_n

¹Хоча цей випадок об'єктивно не є простішим від загального, коли елементи a_{ij} та b_i належать довільному числовому полю.

перетворює всі рівняння цієї системи у правильні тотожності. *Розв'язати систему лінійних рівнянь* означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує. Якщо система лінійних рівнянь не має розв'язків, то вона називається *несумісною*. Якщо система лінійних рівнянь має розв'язки, то вона називається *сумісною*. У випадку сумісної системи лінійних рівнянь можливі дві ситуації: якщо система має єдиний розв'язок, то вона називається *визначеню*; якщо система має безліч розв'язків, то вона називається *невизначеню*.

Приклади 3.2. 1. Розглянемо три системи лінійних рівнянь

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 = -1; \end{cases} \quad 3) x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

Перша з них не має розв'язків, а тому є несумісною. Друга — сумісна і визначена, оскільки має єдиний розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 2$. Третя є прикладом невизначеності системи, оскільки, як легко бачити, має безліч розв'язків вигляду $x_1 = -x_2 - x_3 + 4$, де x_2, x_3 — довільні дійсні числа.

2. Довільна однорідна система лінійних рівнянь є сумісною, оскільки завжди має мінімум один розв'язок (наприклад, нульовий).

Означення 3.4. Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають однакові множини розв'язків (тобто довільний розв'язок однієї з них є розв'язком іншої та навпаки). Зокрема, вважається, що кожні дві несумісні системи лінійних рівнянь еквівалентні.

3.2. Матричний запис системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь (3.1) і введемо такі позначення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Матриця A , яка, як бачимо, утворена з коефіцієнтів біля невідомих системи (3.1), називається *основною матрицею* (або *матрицею коефіцієнтів*) цієї системи; матриці X та B , утворені із невідомих системи та її вільних членів відповідно, називаються *стовпчиком невідомих* та *стовпчиком вільних членів* системи (3.1).

За допомогою цих позначень систему лінійних рівнянь (3.1) можна переписати у, так званому, *матричному вигляді*:

$$A \cdot X = B. \quad (3.4)$$

Рівносильність записів (3.4) та (3.1) легко доводиться звичайним перемноженням матриць. Очевидно, що кожній системі (3.1) відповідає єдина пара матриць A та B , і навпаки.

Приклад 3.3. Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

у матричному записі має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Матричний запис системи лінійних рівнянь дозволяє навести ще одне означення розв'язку системи рівнянь, яке рівносильно означенню 3.3: матриця $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ є *розв'язком* системи лінійних рівнянь (3.1), якщо вона задовільняє рівняння (3.4).

Приклад 3.4. Матриця-стовпчик $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$

оскільки

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Систему лінійних рівнянь (3.1) можна ще також записати у вигляді, де кожна невідома є ваговим коефіцієнтом в лінійній комбінації вектор-стовпців

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Це дозволяє переформулювати поняття розв'язку системи рівнянь в термінах векторного простору (див. розділ 4 «Арифметичний векторний простір»): система рівнянь (3.1) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли лінійна комбінація (лінійна оболонка) векторів лівої частини співвідношення (3.5) включає вектор правої частини.

Приклад 3.5. Система лінійних рівнянь з прикладу 3.3 може бути переписана у вигляді

$$Для підготовки до колоквию,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3.3. Невироджені системи. Метод обернених матриць

Якщо система лінійних рівнянь є квадратною, то, очевидно, її матриця коефіцієнтів є квадратною і тому можна обчислити визначник цієї матриці, який ми назовемо *визначником системи лінійних рівнянь*.

Означення 3.5. Якщо визначник квадратної системи лінійних рівнянь відмінний від нуля, то ця система називається *невиродженою*, у протилежному випадку — *виродженою*.

Розглянемо невироджену систему лінійних рівнянь у матричному вигляді

$$AX = B \quad (3.6)$$

і знайдемо її розв'язок. Оскільки матриця A невироджена, то для неї існує обернена матриця A^{-1} . Домножимо обидві частини рівності (3.6) зліва на матрицю A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки у лівій частині останньої рівності маємо $A^{-1}AX = EX = X$, то звідси отримуємо

$$X = A^{-1}B. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) є *матричним записом розв'язку* системи (3.6), а спосіб його знаходження називають *методом розв'язання невироджених систем рівнянь за допомогою обернених матриць*.

