

ЛІНІЙНА

Розділ 2. Визначники АЛГЕБРА

2.1. Перестановки

Для явного аналітичного вираження визначника довільного порядку нам будуть потрібні деякі відомості про перестановки.

Означення 2.1. Перестановкою порядку n називається набір натуральних чисел $1, 2, \dots, n$, розташованих (переставлених) у певному порядку. Будемо використовувати позначення

$$(i_1, i_2, \dots, i_n);$$

тут елементи i_1, i_2, \dots, i_n приймають одне із значень $1, 2, \dots, n$, причому жодне з них не повторюється в двічі (тобто $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$).

Приклад 2.1. $(2, 3, 1, 4), (1, 4, 3, 2)$ — перестановки з чисел 1, 2, 3, 4.

Перестановка $(1, 2, \dots, n)$ називається *тотожною (тривіальною)*.

Дві перестановки з n чисел є *різними*, якщо вони відрізняються розташуванням елементів.

Приклад 2.2. $(2, 3, 1), (2, 1, 3)$ — дві різні перестановки з чисел 1, 2, 3.

Твердження 2.1. Із чисел 1, 2, \dots, n можна утворити $n!$ різних перестановок.

Доведення. При утворенні перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) на місці i_1 можна розмістити будь-яке з чисел 1, 2, \dots, n (тобто маємо n варіантів вибору числа i_1); при ужে зафікованому i_1 на місці i_2 можна розмістити будь-яке з $(n - 1)$ чисел, що залишилися (маємо $n - 1$ варіант вибору числа i_2); при зафікованих i_1 та i_2 на місці i_3 можна розмістити будь-яке з $(n - 2)$ чисел, що залишилися ($n - 2$ варіанти вибору числа i_3), і т.д. В підсумку отримуємо, що з чисел 1, 2, \dots, n можна утворити $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ різних перестановок. \square

Приклад 2.3. Із чисел 1, 2, 3 можна утворити $3! = 6$ різних перестановок, а саме

$$(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$

Означення 2.2. Числа i_k та i_m утворюють *інверсію* в перестановці $(\dots, i_k, \dots, i_m, \dots)$, якщо $i_k > i_m$ при $k < m$ (інакше кажучи, пара чисел перестановки утворює *інверсію*, якщо більше з них розташоване перед меншим). Кількість інверсій у перестановці (i_1, i_2, \dots, i_n) позначатимемо $\text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Якщо числа не утворюють інверсію в перестановці, то кажуть, що вони утворюють *порядок*.

Означення 2.3. Перестановка називається *парною (непарною)*, якщо кількість інверсій у ній є парним (відповідно, непарним) числом.

Означення 2.4. Число $(-1)^{\text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)}$ називають *сигнатурою* (або *знакою*) перестановки (i_1, \dots, i_n) . Сигнатуру перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) позначатимемо $\text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Очевидно, що сигнатаура парної перестановки дорівнює 1, а непарної — (-1) .

Приклади 2.4. 1. Перестановки $(1, 2, 3)$ (немає інверсій), $(2, 3, 1)$ (две інверсії) і $(3, 1, 2)$ (две інверсії) є парними, а перестановки $(1, 3, 2)$ (одна інверсія), $(3, 2, 1)$ (три інверсії) і $(2, 1, 3)$ (одна інверсія) — непарними.

2. Тотожна перестановка $(1, 2, \dots, n)$ — парна.

3. У перестановці $(1, 4, 5, 3, 2)$ інверсю утворюють такі п'ять пар чисел: $4 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 3$, $5 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 2$. Тому $\text{inv}(1, 4, 5, 3, 2) = 5$ і, отже, перестановка є непарною.

4. У перестановці $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ кожна впорядкована пара чисел утворює інверсю, а тому кількість інверсій у ній дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Звідси випливає, що $\text{sgn}(n, n-1, \dots, 2, 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Означення 2.5. Заміну місцями двох елементів перестановки називають *транспозицією* цих елементів.

Твердження 2.2. Будь-яка транспозиція змінює парність перестановки.

Доведення. Спочатку припустимо, що поміняли місцями два сусідні елементи i_k та i_{k+1} перестановки $(\dots, i_k, i_{k+1}, \dots)$. Тоді кількість інверсій або збільшиться на одиницю (якщо $i_k < i_{k+1}$), або зменшиться на одиницю (якщо $i_k > i_{k+1}$) і, отже, в будь-якому випадку парність перестановки зміниться.

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай у перестановці

$$(\dots, i_k, \underbrace{i_{k+1}, \dots, i_{k+s}}_{s \text{ елементів}}, i_{k+s+1}, \dots)$$

переставлено місцями елементи i_k та i_{k+s+1} (розділені s елементами). Ця транспозиція може бути здійснена за допомогою $2s + 1$ послідовних транспозицій сусідніх елементів: спочатку переставимо елемент i_k послідовно з усіма елементами $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+s}$ (s транспозицій) та з елементом i_{k+s+1} (1 транспозиція), потім i_{k+s+1} послідовно переставимо з $i_{k+s}, i_{k+s-1}, \dots, i_{k+2}, i_{k+1}$ (s транспозицій). За доведеним вище кожна така транспозиція сусідніх елементів змінює парність перестановки, а оскільки така зміна відбудеться непарну кількість разів ($2s + 1$ — непарне число), то, як наслідок, перестановка змінить парність на протилежну. \square

Приклад 2.5. Розглянемо перестановку $(2, 3, 1)$, яка має дві інверсії, а тому є парною. Виконаемо в ній транспозицію елементів 2 та 1. Отримаємо перестановку $(1, 3, 2)$, яка має лише одну інверсію, а тому є непарною. Бачимо, що після виконання однієї транспозиції початкова перестановка змінила свій знак на протилежний.

Зрозуміло, що будь-яку перестановку з n елементів можна перевести в будь-яку іншу перестановку з цих же елементів за допомогою декількох послідовно виконаних транспозицій. Цей результат можна досягнути різними способами. Однак, якщо парність початкової і кінцевої перестановок однаакова, то число транспозицій обов'язково парне (бо кожна транспозиція змінює парність). Навпаки, якщо парність початкової і кінцевої перестановок різна, то кількість потрібних для переведення транспозицій — непарне число. Зокрема, будь-яка парна перестановка отримується з тотожної перестановки парним, а непарна — непарним числом транспозицій.

Твердження 2.3. При $n > 1$ кількість усіх парних перестановок з n чисел співпадає з кількістю усіх непарних і дорівнює $\frac{n!}{2}$.

Доведення. Випишемо всі парні перестановки з n чисел і в кожній з них виконаемо якусь одну і ту ж транспозицію (наприклад, транспозицію перших двох елементів). Тоді отримаємо всі непарні перестановки, причому по одному разу. \square

2.2. Визначники

Нехай задано квадратну матрицю A порядку n ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Розглянемо добутки елементів цієї матриці, взятих по одному і лише одному з кожного рядка та кожного стовпчика. Будь-який такий добуток міститиме n співмножників і може бути записаний у вигляді

$$a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \cdots \cdot a_{i_n j_n} (= a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots \cdot a_{nk_n} = a_{l_1 1} \cdot a_{l_2 2} \cdots \cdot a_{l_n n}). \quad (2.2)$$

Серед перших індексів i_1, i_2, \dots, i_n немає однакових, а тому ці індекси утворюють перестановку (i_1, i_2, \dots, i_n) ; це ж стосується й других індексів j_1, j_2, \dots, j_n (далі, ми скористалися тим, що співмножники в добутку можна переставляти місцями, причому можна домогтися впорядкування або за першими індексами, або ж за другими). Очевидно, що таких різних добутків буде стільки, скільки можна утворити різних перестановок із n різних чисел, а саме $n!$ (за твердженням 2.1). Кожен добуток (2.2) помножимо на число $(-1)^{\text{inv}(i_1, \dots, i_n) + \text{inv}(j_1, \dots, j_n)}$ і додамо всі отримані $n!$ доданки вигляду $(-1)^{\text{inv}(i_1, \dots, i_n) + \text{inv}(j_1, \dots, j_n)} \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$. Отримане число називається *визначником* (або *детермінантом*) матриці A і позначається $\det A$:

$$\det A = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ (j_1, \dots, j_n)}} (-1)^{\text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n) + \text{inv}(j_1, j_2, \dots, j_n)} \cdot a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \cdots \cdot a_{i_n j_n}. \quad (2.3)$$

Означення 2.6. *Визначником* (детермінантом) матриці порядку n називається число, що дорівнює алгебричній сумі $n!$ доданків, кожен з яких є добутком елементів, взятих по одному з кожного стовпця і з кожного рядка матриці, причому такі добутки входять у суму зі знаком плюс або мінус залежно від кількості інверсій у відповідних перестановках.