Приклади 3.6. 1. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Оскільки $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, то задана система невироджена і її розв'язки можна обчислити за формулою (3.7):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

2. Розв'яжемо матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Тоді задане матричне рівняння можна переписати у вигляді

$$AXB = C$$

і оскільки $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, то, домноживши останню рівність зліва на A^{-1} і справа на B^{-1} , отримаємо

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що, якщо в матричному рівнянні $AXB = C$ визначник хоча б однієї з матриць A , B дорівнює нулю, то звідси не можна робити висновок, що дане рівняння не має розв'язків. У такому випадку для розв'язання матричного рівняння потрібно використовувати інші способи (наприклад, зводити його до розв'язання систем лінійних рівнянь).

3.4. Формули Крамера розв'язання невироджених систем

Розглянемо невироджену систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$a \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.8)$$

і запишемо її розв'язок у матричному вигляді

$$X = A^{-1}B, \quad (3.9)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Якщо позначити через Δ визначник матриці A , то

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

і матричну рівність (3.9) можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n) \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$x_i = \frac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки за теоремою заміщення (теорема 2.17)

$$A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n = \Delta_i,$$

де Δ_i — визначник, який отримується з визначника Δ заміною i -го стовпчика стовпчиком з вільних членів системи, то

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (3.10)$$

Співвідношення (3.10) називаються *формулами Крамера*² розв'язку невиродженої системи рівнянь (3.8).

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 3.1 (Крамера). Невироджена система лінійних рівнянь (3.8) має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулами (3.10).

Приклад 3.7. Розв'яжемо методом Крамера систему рівнянь із попереднього прикладу 3.6

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Оскільки, як нам уже відомо, $\Delta = 9 \neq 0$, то розв'язок заданої системи може бути обчислено за формулами Крамера (3.10). Для цього знайдемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -9.$$

Отож, розв'язками цієї системи будуть числа

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Зауваження 3.1. Усі вищеперелічені міркування цього і попереднього параграфів стосувались випадку невироджених систем лінійних рівнянь. Якщо ж система рівнянь вироджена, то вона може бути або несумісною, або невизначену. Зокрема, якщо $\Delta = 0$, але $\Delta_i \neq 0$ для довільного $i = 1, \dots, n$, то система (3.8) несумісна. Якщо ж $\Delta = \Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$, то система (3.8) є невизначену і для знаходження її розв'язків треба застосувати інші методи (наприклад, метод Гауса, який ми розглянемо у §3.8).

Зауваження 3.2. Формули Крамера — це далеко не найкращий спосіб для практичного розв'язання систем лінійних рівнянь (за винятком, можливо, випадку $n = 2$). Вони мають здебільшого теоретичне застосування.

²Формули Крамера для випадків $n = 2$ і 3 ми вже розглядали у § ??

3.5. Елементарні перетворення систем рівнянь

Означення 3.6. Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають перетворення таких трьох типів:

- 1) множення будь-якого рівняння системи на ненульовий скаляр;
- 2) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на скаляр;
- 3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Очевидно, що довільний розв'язок початкової (вихідної) системи лінійних рівнянь є розв'язком нової системи, отриманої з вихідної елементарними перетвореннями. З іншого боку, початкову систему рівнянь можна отримати з нової системи елементарними перетвореннями того ж самого типу. Наприклад, якщо дадамо до першого рівняння друге, помножене на λ , то можна повернутися назад, додавши до першого рівняння нової системи її друге рівняння (воно таке саме, як у вихідній системі), помножене на $(-\lambda)$. Отож, правильне таке твердження.

Твердження 3.2. Довільні елементарні перетворення системи лінійних рівнянь приводять до еквівалентної їй системи.

Оскільки виконання елементарних перетворень над системою лінійних рівнянь рівносильне аналогічним елементарним перетворенням над її розширеною матрицею³, то спочатку розглянемо поняття східчастої матриці та можливість зведення довільної матриці до східчастого вигляду елементарними перетвореннями рядків (стовпчиків).

3.6. Східчасті матриці

Означення 3.7. Матриця $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ називається *східчастою*, якщо вона задоволяє такі умови:

- 1) нульові рядки (якщо такі існують) розташовані нижче всіх ненульових рядків;
- 2) номери стовпчиків, у яких розміщені перші ненульові елементи рядків матриці, утворюють зростаючу послідовність (тобто якщо $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ — перші ненульові елементи першого, другого, ..., r -го рядків ($r \leq m$), то $j_1 < j_2 < \dots < j_r$).

Інакше кажучи, східчастою матрицею є матриця

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} 0 & \dots & 0 & |a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & |0 & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & |0 & \dots & 0 & \dots & |a_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & |0 & \dots & 0 & \dots & |0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & |0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \quad (3.11)$$

в якій кутові елементи $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ відмінні від нуля, а всі елементи, що розташовані зліва та нижче від них, дорівнюють нулю.

Приклад 3.8. Східчастими матрицями є нульова матриця; одинична матриця; матриця-рядок; матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

³Нагадаємо, що елементарні перетворення матриць розглядалися у §1.7.

а от матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

не є східчастими.

Теорема 3.3. Довільна матриця еквівалентна деякій східчастій матриці.

Оскільки для зведення довільної матриці до східчастого вигляду достатньо виконати елементарні перетворення лише над рядками, то ми сформулюємо та доведемо теорему, з якої теорема 3.3 випливатиме як наслідок.

Теорема 3.4. Довільна матриця може бути зведена до східчастого вигляду (3.11) за допомогою елементарних перетворень лише рядків.

Доведення. Якщо матриця нульова, то вона вже східчасти і доводити нічого. Тому нехай матриця $A = [a_{ij}]$ є ненульовою матрицею порядку $m \times n$ і нехай, з точністю до перестановки рядків, a_{1j_1} — перший ненульовий елемент першого ненульового стовпчика матриці, тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_3} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j_1} & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_3} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{3j_1} & \dots & a_{3j_2} & \dots & a_{3j_3} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj_1} & \dots & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де $a_{1j_1} \neq 0$. Виконаємо над цією матрицею такі елементарні перетворення: до другого рядка додамо перший рядок, помножений на $-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}$; до третього рядка також додамо перший, але помножений уже на $-\frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}}$ і т.д., до m -го рядка додамо перший, помножений на $-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}}$. У результаті отримаємо еквівалентну до A матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_3} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a'_{2j_2} & \dots & a'_{2j_3} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a'_{3j_2} & \dots & a'_{3j_3} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a'_{mj_2} & \dots & a'_{mj_3} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далі з точністю до перестановок рядків матриці A' припустимо, що елемент a'_{2j_2} є першим ненульовим елементом наступного після j_1 -го стовпчика (не враховуючи елементи первого рядка). Тоді над матрицею A' виконаємо аналогічні наведеним вище елементарні перетворення, з тією відмінністю, що використовуватимемо не перший, а другий рядок: помножимо другий рядок на $-\frac{a'_{3j_2}}{a'_{2j_2}}$ і додамо до третього; далі помножимо другий рядок на $-\frac{a'_{4j_2}}{a'_{2j_2}}$ і додамо до четвертого і т.д., до m -го рядка додамо до другий, помножений на $-\frac{a'_{mj_2}}{a'_{2j_2}}$. Отримаємо еквівалентну до A' (отже, і до матриці A) матрицю

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_3} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a'_{2j_2} & \dots & a'_{2j_3} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a''_{3j_3} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a''_{mj_3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи аналогічні перетворення далі (а цей процес скінчений, оскільки матриця A скінченної вимірності $m \times n$), у підсумку отримаємо східчасту матрицю вигляду (3.11). \square

Приклад 3.9. Зведемо до східчастого вигляду матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Спочатку виконаємо над нею такі елементарні перетворення другого типу: додамо до другого рядка перший рядок, помножений на -2 ; потім до третього рядка додамо перший рядок. Отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тепер третій рядок домножимо на -3 і додамо до нього другий (тобто виконаємо елементарні перетворення відповідно 1-го та 2-го типу одночасно):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

У випадку невиродженості розглядуваної матриці вона може бути зведенна елементарними перетвореннями рядків (або стовпчиків) не лише до східчастої, але навіть до одиничної матриці.

Теорема 3.5. Якщо $\det A \neq 0$, то $A \sim E$, причому зведення матриці A до одиничної E можна здійснити за допомогою елементарних перетворень лише рядків (або лише стовпчиків).