Для позначення визначника використовують також більш детальний запис, укладаючи матрицю в «прямі» дужки:

$$A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Зважаючи на це позначення, для стисlosti говорять про *порядок визначника*, *рядки* або *стовпці визначника*, *елементи визначника*, опускаючи при цьому слово «матриця». Наприклад, перший рядок заданого визначника $\det A$ вигляду (2.4) — це перший рядок $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ квадратної матриці A вигляду (2.1).

Зауваження 2.1. Якщо під час виписування членів визначника впорядкувати добутки за першими індексами, то співвідношення (2.3) перепишеться у вигляді

$$\det A = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^{\text{inv}(k_1, k_2, \dots, k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots \cdot a_{nk_n} \quad (2.5)$$

або, якщо впорядкувати добутки за другими індексами, у вигляді

$$\det A = \sum_{(l_1, \dots, l_n)} (-1)^{\text{inv}(l_1, l_2, \dots, l_n)} \cdot a_{l_1 1} \cdot a_{l_2 2} \cdots \cdot a_{l_n n}. \quad (2.6)$$

Зважаючи на поняття сигнатури, співвідношення (2.3), (2.5), (2.6) можна переписати ще по-іншому:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ (j_1, \dots, j_n)}} \text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \cdot a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \cdots \cdot a_{i_n j_n} = \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots \cdot a_{nk_n} = \\ &\quad = \sum_{(l_1, \dots, l_n)} \text{sgn}(l_1, l_2, \dots, l_n) \cdot a_{l_1 1} \cdot a_{l_2 2} \cdots \cdot a_{l_n n}. \end{aligned}$$

У залежності від необхідності ми будемо користуватися кожним із цих співвідношень.

Приклад 2.6. Доведемо, що визначник n -го порядку «з великим нульовим кутом» дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при } i+j > n.$$

Скористаємося формуллою (2.5). Якщо хоча б один співмножник добутку $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots \cdot a_{nk_n}$ дорівнює нулю, то й сам добуток буде рівним нулю. Тому з першого рядка треба брати елемент a_{1k_1} , який стоїть в стовпці $k_1 > j$, з другого рядка — елемент a_{2k_2} , який стоїть в стовпці $k_2 > j$ і $k_2 \neq k_1$, і т.д. з i -го рядка — елемент a_{ik_i} , який стоїть в стовпці $k_i > j$, $k_i \neq k_1, k_i \neq k_2, \dots, k_i \neq k_{i-1}$. Але вибрати i різних стовпців з $(n-j)$ стовпців неможливо, оскільки $i > n-j$. Тому хоча б один із співмножників в добутку $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots \cdot a_{nk_n}$ буде рівним нулю. Таким чином, для заданого визначника кожний доданок суми у правій частині рівності (2.5) дорівнює нулю, а тому й вся сума дорівнює нулю.

Розглянемо детальніше формули обчислення визначників порядків 2 та 3.

Визначники другого порядку. Визначник матриці $A = [a_{ij}]$ порядку 2 містить, за означенням, $2! = 2$ доданки і за співвідношенням (2.5) отримуємо:

$$\det A = (-1)^{\text{inv}(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\text{inv}(2,1)} a_{12}a_{21} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже, визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та бічної діагоналей цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.7)$$

Правило, за яким обчислюється визначник матриці другого порядку, схематично можна зобразити так:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Визначники третього порядку. Визначник матриці $A = [a_{ij}]$ порядку 3 містить $3! = 6$ доданків вигляду. Тому, за співвідношенням (2.5),

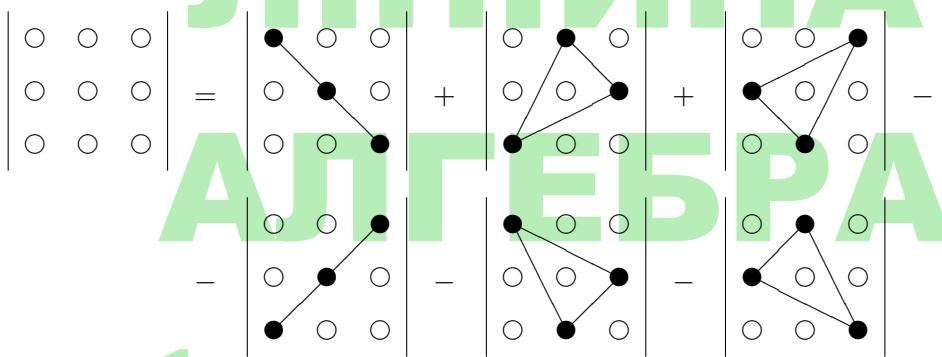
$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{\text{inv}(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\text{inv}(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\text{inv}(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &+ (-1)^{\text{inv}(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\text{inv}(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\text{inv}(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + \\ &+ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2.8)$$

Хоча вираження визначника третього порядку через суму добутків його елементів є досить громіздким, правило його утворення з елементів матриці є достатньо простим: зі знаком плюс беруть добуток чисел, розташованих на головній діагоналі, і два добутки чисел, розташованих у вершинах двох рівнобедрених трикутників з основами, паралельними до головної діагоналі; зі знаком мінус беруть три

добутки, які будують за таким же правилом, але стосовно бічної діагоналі. Схематично це *правило трикутників* можна зобразити так:



Для обчислення визначників третього порядку можна також користуватися *правилом Саррюса* (Pierre-Frédéric Sarrus, 1798–1861):

$$\begin{array}{c|cc|cc} + & + & + & - & - \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

до матриці приписати праворуч перший і другий стовпці, обчислити добутки елементів, які розміщені на кожній із зазначених шести прямих, а потім знайти алгебричну суму цих добутків, при цьому добутки елементів на прямих, паралельних головній діагоналі, беруться зі знаком плюс, а добутки елементів на прямих, паралельних бічній діагоналі, — зі знаком мінус.

Приклад 2.7. Обчислимо визначники матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

За формулою (2.7) маємо, що

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$

а за правилом трикутників (2.8):

$$\det B = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = -16.$$

Аналогічно отриманим формулам для обчислення визначників другого і третього порядків, можна отримати формулі для обчислення визначників четвертого, п'ятого і т.д. порядків. Проте ці формулі будуть надто громіздкими і незручними для практичних обчислень. Тому визначники вищих порядків (четвертого і більш), зазвичай, обчислюють на основі властивостей визначників.

2.3. Властивості визначників

Лема 2.4. $\det A = \det A^\top$ для довільної квадратної матриці A , тобто при транспонуванні визначник не змінюється.

Доведення. Якщо $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, то

$$\det A = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ (j_1, \dots, j_n)}} (-1)^{r+s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ (i_1, \dots, i_n)}} (-1)^{s+r} a_{j_1 i_1}^\top a_{j_2 i_2}^\top \cdots a_{j_n i_n}^\top = \det A^\top,$$

де $r = \text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)$, $s = \text{inv}(j_1, j_2, \dots, j_n)$; тут використано той факт, що $a_{ij} = a_{ji}^\top$ (означення 1.17). \square

З цієї властивості випливає, що стовпці і рядки визначника «рівноправні»: будь-яка властивість, яка виконується для стовпців, буде виконуватись і для рядків.