Доведення. Проведемо доведення методом математичної індукції. Для невиродженої матриці первого порядку теорема очевидна. Припустимо, що теорема правильна для довільної невиродженої матриці порядку $n - 1$ і розглянемо невиродженну матрицю n -го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

З невиродженості матриці A випливає, що серед елементів первого стовпчика мусить бути хоча б один ненульовий елемент. Без зменшення загальності вважатимемо, що таким ненульовим елементом є елемент a_{11} . Домножимо первый рядок матриці A на елемент $\frac{1}{a_{11}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тепер додамо до другого рядка отриманої матриці первый рядок, помножений на $-a_{21}$, до третього рядка — цей же первый рядок, але помножений на $-a_{31}$, і т.д. В результаті отримаємо матрицю вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця A' є невиродженою, а тому її матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

також невироджена. Оскільки порядок матриці B дорівнює $n - 1$, то за індуктивним припущенням матриця B за допомогою елементарних перетворень лише рядків може бути зведена до одиничної матриці. Тому матриця A' (а, отже, й матриця A) зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер, додавши до першого рядка отриманої матриці другий рядок, помножений на $-a'_{21}$, потім третій рядок, помножений на $-a'_{31}$, і т.д., n -ий рядок, помножений на $-a'_{n1}$, отримаємо одиничну матрицю порядку n . Отож, $A \sim E$.

Аналогічно доводиться, що невироджена матриця зводиться до одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень лише стовпчиків. \square

Оскільки довільну невироджену матрицю A можна звести до одиничної елементарним перетворенням рядків чи стовпчиків, то, виконавши над одиничною матрицею обернені до заданих і у зворотному порядку елементарні перетворення, отримаємо, очевидно, початкову матрицю A , тобто правильною є така теорема.

Наслідок 3.6. Довільна невироджена матриця може бути отримана з одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень лише рядків (або лише стовпчиків).

Якщо при зведенні матриці до східчастого вигляду дозволити елементарні перетворення не лише рядків, а й одночасно стовпчиків (за потреби), то цю матрицю можна звести до, так званого, строго східчастого вигляду. Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

у якій $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0$, називається строго східчастою (або верхньою трапецієвидною)⁴.

Теорема 3.7. Довільна матриця еквівалентна деякій строго східчастій матриці.

Доведення. Покажемо, що довільну ненульову матрицю $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпчиків можна звести до вигляду (3.12). Дійсно, з теореми 3.4 випливає, що цю матрицю A за допомогою елементарних перетворень рядків можна звести до східчастого вигляду (3.11). Тепер над стовпчиками цієї східчастої матриці виконаємо такі елементарні перетворення: j_1 -ий стовпчик поміняємо місцями з першим, j_2 -ий стовпчик — з другим, і т.д., j_r -ий стовпчик поміняємо місцями з r -им стовпчиком. Очевидно, що у результаті цих перетворень отримаємо строго східчасту матрицю вигляду (3.12), що й треба було довести. \square

3.7. Східчасті системи лінійних рівнянь

Означення 3.8. Система лінійних рівнянь називається *східчastою*, якщо її розширена матриця східчasta.

⁴ Аналогічно можна ввести до розгляду поняття *нижньої трапецієвидної матриці*.

Приклад 3.10. Система лінійних рівнянь $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 4x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$ є східчастою, оскільки східчастою є її розширенна матриця $\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 7 \end{array} \right)$.

Теорема 3.8. Довільна система лінійних рівнянь еквівалентна деякій східчастій системі рівнянь.

Доведення цієї теореми повністю повторює міркування доведення теореми 3.4, якщо їх застосувати до розширеної матриці системи лінійних рівнянь.

Приклад 3.11. Зведемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

до східчастого вигляду. Для цього зведемо до східчастого вигляду її розширену матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right)$$

(спочатку до другого рядка додали перший, помножений на (-2) ; потім до третього рядка додали перший, помножений на (-4) ; насамкінець, до третього рядка додали другий, помножений на (-3)). Отже, початковій системі лінійних рівнянь еквівалентна така східчаста система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -7x_3 = -21. \end{cases}$$

3.8. Метод Гауса розв'язку системи лінійних рівнянь

Як нам уже відомо, існують різні методи розв'язання систем лінійних рівнянь. Розглянемо один з найуніверсальніших із них — *метод Гауса* (*метод послідовного виключення змінних*). Викладення цього методу зручно провести не для систем рівнянь, а для їхніх розширеніх матриць.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.13)$$

і запишемо її розширену матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Без зменшення загальності вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. За теоремою 3.4 задану розширену матрицю можна звести до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3l} & \dots & a_{3s} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (3.14)$$

де $a_{11}, a_{2k}, a_{3l}, \dots, a_{rs} \neq 0$. Очевидно, що східчастій матриці (3.14) після відкидання нульових рівнянь відповідає така східчаста система рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1l}x_l + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2k}x_k + \dots + a_{2l}x_l + \dots + a_{2s}x_s + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{3l}x_l + \dots + a_{3s}x_s + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \\ 0 = b_{r+1}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Можливі три принципово різні випадки.

1) $b_{r+1} \neq 0$ (випадок несумісності системи рівнянь). У цьому випадку останнє рівняння системи (3.15) має вигляд

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}.$$

Очевидно, що жоден набір чисел x_1, x_2, \dots, x_n не задовільняє це рівняння, а тому система (3.15) не має розв'язків і, отже, є несумісною. Фактично ми довели, що для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно та достатньо, щоб після зведення до східчастого вигляду у ній не виявилось рівняння вигляду $0 = b_i$, де $b_i \neq 0$.

Приклад 3.12. Розв'яжемо методом Гауса систему лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Розширена матриця даної системи лінійних рівнянь має вигляд

$$\text{Для } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -7 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right).$$

Додамо послідовно до другого рядка перший рядок, помножений на (-1) , до третього — перший рядок, помножений на (-2) . Отримаємо

$$\text{до колоквіуму,} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Цій східчастій матриці відповідає така система лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 7x_2 + x_3 - 8x_4 = 1, \\ 0 = 1, \end{array} \right.$$

останнє рівняння якої, як легко бачити, не має змісту. Отже, система (3.16) несумісна.

2) $b_{r+1} = 0$ і $r = n$ (випадок сумісності та визначеності). У цьому випадку отримуємо строго трикутну систему рівнянь, тобто систему вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{nn} \neq 0$. З останнього рівняння цієї системи $a_{nn}x_n = b_n$ обчислимо невідому $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$; потім з передостаннього рівняння $a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$, використовуючи

вже обчислене значення x_n , знайдемо невідому x_{n-1} і т.д.; насамкінець з першого рівняння системи за допомогою вже знайдених значень x_2, \dots, x_n однозначно обчислимо невідому x_1 . У підсумку отримаємо, що система (3.17) має розв'язок, причому єдиний, і тому є сумісною та визначеною. Отож, сумісна система рівнянь (3.13) є визначеною тоді і лише тоді, коли в отриманій із неї східчастій системі (3.15) виконується рівність $r = n$.

Приклад 3.13. Розв'яжемо методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11. \end{cases} \quad (3.18)$$

Розширенна матриця цієї системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array} \right).$$

Послідовно додамо до другого рядка, помноженого на -4 , та до третього, помноженого на -2 , перший рядок.
Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & -4 & 7 & -15 \end{array} \right).$$

Поділимо другий рядок на 3 і додамо до третього рядка цей другий рядок, домножений на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right).$$

Цій східчастій матриці відповідає система

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_3 = -5, \end{cases}$$

де, як бачимо, кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. З останнього рівняння цієї системи знайдемо: $x_3 = -1$; з другого: $x_2 = \frac{1}{2}(5+x_3) = \frac{1}{2}(5+(-1)) = 2$; відповідно з первого: $x_1 = \frac{1}{4}(7-2x_2-x_3) = \frac{1}{4}(7-4+1) = 1$. Отже, система (3.18) має єдиний розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

3) $b_{r+1} = 0$ і $r < n$ (випадок сумісності та невизначеності). У цьому випадку східчастим виглядом системи (3.13) буде система

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1l}x_l + \cdots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2k}x_k + \cdots + a_{2l}x_l + \cdots + a_{2s}x_s + a_{2,s+1}x_{s+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{3l}x_l + \cdots + a_{3s}x_s + a_{3,s+1}x_{s+1} + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{rs}x_s + a_{r,s+1}x_{s+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{array} \right.$$

Без зменшення загальності припустимо, що $a_{11}, a_{2k}, a_{3l}, \dots, a_{rs} \neq 0$. Тоді невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$, з яких розпочинається перше, друге, третє, ..., r -те рівняння, називемо *головними*, а всі інші невідомі — *вільними*. Легко бачити, що головних невідомих є r , а вільних — $n - r$. Якщо перенести члени з вільними невідомими в праву частину, отримаємо строго трикутну систему рівнянь стосовно головних невідомих