Лема 2.5. Із елементів рядка (стовпчика) визначника можна виносити спільний множник, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_m} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mk_m} & \dots & \lambda a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk_m} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^s a_{1k_1} \cdots \lambda a_{mk_m} \cdots a_{nk_n} = \\ &= \lambda \cdot \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^s a_{1k_1} \cdots a_{mk_m} \cdots a_{nk_n} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_m} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk_m} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk_m} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

де $s = \text{inv}(k_1, k_2, \dots, k_n)$. □

Лема 2.6. Визначник, у якому кожен елемент деякого рядка (стовпчика) є сумою двох складових, дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких у вказаному рядку (стовпчику) містяться перші складові, у другому — другі; інші рядки (стовпчики) залишаються без змін:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} + a''_{m1} & a'_{m2} + a''_{m2} & \dots & a'_{mn} + a''_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{m1} & a''_{m2} & \dots & a''_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} + a''_{m1} & a'_{m2} + a''_{m2} & \dots & a'_{mn} + a''_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^s a_{1k_1} \cdots (a'_{mk_m} + a''_{mk_m}) \cdots a_{nk_n} = \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^s a_{1k_1} \cdots a'_{mk_m} \cdots a_{nk_n} + \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^s a_{1k_1} \cdots a''_{mk_m} \cdots a_{nk_n} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{m1} & a''_{m2} & \dots & a''_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

де $s = \text{inv}(k_1, \dots, k_m, \dots, k_n)$. □

Щойно доведена лема 2.6 легко узагальнюється на випадок, коли елементи рядка (стовпчика) визначника є сумами довільної кількості складових.

Лема 2.7. Якщо два рядки (стовпчики) визначника переставити місцями, то визначник змінить свій знак на протилежний.

Доведення. При перестановці місцями i -го та j -го ($i < j$) рядків визначника кожен доданок визначника змінює свій знак на протилежний за рахунок додаткової транспозиції в перестановках, складених з індексів рядків $((-1)^{\text{inv}(\dots, i, \dots, j, \dots)}) = (-1) \cdot (-1)^{\text{inv}(\dots, j, \dots, i, \dots)}$. Тому

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right| &= \sum (-1)^{\text{inv}(\dots, i, \dots, j, \dots) + \text{inv}(\dots, k_i, \dots, k_j, \dots)} a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n} = \\ &= (-1) \cdot \sum (-1)^{\text{inv}(\dots, j, \dots, i, \dots) + \text{inv}(\dots, k_i, \dots, k_j, \dots)} a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} = \\ &= (-1) \cdot \left| \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right|, \end{aligned}$$

що й треба було довести. \square

Лема 2.8. Визначник, який містить нульовий рядок (або стовпчик), дорівнює нулю.

Доведення. Якщо якийсь рядок визначника нульовий, то за лемою 2.5

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = 0 \cdot \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = 0,$$

що й потрібно було довести. \square

Лема 2.9. Визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.

Доведення. Нехай A — матриця з двома однаковими рядками. Переставивши ці рядки місцями, отримаємо ту ж саму матрицю, проте її визначник за лемою 2.7 змінить свій знак на протилежний. Тому $\det A = -\det A$, а це можливо лише тоді, коли $\det A = 0$. \square

Лема 2.10. Визначник з двома пропорційними рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.

Доведення. Нехай елементи якогось рядка матриці визначника дорівнюють відповідним елементам іншого рядка, помноженим на скаляр λ . Тоді, застосувавши послідовно леми 2.5 та 2.9, отримаємо

$$\left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = \lambda \cdot \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Лема 2.11. Якщо до якого-небудь рядка (стовпчика) визначника додати інший його рядок (стовпчик), помножений на довільний скаляр, то визначник не зміниться.

Доведення. Розглянемо визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і утворимо з нього визначник $\det B$, додавши до i -го стовпчика його j -ий стовпчик, помножений на скаляр λ :

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За лемами 2.6 та 2.5 визначник $\det B$ можна подати у вигляді суми двох складових

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У цій сумі другий визначник дорівнює нулю, оскільки має два однакові стовпчики; тому

$$\det B = \det A,$$

що і потрібно було довести. \square

Лема 2.12. Якщо до якого-небудь рядка (стовпчика) визначника додати лінійну комбінацію інших його рядків (стовпчиків), то визначник не зміниться.

Лема 2.13. Якщо який-небудь рядок (стовпчик) визначника є лінійною комбінацією інших його рядків (стовпчиків), то визначник дорівнює нулю.

Приклад 2.8. Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і порівняємо її визначник з визначниками матриць,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1+3\lambda & 2+4\lambda \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

де λ — довільний скаляр.

Визначник заданої матриці A було знайдено у прикладі 2.7: $\det A = -2$. За формулою (2.7) обчислюємо визначники решти заданих матриць:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 = \det A,$$

що відповідає лемі 2.4;

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3\lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot 4\lambda - 2 \cdot 3\lambda = -2\lambda = \lambda \cdot \det A,$$

що відповідає лемі 2.5, оскільки матриця B отримана із матриці A домноженням елементів 2-го рядка на число λ ;

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2 = -\det A,$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2 = -\det A,$$

що відповідає лемі 2.7, оскільки матриця C отримана із матриці A переставленням стовпців, а матриця D — переставленням рядків матриці A ;

$$\det F = \begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2+4\lambda \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1+3\lambda) \cdot 4 - (2+4\lambda) \cdot 3 = -2 = \det A,$$

що відповідає лемі 2.11, оскільки матрицю F отримано із матриці A додаванням до елементів первого рядка відповідних елементів другого рядка, помножених на число λ .

2.4. Розкладання визначника за елементами рядка (стовпчика)

Розглянемо квадратну матрицю A порядку n ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2.7. Доповнільним мінором M_{ij} елемента a_{ij} заданої матриці A називається визначник порядку $n-1$, отриманий з матриці A викреслованням i -го рядка та j -го стовпчика.

Означення 2.8. Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} заданої матриці A називається доповнільний мінор M_{ij} цього елемента, помножений на число $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Приклад 2.9. Доповнільними мінорами елементів a_{11} , a_{12} та a_{23} матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

є відповідно визначники $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 26$, а алгебричними доповненнями цих елементів — відповідно числа $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 3$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -5$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -26$.

Теорема 2.14 (про розкладання визначника за елементами рядка (стовпчя)). Визначник матриці $A = [a_{ij}]$ порядку n дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпчя) на їхні алгебричні доповнення, тобто

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (\text{формула розкладання за } i\text{-им рядком}), \quad (2.10)$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{формула розкладання за } j\text{-им стовпцем}). \quad (2.11)$$

Рівність (2.10) називається *формулою розкладу визначника за елементами i -го рядка*, а рівність (2.11) — *формулою розкладу визначника за елементами j -го стовпчя* ($i, j \in \overline{1, n}$).

Перш, ніж довести ці формули, доведемо два допоміжні твердження.

Лема 2.15.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot A_{11}.$$

Доведення. Проведемо доведення для першого візничника. Якщо $a_{11} = 0$, то правильність твердження очевидна. Нехай $a_{11} \neq 0$. Скористаємося співвідношенням (2.5): оскільки усі елементи першого рядка (крім елемента a_{11}) заданого візничника є нульовими ($a_{1k_1} = 0$ при $k_1 \neq 1$), то у співвідношенні (2.5) усі доданки, які не містять елемент a_{11} , є нульовими. Тому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^{\text{inv}(1, k_2, \dots, k_n)} \cdot a_{11} \cdot a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{винесемо елемент } a_{11} \text{ за знак суми і врахуємо той факт, що в перестановках } (1, k_2, \dots, k_n) \\ \text{та } (k_2, \dots, k_n) \text{ кількість інверсій однакова і тому } (-1)^{\text{inv}(1, k_2, \dots, k_n)} = (-1)^{\text{inv}(k_2, \dots, k_n)} \end{array} \right\} =$$

$$= a_{11} \cdot \sum_{(k_2, \dots, k_n)} (-1)^{\text{inv}(k_2, \dots, k_n)} \cdot a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot A_{11}.$$

Для другої матриці доведення аналогічне. \square

Узагальнимо лему 2.15.

ЛНУ

Лема 2.16.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Доведення. Проведемо доведення для першого візничника. Перемістимо елемент a_{ij} заданого візничника на місце елемента a_{11} . Для цього спочатку i -ий рядок цього візничника послідовно поміняємо місцями з усіма рядками, що знаходяться над ним, аж поки він не стане першим рядком ($(i-1)$ перестановка рядків); потім j -ий стовпчик новоутвореного візничника послідовно поміняємо місцями з усіма стовпчиками зліва від нього, аж поки цей стовпчик не стане першим ($(j-1)$ перестановка стовпчиків). В результаті всіх цих перестановок рядків і стовпчиків знак візничника за лемою 2.7 зміниться $(i-1) + (j-1)$ разів. Тому

$$\Delta = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left\{ \text{за лемою 2.15} \right\} = (-1)^{i+j-2} \cdot a_{ij} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Delta' = \left\{ \begin{array}{l} \text{оскільки візничник } \Delta' \text{ отриманий із візничника } \Delta \text{ використовуванням } i\text{-го рядка та } j\text{-го стовпця, тобто є доповненним мінором } M_{ij} \text{ елемента } a_{ij} \text{ візничника } \Delta, \text{ то } \Delta' = M_{ij} \\ \end{array} \right\} =$$

$$= a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = a_{ij} \cdot A_{ij},$$

що й треба було довести.

У випадку другого візничника доведення аналогічне. \square

на ньому

Доведення теореми 2.14. Обмежимося доведенням, наприклад, формули розкладання візничника за

елементами j -го стовпця:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & (a_{1j} + 0 + \dots + 0) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & (0 + a_{2j} + \dots + 0) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & (0 + 0 + \dots + a_{nj}) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \{ \text{за лемою 2.6} \} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{за лемою 2.16} \} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Співвідношення (2.10) доводиться аналогічно. \square

Приклад 2.10. Знайдемо визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за третьим рядком:

$$\det A = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 5 \cdot A_{34} = 5 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник третього порядку за останнім стовпчиком:

$$\det A = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot (0 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33}) = -5 \cdot 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Визначник другого порядку обчислюємо за формулою (2.7):

$$\det A = 15 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 15 \cdot 5 = 75.$$

Приклад 2.11. Знайдемо визначник блочно-діагональної матриці $\begin{pmatrix} A & O \\ O^\top & E \end{pmatrix}$, де A — довільна квадратна матриця, E — одинична, O — нульова матриця відповідного порядку, O^\top — транспонована до матриці O .

Розкладемо визначник цієї матриці за елементами останнього стовпця. Оскільки в цьому стовпці всі елементи нульові, за винятком останнього, рівного 1, отримаємо визначник такого ж вигляду, що й вихідний, але меншого порядку. Розкладаючи отриманий визначник за останнім стовпцем, зменшуємо його порядок (детальніше про спосіб обчислення визначників за допомогою зниження їх порядків у розділі 2.6). Продовжуючи таким же чином, отримуємо визначник матриці A . Отже,

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O^\top & E \end{vmatrix} = \det A. \quad (2.12)$$

Теорема 2.17 (теорема заміщення). Сума добутків елементів b_1, b_2, \dots, b_n на алгебричні додавнення елементів деякого рядка (стовпця) матриці порядку n дорівнює визначнику матриці, яка отримується із заданої заміною вказаного рядка (стовпця) на елементи b_1, b_2, \dots, b_n .

Доведення. Очевидно: якщо $A = [a_{ij}]$ — довільна матриця n -го порядку і $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ — алгебричні доповнення елементів $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ i -го рядка цієї матриці, то за формулою (2.10) отримуємо:

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \dots + b_nA_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У випадку стовпчиків матриці доведення теореми аналогічне. \square

Теорема 2.18 (теорема аннулювання). Сума добутків елементів одного з рядків (стовпців) матриці на алгебричні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $A = [a_{ij}]$ — довільна матриця n -го порядку. Розглянемо суму добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні алгебричні доповнення елементів j -го рядка ($i \neq j$) цієї матриці:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

За теоремою заміщення ця сума є визначником матриці, яка отримується з матриці A заміною елементів j -го рядка елементами $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ i -го рядка. Отримана в результаті такої заміни матриця містить два однакові рядки (i -ий та j -ий), а тому її визначник за лемою 2.9 дорівнюватиме нулю.

Доведення теореми для випадку стовпчиків матриці аналогічне. \square

Із формул розкладу визначника за елементами рядка або стовпчика і теореми 2.18 випливає правильність такого твердження.

Теорема 2.19. Якщо $A = [a_{ij}]$ — довільна матриця порядку n , то

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \det A, & i = j; \end{cases} \quad \sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \det A, & i = j. \end{cases}$$

Означення 2.9. Нехай A — квадратна матриця. Квадратна матриця $A^+ = [a_{ij}^+]$ того ж порядку, що й A , називається *приєднаною* стосовно матриці A , якщо кожен її елемент a_{ij}^+ дорівнює алгебричному доповненню елемента a_{ji} матриці A : $a_{ij}^+ = A_{ji}$.

Для знаходження приєднаної матриці стосовно заданої матриці A треба:

- 1) замінити кожен елемент матриці $A = [a_{ij}]$ його алгебричним доповненням $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, при цьому отримаємо матрицю $[A_{ij}]$;
- 2) знайти приєднану матрицю A^+ , транспонуючи матрицю $[A_{ij}]$.

Твердження 2.20. Для довільної квадратної матриці A виконується рівність

$$A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = \det A \cdot E, \quad (2.13)$$

де E — одинична матриця того ж порядку, що й A .

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^+ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{nk} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{на діагональних позиціях знаходяться суми} \\ \text{добутків елементів рядка матриці на їхні ал-} \\ \text{гебричні доповнення, а кожна така сума є ви-} \\ \text{значником } \det A; \text{ на недіагональних позиціях} \\ \text{розміщені суми добутків елементів рядка мат-} \\ \text{риці } A \text{ на алгебричні доповнення елементів ін-} \\ \text{шого рядка цієї матриці, а всі такі суми за те-} \\ \text{оремою анулювання 2.18 дорівнюють нулю} \end{array} \right\} = \\
 &= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E.
 \end{aligned}$$

Аналогічно, $A^+ \cdot A = \det A \cdot E$.

□

Приклад 2.12. Знайдемо приєднану матрицю A^+ стосовно матриці

$$\begin{matrix}
 \text{для підготовки} \\
 \text{та обчислимо добутки } AA^+ \text{ і } A^+A.
 \end{matrix}
 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Знайдемо алгебричні доповнення всіх елементів матриці A :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = 12, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = -6, & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \\
 A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = 87, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -30, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9, \\
 A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -68, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 22, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6.
 \end{aligned}$$

Утворимо приєднану матрицю, транспонуючи матрицю $[A_{ij}]$:

$$A^+ = [A_{ij}]^\top = \begin{pmatrix} 12 & 87 & -68 \\ -6 & -30 & 22 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 87 & -30 & 9 \\ -68 & 22 & -6 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добутки

$$A \cdot A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 87 & -30 & 9 \\ -68 & 22 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

$$A^+ \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 87 & -30 & 9 \\ -68 & 22 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

що відповідає співвідношенню (2.13), оскільки $\det A = -18$.

2.5. Формула Лапласа розкладання визначника

Нехай A — квадратна матриця n -го порядку. Виберемо в ній довільним чином k рядків ($1 \leq k \leq n$) з номерами i_1, i_2, \dots, i_k ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) і k стовпців з номерами j_1, j_2, \dots, j_k ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$).

Означення 2.10. *Мінором k -го порядку* матриці A називається визначник $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ матриці k -го порядку, утвореної елементами, що стоять на перетині вибраних k рядків і k стовпців матриці A . Позначаючи мінори, номери обраних рядків будемо вказувати верхніми індексами, а обраних стовпців — нижніми.

Легко бачити, що доповнільний мінор елемента a_{ij} матриці n -го порядку (означення 2.7) є мінором порядку $n - 1$, тобто $M_{ij} = M_{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n}^{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n}$.

Означення 2.11. Алгебричним доповненням $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ мінора $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ називається помножений на $(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k}$ визначник матриці $(n - k)$ -го порядку, отриманої з матриці A викреслованням обраних k рядків і k стовпців.

Теорема Лапласа (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) узагальнює теорему 2.14 (формулу розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика).