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{1k}x_k + a_{1l}x_l + \cdots + a_{1s}x_s & = & b_1 - a_{1,s+1}x_{s+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{2k}x_k + a_{2l}x_l + \cdots + a_{2s}x_s & = & b_2 - a_{2,s+1}x_{s+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ a_{3l}x_l + \cdots + a_{3s}x_s & = & b_3 - a_{3,s+1}x_{s+1} - \cdots - a_{3n}x_n, \\ \dots & & \dots \\ a_{rs}x_s & = & b_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{array} \right.$$

На Ньому

Розв'язуючи її аналогічно, як у попередньому випадку, знайдемо головні невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$, виразивши їх через вільні,

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + d_{1,s+1}x_{s+1} + \dots + d_{1n}x_n, \\ x_k = d_2 + d_{2,s+1}x_{s+1} + \dots + d_{2n}x_n, \\ x_l = d_3 + d_{3,s+1}x_{s+1} + \dots + d_{3n}x_n, \\ \dots \\ x_s = d_r + d_{r,s+1}x_{s+1} + \dots + d_{rn}x_n. \end{cases} \quad (3.19)$$

Ці спiвiдношеннi (3.19) називають **загальним розв'язком** системи (3.13). Частковi розв'язки системи отримують iз загального пiдстановкою замiсть вiльних членiв конкретних дiйсних чисел. Оскiльки цi числа можна вибирати довiльно, то, очевидно, система має нескiнченно багато розв'язкiв, тобто є невизначеною. Отож, сумiсна система лiнiйних рiвнянь (3.13) є невизначеною тодi, коли кiлькiсть невiдомих бiльша за кiлькiсть рiвнянь ($n > m$).

Приклад 3.14. За методом Гауса розв'яжемо систему лiнiйних рiвнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \quad (3.20)$$

Вiпишемо розширену матрицю даної системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

До другого рядка цiєї матрицi додамо перший рядок, помножений на -2 , а до третього додамо знову перший, але помножений на -4 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -3 & -15 \end{array} \right).$$

Тепер до третього рядка додамо другий, помножений на -3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & -12 \end{array} \right).$$

Очевидно, що цiй схiдчастiй матрицi вiдповiдає система лiнiйних рiвнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ -7x_3 + 9x_4 = -12. \end{cases}$$

Оскiльки ця система мiстить три рiвняння i чотири невiдомi, то для знаходження її розв'язку одну невiдому ($4 - 3 = 1$), наприклад, x_4 , вiзьмемо за вiльну, а решту вiразимо через неї:

з третього рiвняння

$$x_3 = -\frac{1}{7}(-12 - 9x_4) = \frac{12}{7} + \frac{9}{7}x_4;$$

з другого рiвняння

$$x_2 = -\frac{1}{3}(-1 + 4x_4 - 3x_3) = -\frac{1}{3}(-1 + 4x_4 - 3(\frac{12}{7} + \frac{9}{7}x_4)) = \frac{43}{21} - \frac{1}{21}x_4;$$

з першого рiвняння

$$x_1 = 3 - x_4 + x_3 - 2x_2 = 3 - x_4 - \frac{1}{7}(-12 - 9x_4) - 2(\frac{43}{21} - \frac{1}{21}x_4) = \frac{13}{21} + \frac{8}{21}x_4.$$

Отже, загальний розв'язок системи (3.20) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{21} + \frac{8}{21}x_4, \\ x_2 = \frac{43}{21} - \frac{1}{21}x_4, \\ x_3 = \frac{12}{7} + \frac{9}{7}x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Для отримання якого-небудь часткового розв'язку підставимо замість вільної невідомої x_4 довільне значення. Наприклад, нехай $x_4 = 1$. Тоді $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$. Отож, частковий розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Означення 3.9. Зведення системи лінійних рівнянь до східчастого вигляду часто називають *прямих ходом методу Гауса*, а почергове обчислення невідомих у порядку $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ — *зворотним ходом методу Гауса*.

Метод Гауса до цього часу є одним із найкращих методів розв'язування систем лінійних рівнянь, адже, як легко бачити, кількість арифметичних операцій при застосуванні методу Гауса не набагато більша кількості арифметичних дій при обчисленні відповідного визначника системи.