Теорема 2.21 (формула Лапласа розкладання визначника). Визначник матриці A порядку n дорівнює сумі добутків мінорів k -го порядку ($1 \leq k \leq n$), розташованих на вибраних k рядках (стовпцях), на їх алгебричні доповнення:

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \quad (\text{розкладання за } k \text{ рядками}); \quad (2.14)$$

$$\det A = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \quad (\text{розкладання за } k \text{ стовпцями}). \quad (2.15)$$

Приклад 2.13. Обчислимо за формулою Лапласа визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Спочатку скористаємося формулою розкладу визначника за рядками. Виберемо в матриці A перші два рядки ($i_1 = 1, i_2 = 2$). В цих рядках розташовано 6 мінорів, які отримуються при довільному виборі двох стовпців:

$$\begin{aligned} M_{12}^{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; & M_{13}^{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; & M_{14}^{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ M_{23}^{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9; & M_{24}^{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12; & M_{34}^{12} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Знайдемо алгебричні доповнення цих мінорів

$$\begin{aligned} A_{12}^{12} &= (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; & A_{13}^{12} &= (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \\ A_{14}^{12} &= (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; & A_{23}^{12} &= (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{24}^{12} &= (-1)^{1+2+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; & A_{34}^{12} &= (-1)^{1+2+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Обчислимо визначник, використовуючи формулу розкладу за двома рядками:

$$\det A = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-9) \cdot 1 + (-12) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 20.$$

Використаємо тепер формулу розкладу за стовпцями. Виберемо, наприклад, 1-й і 4-й стовпці ($j_1 = 1$, $j_2 = 4$). Знайдемо мінори, розташовані в цих стовпцях, та їх алгебричні доповнення:

$$M_{14}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{14}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{14}^{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$M_{14}^{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad M_{14}^{24} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad M_{14}^{34} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{14}^{12} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{14}^{13} = (-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{14}^{14} = (-1)^{1+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{14}^{23} = (-1)^{2+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{14}^{24} = (-1)^{2+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{14}^{34} = (-1)^{3+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Обчислимо визначник, використовуючи формулу розкладу за двома стовпцями:

$$\det A = 1 \cdot (-1) + (-10) \cdot (-6) + (-13) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-9) = 20.$$

Зауваження 2.2. Визначник блочно-трикутної матриці $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, де A і C – квадратні матриці, B і O – матриці відповідних розмірів, причому O – нульова, обчислюється за формулою

$$\left| \begin{array}{c|cc} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right| = \det A \cdot \det C. \quad (2.16)$$

Справді, застосувавши формулу Лапласа до стовпців, в яких розташована матриця A , отримаємо лише один доданок $|A| \cdot |C|$ (усі решта мінори в цих стовпцях дорівнюють нулю, оскільки містять нульовий рядок).

Приклад 2.14. Знайдемо визначник матриці п'ятого порядку

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x & y & z \\ 3 & 4 & u & v & w \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо задану матрицю D на блоки:

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Застосувавши до цієї блочної матриці формулу (2.16), отримаємо

$$\left| \begin{array}{c|cc} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right| = \det A \cdot \det C.$$

Підставляючи в праву частину $\det A = -2$, $\det C = -16$ (див. приклад 2.7), отримаємо, що $\det D = 32$.

2.6. Деякі методи обчислення визначників n -го порядку

Зведення визначників до трикутного вигляду. При обчисленні визначників високого порядку (більше 3-го) означення 2.6, зазвичай, не використовують, оскільки воно призводить до громіздких виразів і вимагає великої кількості арифметичних операцій. Набагато ефективніше використовувати

властивості визначників, за допомогою яких можна спростити визначник, тобто привести його до вигляду, зручного для обчислень. Найбільш важливими для обчислення визначників є властивості леми 2.11, 2.5, 2.7. Ці властивості можна назвати *елементарними перетвореннями визначника*:

- 1) додавання до елементів одного рядка (стовпця) визначника відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число, не змінює визначник;
- 2) множення всіх елементів одного рядка (стовпця) визначника на одне і те ж число, відмінне від нуля, призводить до множення визначника на це число;
- 3) перестановка двох рядків (стовпців) визначника призводить до зміни його знака на протилежний.

Ці елементарні *перетворення визначників* відповідають елементарним перетворенням матриці з означення 1.23. Зокрема, оскільки, як відомо, будь-яку матрицю за допомогою елементарних перетворень можна звести до верхнього (або нижнього) трикутного вигляду (метод Гауса), то й будь-який визначник, використовуючи елементарні перетворення, можна звести до трикутного вигляду (*визначником трикутного вигляду* називається визначник матриці трикутного (верхнього, нижнього) вигляду). До визначника трикутного вигляду треба застосувати таке твердження.

Твердження 2.22. Визначник трикутного вигляду (визначник верхньої або нижньої трикутної матриці, зокрема, діагональної) дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Доведення. Проведемо доведення для визначника верхньої трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо визначник $\det A$ цієї матриці за елементами останнього рядка:

$$\det A = 0 \cdot A_{n1} + 0 \cdot A_{n2} + \dots + 0 \cdot A_{n,n-1} + a_{nn} \cdot A_{nn} =$$

$$= a_{nn} \cdot \underbrace{(-1)^{n+n} \cdot M_{nn}}_{A_{nn}} = a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник порядку $n-1$ (причому також трикутного вигляду). Його ми також розкладемо за елементами останнього $((n-1)$ -го) рядка:

$$\det A = a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = a_{nn} \cdot (a_{n-1,n-1} \cdot A_{n-1,n-1}) =$$

$$= a_{nn} \cdot (a_{n-1,n-1} \cdot (-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot M_{n-1,n-1}) = a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник порядку $n-2$, який також розкладемо за останнім рядком. Продовжуючи аналогічно цей процес далі, на n -му кроці отримаємо, що

$$\det A = a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot \dots \cdot a_{22} \cdot a_{11},$$

що й треба було довести.

Доведення для випадку нижньої трикутної матриці аналогічне. \square

Отже, метод зведення визначника до трикутного вигляду складається з двох кроків:

- 1) за допомогою елементарних перетворень зведи визначник до трикутного вигляду;
- 2) обчислити визначник трикутного вигляду, перемноживши його елементи, які стоять на головній діагоналі.

Приклади 2.15. 1. Обчислимо визначник четвертого порядку

АЛГЕБРА

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

звівши його до трикутного вигляду.

Спочатку за допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю визначника до трикутного вигляду. Взявши елемент $a_{11} = 1$ першого рядка в ролі провідного, всі інші елементи першого стовпчика зробимо рівними нулю. Для цього до другого рядка додамо перший, помножений на (-2) , до третього рядка додамо перший, помножений на (-3) , а до четвертого рядка додамо перший, помножений на (-4) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

(наголосимо, що при використанні цих елементарних перетворень визначник не змінюється). В отриманій матриці треба зробити рівними нулю елементи $a_{32} = -2$ і $a_{42} = -7$ другого стовпця, які стоять нижче головної діагоналі. Для цього беремо в ролі провідного елемента $a_{22} = -1$ та додамо до третього і четвертого рядків другий рядок, помножений на (-2) і на (-7) відповідно:

Для підготовки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

Залишилось зробити рівним нулю елемент $a_{43} = 4$. Для цього до четвертого рядка додамо третій:

до копіювання,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

Отримали визначник трикутного вигляду. Для його обчислення використаємо твердження 2.22: перемножимо елементи, які стоять на головній діагоналі. Маємо:

а не для

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160.$$

2. Обчислимо визначник

списування

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Для цього зведемо цей визначник до трикутного вигляду: від другого, третього і четвертого рядків почергово віднімемо перший рядок. В результаті отримаємо, що

на чому

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Отримали визначник трикутного вигляду, для обчислення якого застосуємо твердження 2.22:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Метод зниження порядку визначників. Цей метод також заснований на елементарних перетвореннях визначника (та формулі розкладу визначника за елементами рядка або стовпця).

1) За допомогою елементарного перетворення першого типу потрібно в одному стовпці (або одному рядку) зробити рівними нулю всі елементи, за винятком одного.

2) Розкладти визначник за цим стовпцем (рядком) і отримати визначник меншого порядку, ніж вихідний. Якщо його порядок більший 1, то слід перейти до пункту 1, інакше обчислення закінчити.

Приклад 2.16. Обчислимо визначник четвертого порядку методом зниження порядку

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

В ролі провідного елемента візьмемо елемент $a_{24} = 1$, а всі решта елементи другого рядка за допомогою елементарних перетворень зробимо рівними нулю. Для цього до другого стовпця додамо четвертий, помножений на (-3) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що при використанні цього елементарного перетворення визначник не змінюється (за лемою 2.11). Розкладемо визначник за другим рядком

$$\begin{vmatrix} 1 & -12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a_{24} \cdot A_{24} = 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник третього порядку. Додамо до другого стовпця перший, помножений на 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -12 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник розкладемо за другим стовпчиком:

$$\begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{12} \cdot A_{12} = -10 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник 2-го порядку. Додамо до другого рядка перший, помножений на (-2) :

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за другим рядком і замінимо визначник першого порядку єдиним його елементом:

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot (a_{21} \cdot A_{21}) = 10 \cdot (-2) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 = 20.$$

Результат збігається з отриманим у прикладі 2.13.