Зауваження 3.3. Під час зведення системи лінійних рівнянь до східчастого вигляду (прямого ходу методу Гауса) можна не зупинятися на досягнутому результаті, а продовжити елементтарні перетворення і звести матрицю коефіцієнтів біля головних невідомих цієї системи до діагонального вигляду. Тоді загальний розв'язок легко читається з отриманої розширеної матриці системи. Як приклад, наведемо цю процедуру для випадку строго трикутної системи лінійних рівнянь (другий випадок із розглянутого вище методу Гауса). Для цього розглянемо розширену матрицю строго трикутної системи (3.17)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

де, нагадаємо, усі елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ненульові. Спочатку над цією матрицею виконаємо такі елементарні перетворення: до 1-го, 2-го, ..., $(n-1)$ -го рядків додамо останній рядок, помножений на $-\frac{a_{1n}}{a_{nn}}, -\frac{a_{2n}}{a_{nn}}, \dots, -\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}$ відповідно. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 & b'_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Тепер, додаючи до 1-го, 2-го, ..., $(n-2)$ -го рядків передостанній $(n-1)$ -ий рядок, помножений на $-\frac{a_{1,n-1}}{a_{n-1,n-1}}, -\frac{a_{2,n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \dots, -\frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-1,n-1}}$ відповідно, отримаємо, що у $(n-1)$ -му стовпчику всі елементи, крім діагонального елемента $a_{n-1,n-1}$, дорівнюють нулю, тобто

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & 0 & b''_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Продовжуючи аналогічні перетворення далі, отримаємо матрицю вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & b^*_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 & b^*_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Поділивши кожен рядок цієї матриці на відповідний діагональний елемент (тобто i -ий рядок поділимо на елемент a_{ii} для всіх $i = 1, 2, \dots, n$), отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right).$$

Очевидно, що цій матриці відповідає система лінійних рівнянь вигляду

$$1 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & c_1, \\ x_2 & = & c_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & c_{n-1}, \\ x_n & = & c_n, \end{array} \right.$$

звідки, як легко бачити, отримуємо розв'язок

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \dots, x_{n-1} = c_{n-1}, \quad x_n = c_n.$$

Приклад 3.15. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

Легко переконатись (ми це вже виконували) у правильності такого ланцюга еквівалентних матриць:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right).$$

Не будемо зупинятися на досягнутому та продовжимо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

(для переходу від першої матриці до другої ми другий рядок поділили на 3 і додали до нього третьїй, поділений на 7, а потім до першого рядка додали третій, поділений на (-7) ; для переходу від другої матриці до третьої ми до першого рядка додали другий рядок, помножений на 2; для переходу від третьої матриці до четвертої ми другий рядок поділили на (-1) , а третій — на (-7)). Останній матриці відповідає система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 & = 1, \\ x_2 & = 2, \\ x_3 & = 3, \end{cases}$$

звідки отримуємо розв'язок: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

3.9. Метод Гауса в матричній інтерпретації

Розглянемо матричний запис системи рівнянь (3.13)

$$A \cdot X = B, \quad (3.21)$$

де, нагадаємо, A — матриця коефіцієнтів, X — стовпчик невідомих, B — стовпчик вільних членів системи (3.13). Оскільки за теоремою 3.4 довільну матрицю можна звести до східчастого вигляду елементарними перетворенням рядків і за лемою 1.11 довільне елементарне перетворення рядків матриці рівносильне її домноженню зліва на відповідну елементарну матрицю, то, як легко зрозуміти, матрична інтерпретація методу Гауса полягає в послідовному домноженні обидвох частин матричного рівняння (3.21) зліва на відповідні елементарні матриці з метою зведення матриці A до східчастого вигляду.

Приклад 3.16. Розглянемо матричний запис системи лінійних рівнянь з прикладу 3.15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Для зведення матриці коефіцієнтів цієї системи до східчастого вигляду домножимо її послідовно зліва на елементарні матриці $E + (-2)E_{21}$, $E + (-4)E_{31}$, $E + (-3)E_{32}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

На ці ж матриці як у цій же послідовності домножимо зліва стовпчик вільних членів

$$(E + (-3)E_{32}) \cdot (E + (-4)E_{31}) \cdot (E + (-2)E_{21}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

У підсумку отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -21 \end{pmatrix},$$

звідки легко знаходимо невідомі: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

3.10. Однорідні системи лінійних рівнянь

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

до колоквіуму, (3.22)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Як нам уже відомо, будь-яка однорідна система лінійних рівнянь є сумісною, оскільки завжди має хоча б один розв'язок (наприклад, нульовий $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$). Відповідь на питання, коли однорідна система має ненульові розв'язки, дає така лема.

Лема 3.9 (Гауса). Якщо в однорідній системі лінійних рівнянь кількість рівнянь менша кількості невідомих, то ця система має ненульовий розв'язок.