Очевидно, що необов'язково знижувати порядки визначників аж до першого. Для обчислення визначників другого і третього порядків можна використовувати формули (2.7) та (2.8).

Приклад 2.17. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -12 & -9 \\ -5 & 9 & 35 & 27 \end{vmatrix}.$$

Для цього спочатку до другого рядка додамо перший, до третього — перший, помножений на 2, до четвертого — перший, помножений на (-5) . У підсумку маємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -12 & -9 \\ -5 & 9 & 35 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -4 & -12 & -9 \\ -5 & 9 & 35 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 9 & 35 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник за елементами першого стовпця, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник третього порядку, котрий обчислимо за правилом трикутника (2.8):

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 0 \cdot 0 - 7 \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \cdot 0 - 6 \cdot 0 \cdot 2) = -28.$$

Розклад визначників за теоремою Лапласа. Теорема Лапласа дає змогу звести обчислення визначника порядку n до обчислення визначників нижчих порядків. Цією теоремою зручно користуватись тоді, коли у визначнику є мінори, рівні нулю. У цьому випадку при обчисленні у визначнику треба виділяти ті k рядків і стовпчиків, які містять найбільшу кількість рівних нуллю мінорів k -го порядку.

Приклад 2.18. Обчислимо визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

застосувавши теорему Лапласа.

Виберемо в матриці A перші два рядки ($i_1 = 1, i_2 = 2$) і скористаємося формuloю розкладу визначника за рядками (2.14)

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 5} M_{j_1 j_2}^{12} \cdot A_{j_1 j_2}^{12}. \quad (2.17)$$

Спочатку обчислимо мінори, розташовані у вибраних рядках при довільному виборі двох стовпців j_1, j_2 ($1 \leq j_1 < j_2 \leq 5$):

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2; \quad M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = M_{14}^{12} = M_{15}^{12} = 0;$$

$$M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = M_{24}^{12} = M_{25}^{12} = 0;$$

$$M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = M_{35}^{12} = 0; \quad M_{45}^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Як бачимо, лише один мінор M_{12}^{12} ненульовий, а тому для застосування теореми Лапласа достатньо знайти алгебричне доповнення лише цього мінора

$$A_{12}^{12} = (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, за формулою (2.17) отримуємо:

$$\det A = M_{12}^{12} \cdot A_{12}^{12} + M_{13}^{12} \cdot A_{13}^{12} + \dots + M_{45}^{12} \cdot A_{45}^{12} = 2 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 2.$$

Метод опорного елемента. Цей метод побудовано на формулі, яка виражає визначник n -го порядку через визначник $(n - 1)$ -го порядку, елементами якого, в свою чергу, є визначники другого порядку. Якщо у визначнику матриці $A = [a_{ij}]$ порядку n елемент a_{11} відмінний від нуля, то ця формула має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Елемент a_{11} , при цьому, називають *опорним елементом*. В ролі опорного елемента можна взяти будь-який ненульовий елемент заданого визначника.

Модифікуємо та доведемо формулу (2.18) для випадку матриці $A = [a_{ij}]$ третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

Доведення. Нехай $a_{11} \neq 0$, виберемо його в ролі опорного елемента. Домножимо другий і третій рядки заданого визначника на опорний елемент a_{11} (при цьому визначник помножимо на $\frac{1}{a_{11}^2}$):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тепер віднімемо від другого рядка перший рядок, помножений на a_{21} , а від третього — перший, помножений на a_{31} :

$$\frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи отриманий визначник за елементами першого стовпчика і зважаючи на те, що

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

приходимо до рівності (2.19). \square

Формула (2.18) доводиться аналогічно (пропонуємо читачу довести її в якості вправи).

Приклад 2.19. Обчислимо визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Виберемо в ролі опорного елемента $a_{11} = -1$ і застосуємо формулу (2.18):

$$\det A = \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 7 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & -5 & -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix}.$$

Отримали визначник третього порядку, до якого знову застосуємо формулу (2.18) (точніше, формулу (2.19)), вибравши в ролі опорного елемента $a_{11} = -5$:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -16 \\ -5 & -6 \\ 8 & 36 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -5 & -13 \\ -5 & -7 \\ 8 & 22 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 50 & 30 \\ -132 & -54 \end{vmatrix} = -252.$$

Як бачимо, метод опорного елемента полягає в послідовному застосуванні формули (2.18) (в результаті чого ми зводимо заданий визначник до визначника меншого порядку) і складається з таких пунктів:

- 1) Обираємо у заданому визначнику опорний елемент і обчислюємо відповідні визначники другого порядку.
- 2) Застосовуємо формулу (2.18) і отримуємо визначник меншого порядку, ніж вихідний. Якщо його порядок більший 2, то слід перейти до пункту 1, інакше обчислення закінчить.

Отож, обчислення визначника порядку $n > 2$ за методом опорного елемента зводиться до обчислення певної кількості визначників другого порядку.

Метод зміни всіх елементів визначника. При обчисленні визначників буває корисно змінити всі його елементи, помноживши їх на одне і те ж ненульове число або додати до кожного елемента одне і те ж число. Знайдемо формули зміни визначника при цих перетвореннях.

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ порядку n . Із леми 2.5 випливає, що при множенні всіх елементів визначника n -го порядку на число $\lambda \neq 0$ визначник множиться на число λ^n , тобто $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Розглянемо тепер визначник матриці B , елементи якої $b_{ij} = a_{ij} + x$ отримані із відповідних елементів матриці A додаванням числа x :

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи лему 2.6 до першого стовпця цього визначника, отримаємо суму визначників:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix},$$

Цю ж властивість застосуємо до кожного визначника («розкладаючи» другий стовпчик) і т.д. В результаті отримаємо суму 2^n визначників n -го порядку, причому визначники, які мають по два і більше стовпців з елементами, рівних x , дорівнюють нулю (за лемою 2.9). Тому в сумі залишаються тільки $(n + 1)$ доданки: визначник матриці A і n визначників вигляду

$$C_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & x & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & x & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

відрізняються від визначника матриці A тільки j -м стовпцем. Розкладаючи цей визначник за елементами j -го стовпця, отримуємо суму алгебричних доповнень елементів цього стовпчика, помножену на x :

$$1 \text{ семестр} \quad C_j = x \cdot \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

Отже, сума всіх таких визначників C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) дорівнює сумі алгебричних доповнень всіх елементів матриці A , помноженої на x :

$$\sum_{j=1}^n C_j = x \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

Остаточно отримуємо, що при збільшенні всіх елементів визначника на число x , визначник збільшується на суму всіх алгебраїчних доповнень, помножену на число x :

$$\text{для підготовки} \quad \begin{vmatrix} a_{11} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

Приклад 2.20. Обчислимо визначник матриці A n -го порядку

$$\text{до колоквіуму,} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Розглянемо визначник діагональної матриці D

$$\text{а не для} \quad \det D = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}.$$

Шуканий визначник $\det A$ отримується додаванням до кожного елемента визначника матриці D числа x . Тому

$$\text{списування} \quad \det A = \det D + x \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

Визначник діагональної матриці D дорівнює добутку діагональних елементів:

$$\text{на ньому} \quad \det D = (a_1 - x) \cdot (a_2 - x) \cdot \dots \cdot (a_n - x) = \prod_{i=1}^n (a_i - x).$$

Залишилося обчислити суму алгебричних доповнень всіх елементів матриці D . Зауважимо, що алгебричне доповнення недіагонального елемента дорівнює нулю ($A_{ij} = 0$ при $i \neq j$, оскільки доповняльний мінор містить нульовий стовпець). Доповняльний мінор діагонального елемента — це визначник діагональної матриці, тобто

$$A_{ii} = (a_1 - x) \cdot \dots \cdot (a_{i-1} - x) \cdot (a_{i+1} - x) \cdot \dots \cdot (a_n - x).$$

Тому

$$\det A = \prod_{i=1}^n (a_i - x) + x \cdot \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k (a_i - x).$$

Метод рекурентних спiввiдношень. Цей метод полягає в тому, що вихідний визначник (позначимо його Δ_n) n -го порядку виражається через визначники того ж вигляду, але меншого порядку (позначимо їх $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_{n-m}$). Отримується рекурентне спiввiдношення

$$\Delta_n = f(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_{n-m}).$$

Розв'язуючи це рiвняння, знаходимо формулу, яка виражає визначник Δ_n через визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ i порядок n :

$$\Delta_n = F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m).$$

В останню формулу пiдставляємо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ невисокого ($m < n$) порядку, якi неважко обчислити будь-яким іншим способом.

Нагадаємо, що *рекурентним спiввiдношенням* називається рiвнiсть вигляду

$$x_n = f(n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}) = 0,$$

яка виражає n -й член x_n шуканої числової послiдовностi $\{x_n\}$ через m iї попереднiх членiв $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$.

Приклади 2.21. 1. Обчислимо визначник n -го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка

$$\Delta_n = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Перший з отриманих визначникiв $(n-1)$ -го порядку позначимо Δ_{n-1} , оскiльки вiн має такiй же вигляд, що i Δ_n . Розкладавши останнiй визначник за елементами першого стовпця, отримаємо визначник того ж вигляду, що й Δ_n , ale $(n-2)$ -го порядку.

$$\Delta_n = 3 \cdot \Delta_{n-1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \Delta_{n-1} - 2 \cdot (-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 0 \\ -2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Отже, шуканий визначник задовільняє рекурентному спiвiдношенню

$$\Delta_n = 3 \cdot \Delta_{n-1} + 4 \cdot \Delta_{n-2}.$$

Розв'язок цього рiвняння будемо шукати у виглядi $\Delta_n = a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n$, де a та b — невiдомi коефiцiєнти. Зауважимо, що ця формула дає розв'язок рекурентного рiвняння при будь-яких коефiцiєнтах a та b . Справдi, пiдставляючи $\Delta_n = a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n$ в рiвняння, отримуємо тотожнiсть

$$\begin{aligned} a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n &= 3 \cdot (a \cdot (-1)^{n-1} + b \cdot 4^{n-1}) + 4 \cdot (a \cdot (-1)^{n-2} + b \cdot 4^{n-2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n &= -3 \cdot a \cdot (-1)^n + \frac{3}{4} \cdot b \cdot 4^n + 4 \cdot a \cdot (-1)^n + \frac{b}{4} \cdot 4^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n &= a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Пiдберемо тепер коефiцiєнти a та b у формулi $\Delta_n = a \cdot (-1)^n + b \cdot 4^n$ так, щоб при $n = 1$ i $n = 2$ вона давала правильнi результати, тобто

$$\Delta_1 = a \cdot (-1)^1 + b \cdot 4^1 = 3; \quad \Delta_2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot 4^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

Розв'язуючи систему рiвнянь $\begin{cases} -a + 4b = 3, \\ a + 16b = 13, \end{cases}$ отримуємо, що $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{4}{5}$. Отже, шуканий визначник дорiвнює

$$\Delta_n = \frac{1}{5} \cdot (-1)^n + \frac{4}{5} \cdot 4^n = \frac{1}{5} \cdot ((-1)^n + 4^{n+1}).$$

2. Обчислимо визначник Вандермонда (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796) n -го порядку, тобто визначник вигляду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

де a_1, a_2, \dots, a_n — дiйснi числа.

За допомогою властивостей визначника (лема 2.11) зробимо нульовими всi елементи першого стовпця, крiм першого елемента: вiднiмемо вiд n -го рядка $(n-1)$ -ий рядок, помножений на a_1 , вiд $(n-1)$ -го рядка вiднiмемо $(n-2)$ -ий рядок, також помножений на a_1 , i т.д. Тодi визначник Вандермонда набуде вигляду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо його за першим стовпчиком:

$$\Delta_n = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + \dots + 0 \cdot A_{n1} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Із першого стовпчика отриманого визначника винесемо $(a_2 - a_1)$ (спiльний спiвiнiожник всiх елементiв першого стовпчика), iз другого — $(a_3 - a_1)$, i т.д., iз $(n-1)$ -го стовпчика винесемо спiвiнiожник $(a_n - a_1)$. В результатi отримаємо, що

$$\Delta_n = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

тобто

$$\Delta_n = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \cdot \Delta_{n-1}.$$

Записуючи аналогічно Δ_{n-1} , Δ_{n-2} , ..., Δ_2 і враховуючи, що $\Delta_1 = 1$, отримуємо, що

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdot \dots \cdot (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Отже, визначник Вандермонда дорівнює добутку всіх різниць $a_i - a_j$ при $1 \leq j < i \leq n$.

АЛГЕБРА

2.7. Визначник добутку матриць

Теорема 2.23 (про визначник добутку матриць). Якщо A та B — квадратні матриці одного й того ж порядку, то

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B,$$

тобто визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Доведення. Нехай $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ — квадратні матриці n -го порядку і $A \cdot B = C = [c_{ij}]$. Побудуємо допоміжний визначник Δ порядку $2n$ вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(у лівому верхньому куті визначника Δ ми розмістили матрицю A , у правому нижньому — матрицю B , у весь правий верхній кут заповнили нулями, на головній діагоналі лівого нижнього кута розмістили число -1 , а на всіх решта місцях цього кута — нулі).

За теоремою Лапласа (теорема 2.21) розкладемо заданий визначник Δ за першими n рядками:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq 2n} M_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{1, 2, \dots, n} \cdot A_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{1, 2, \dots, n} = M_{1, 2, \dots, n}^{1, 2, \dots, n} \cdot A_{1, 2, \dots, n}^{1, 2, \dots, n} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+\dots+n+1+2+\dots+n} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \det A \cdot (-1)^{2+4+\dots+2n} \cdot \det B = \det A \cdot \det B \quad (2.21) \end{aligned}$$

(тут враховано, що $M_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{1, 2, \dots, n} = 0$ при $j_n > n$ внаслідок наявності у цих мінорах нульового стовпця).

Тепер перетворимо визначник Δ так, щоб усі елементи b_{ij} його правого нижнього кута виявилися рівними нулю. З цією метою до його $(n+1)$ -го стовпця послідовно додамо перші n стовпці, помножені відповідно на $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$; потім до $(n+2)$ -го стовпця послідовно додамо перші n стовпці, помножені відповідно на $b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}$; продовжуючи аналогічно, до $2n$ -го стовпця послідовно додамо перші n стовпці, помножені відповідно на $b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{nn}$. За лемою 2.11 всі ці перетворення не змінять визначника, проте в результаті цих перетворень зміниться не лише числа b_{ij} матриці визначника, але й числа (нулі) верхнього правого кута визначника: на перетині i -го рядка та $(n+j)$ -го стовпчика ($i, j = 1, 2, \dots, n$) тепер буде стояти число $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, котре за формулою (1.6)

дорівнює елементу c_{ij} матриці $C = A \cdot B$. Таким чином, визначник Δ набуде вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо ще раз теорему Лапласа, проте тепер розкладання здійснимо за останніми n стовпчиками:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 2n} M_{n+1, n+2, \dots, 2n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot A_{n+1, n+2, \dots, 2n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = M_{n+1, n+2, \dots, 2n}^{1, 2, \dots, n} \cdot A_{n+1, n+2, \dots, 2n}^{1, 2, \dots, n} = \\ &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+\dots+n+(n+1)+\dots+2n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \det C \cdot (-1)^{2n^2+n} \cdot (-1)^n = \det C \quad (2.22) \end{aligned}$$

(тут враховано, що, по-перше, при $i_n > n$ всі мінори $M_{n+1, n+2, \dots, 2n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ дорівнюють нулю внаслідок наявності у цих мінорах нульового рядка; по-друге, оскільки $1+2+\dots+n+(n+1)+(n+2)+\dots+2n = 2n^2+n$, то $(-1)^{2n^2+n} \cdot (-1)^n = (-1)^{2(n^2+n)} = 1$).

Із співвідношень (2.21) і (2.22) випливає, що $\Delta = \det A \cdot \det B = \det C$, тобто, що

для підготовки □

Приклад 2.22. 1. Знайдемо визначник добутку матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Заходимо визначники заданих матриць другого порядку: $\det A = -2$, $\det B = -8$. За теоремою 2.23 про визначник добутку матриць отримуємо

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = (-2) \cdot (-8) = 16. \quad (2.23)$$

Обчислимо цей же визначник, знайшовши добуток матриць:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 23 & 37 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 23 & 37 \end{vmatrix} = 11 \cdot 37 - 17 \cdot 23 = 16. \quad (2.24)$$

Як бачимо, результати обчислень (2.23) та (2.24) збігаються.