Доведення. Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь (3.22), яка, як бачимо, має n невідомих та m рівнянь, і нехай $m < n$. Цю систему елементарними перетвореннями можна звести до східчастого вигляду (3.15), де $b_1 = \cdots = b_{r+1} = 0$, тобто до вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1l}x_l + \cdots + a_{1s}x_s + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{2k}x_k + \cdots + a_{2l}x_l + \cdots + a_{2s}x_s + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{rl}x_l + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \end{array} \right.$$

У нашому випадку $r \leq m < n$ (третій випадок методу Гауса), а тому r довільних змінних цієї системи візьмемо за головні, решта — за вільні і виразимо головні змінні через вільні. Можливість підстановки замість вільних змінних довільних дійсних чисел передбачає безліч ненульових розв'язків системи (зокрема і нульовий у випадку заміни вільних змінних нулями). \square

Приклад 3.17. Розв'яжемо однорідну систему систему лінійних рівнянь

$$\text{АЛГЕБРА} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Для цього зведемо до східчастого вигляду її розширену матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -14 & 0 \end{array} \right) \sim \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -24 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \end{array} \right).$$

Цій східчастій матриці відповідає така система рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_3 + 12x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Звідси, взявши, наприклад, змінні x_1, x_2, x_3 за головні, а змінну x_4 за вільну, отримаємо загальний розв'язок системи

$$\text{Для підготовки} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -22x_4, \\ x_2 = 2x_4, \\ x_3 = -12x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Для того, щоб отримати хоча б один ненульовий частковий розв'язок цієї системи, достатньо у загальний розв'язок замість вільної змінної x_4 підставити будь-яке ненульове число. Наприклад, нехай $x_4 = 1$. Тоді частковим розв'язком цієї системи буде

$$\text{до колоквіуму,} \quad x_1 = -22, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -12, \quad x_4 = 1.$$

3.11. Знаходження обернених матриць за допомогою елементарних перетворень

Застосуємо отримані знання про елементарні та східчасті матриці для розкриття ще одного способу знаходження обернених матриць. Спочатку доведемо таке твердження.

Твердження 3.10. Якщо до одиничної матриці n -го порядку застосувати ті ж елементарні перетворення рядків (або стовпчиків) і в тому ж порядку, за допомогою яких невироджена матриця A порядку n зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця буде оберненою до матриці A .

Доведення. Нехай матриця A^{-1} обернена до матриці A , тобто

$$AA^{-1} = E. \quad (3.23)$$

За теоремою 3.5 задана невироджена матриця A може бути зведена до одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень рядків. За твердженням 1.11 це рівносильно домноженню матриці A зліва на відповідні елементарні матриці, тобто

$$\text{списування} \quad I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1 A = E,$$

де I_1, I_2, \dots, I_k — деякі елементарні матриці. Застосувавши цей факт до рівності (3.23), тобто домноживши її обидві зліва частини на добуток $I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1$, отримаємо

$$(I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1) A A^{-1} = (I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1) E. \quad (3.24)$$

Оскільки $(I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1) A A^{-1} = (I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1 A) A^{-1} = E A^{-1} = A^{-1}$, то з рівності (3.24) випливає співвідношення

$$A^{-1} = I_k I_{k-1} \dots I_2 I_1 E,$$

яке й доводить твердження. \square

Отож, твердження 3.10 дає ще один спосіб обчислення оберненої матриці. Його суть полягає в тому, що поряд з заданою матрицею A записують (розділивши вертикально лінією) одиничну матрицю E відповідного розміру і одночасно виконують елементарні перетворення рядків (лише рядків!) обидвох матриць з метою зведення матриці A до одиничної. При цьому матриця, яка після відповідних елементарних перетворень рядків отримається з матриці E , й буде шуканою матрицею A^{-1}

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Якщо елементарні перетворення виконуватимуться над стовпчиками, то матрицю E розміщають під матрицею A .

Приклад 3.18. За допомогою елементарних перетворень рядків знайдемо обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Оскільки $\det A = -2 \neq 0$, то матриця A невироджена і тому обернена матриця A^{-1} існує. Розташуємо поряд з даною матрицею A через вертикальну лінію одиничну матрицю E того ж порядку і за допомогою елементарних перетворень рядків зведемо A до одиничної матриці. Тоді справа від вертикальної лінії з одиничної матриці отримаємо обернену до A матрицю.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (E|A^{-1}).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

для цієї готовки

а не для

списування

на ньому