2. Знайдемо визначник матриці

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x & y & z \\ 3 & 4 & u & v & w \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо матрицю D у блочному вигляді:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right),$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Цю блочну матрицю зобразимо як добуток певних блочних матриць (в правильності цього зображення можна переконатися, знайшовши добуток за правилами множення блочних матриць)

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O^\top \\ O & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 & B \\ O & E_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & O^\top \\ O & E_3 \end{pmatrix},$$

де E_2 , E_3 — одиничні матриці другого та третього порядків відповідно. Застосовуючи співвідношення (2.12) прикладу 2.11 і зважаючи, що $\det A = -2$, $\det C = -16$ (див. приклад 2.7), отримуємо

$$\left| \begin{array}{c|cc} A & O^\top \\ \hline O & E_3 \end{array} \right| = \det A = -2, \quad \left| \begin{array}{c|cc} E_2 & O^\top \\ \hline O & C \end{array} \right| = \det C = -16.$$

Матриця $\begin{pmatrix} E_2 & B \\ O & E_3 \end{pmatrix}$ — блочно-трикутна, причому всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а тому

$$\left| \begin{array}{c|cc} E_2 & B \\ \hline O & E_3 \end{array} \right| = 1.$$

Отже, за теоремою про визначник добутку отримуємо, що

$$\left| \begin{array}{c|cc} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|cc} E_2 & O^\top \\ \hline O & C \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c|cc} E_2 & B \\ \hline O & E_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c|cc} A & O^\top \\ \hline O & E_3 \end{array} \right| = \det C \cdot 1 \cdot \det A = \det A \cdot \det C = -2 \cdot (-16) = 32.$$

Зауважимо, що заданий визначник D можна обчислити значно простіше (це зроблено у прикладі 2.14).

3. Знайдемо визначник $\det A^+$ приєднаної матриці A^+ стосовно квадратної матриці A порядку n .

За формулою (2.13)

$$A \cdot A^+ = \det(A) \cdot E = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

Визначник діагональної матриці у правій частині цієї рівності дорівнює $(\det A)^n$. Як наслідок, за теоремою 2.23 про визначник добутку маємо рівність

$$\det(A \cdot A^+) = \det A \cdot \det A^+ = (\det A)^n.$$

Звідси знаходимо

$$\det A^+ = (\det A)^{n-1}.$$

Зauważення 2.3. Узагальненням теореми 2.23 є формула Біне-Коші, яка виражає визначник добутку прямокутних матриць A та B розмірів $m \times n$ і $n \times m$ відповідно ($m < n$):

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i_m 1} & \cdots & b_{i_m m} \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

де в правій частині обчислюється сума добутків всіх можливих мінорів m -го порядку матриці A на відповідні мінори того ж порядку матриці B .

Приклад 2.23. Використовуючи формулу Біне-Коші, обчислимо визначник добутку прямокутних матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

За формулою (2.25) отримуємо

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 = -12.$$

Перевіримо результат обчислень. Оскільки

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},$$

то $\det(AB) = \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -12$. Як бачимо, результати обчислень співпадають.

2.8. Обернені матриці: означення, існування, єдиність

Розглянемо проблему визначення операції, оберненої множенню матриць.

Означення 2.12. Нехай A — квадратна матриця порядку n . *Оберненою до матриці A* називається така матриця A^{-1} , яка разом із заданою матрицею A задовольняє співвідношення

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (2.26)$$

Матрицю, до якої існує обернена, називають *оборотною*; у протилежному випадку — *необоротною*.

Природно, що виникає питання чи для будь-якої матриці існує обернена? З рівності (2.26) випливає, що обернені матриці існують лише для квадратних матриць, причому обернена матриця A^{-1} також є квадратною матрицею того ж порядку, що й A . Однак не для будь-якої квадратної матриці існує обернена. Зокрема, обернена матриця не існує для вироджених матриць (*виродженою* (або *особливовою*) називається квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю; у протилежному випадку вона називається *невиродженою* (*неособливовою*)). Справді, нехай матриця A вироджена і припустимо, що для неї існує обернена матриця A^{-1} . Застосовуючи теорему про визначник добутку матриць до одиничної матриці $E = A^{-1}A$,

$$\det E = \det(A^{-1} \cdot A) = \det A^{-1} \cdot \det A = \det A^{-1} \cdot 0 = 0,$$

отримуємо протиріччя, оскільки визначник одиничної матриці дорівнює 1.

Виявляється, що відмінність від нуля визначника квадратної матриці є єдиною умовою існування оберненої матриці.

Теорема 2.24 (про існування та єдиність оберненої матриці). Квадратна матриця має обернену матрицю (причому єдину) тоді і лише тоді, коли вона невироджена; обернена до матриці A порядку n обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+, \quad (2.27)$$

де A^+ — приседнана матриця стосовно матриці A .

Доведення. Нехай для матриці A існує обернена матриця A^{-1} . Застосувавши теорему про визначник добутку матриць до одиничної матриці $E = A \cdot A^{-1}$ і врахувавши, що $\det E = 1$, отримаємо

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}.$$

Отримана рівність можлива лише тоді, коли $\det A \neq 0$.

Навпаки, нехай $\det A \neq 0$. Тоді ми можемо утворити матрицю $\frac{1}{\det A} \cdot A^+$ і перевіримо, що вона є оберненою до матриці A . Для цього обчислимо добутки $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^+\right)$ і $\left(\frac{1}{\det A} \cdot A^+\right) \cdot A$:

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^+\right) = \frac{1}{\det A} \cdot (A \cdot A^+) = \left\{ \begin{array}{l} \text{за формулою (2.13)} \\ A \cdot A^+ = \det A \cdot E \end{array} \right\} = \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot E = E$$

і, аналогічно,

$$\left(\frac{1}{\det A} \cdot A^+\right) \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot (A^+ \cdot A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{за формулою (2.13)} \\ A^+ \cdot A = \det A \cdot E \end{array} \right\} = \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot E = E.$$

Отже, якщо матриця A невироджена, то вона має обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$.

Єдиність оберненої матриці доведемо від супротивного: припустимо, що існують дві матриці A^{-1} і A' , обернені до матриці A (тобто $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ і $A \cdot A' = A' \cdot A = E$). Тоді за асоціативністю добутку матриць (співвідношення (1.7) твердження 1.2) отримуємо, що

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot E = A^{-1} \cdot (\underbrace{A \cdot A'}_E) = (\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E) \cdot A' = E \cdot A' = A'.$$

□

Приклади 2.24. 1. Переконаємося, що до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

існує обернена і знайдемо її.

Оскільки визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

відмінний від нуля, то обернена матриця A^{-1} існує.

Обчислимо алгебричні доповнення A_{ij} усіх елементів матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3, & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 6, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -9, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 12, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -7, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11. \end{aligned}$$

Звідси за формулою (2.27) отримуємо, що

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+ = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. З'ясуємо, чи існує обернена матриця до матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -7 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник заданої матриці. Для цього скористаємося елементарними перетвореннями визначників: додамо до першого рядка матриці B її третій рядок, отримаємо

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

оскільки в отриманій матриці є два однакові рядки (перший і четвертий). Отже, матриця B вироджена і, як наслідок, для неї не існує оберненої.

Зауваження 2.4. 1. Матриця, обернена до невиродженої діагональної, також є діагональною:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

2. Матриця, обернена до невиродженої верхньої (нижньої) трикутної матриці, є верхньою (нижньою) трикутною матрицею.

Твердження 2.25. Для невироджених матриць A, B однакового порядку правильні такі рівності:

- (1) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- (2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- (4) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
- (5) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$;
- (6) $E^{-1} = E$.

Доведення. (1) Випливає з очевидної рівності: $1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$.

(2) Оскільки $(A^{-1})^{-1}$ обернена до A^{-1} , то $(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = E$, а тому

$$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot E = (A^{-1})^{-1} \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_E = \underbrace{((A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1})}_E \cdot A = E \cdot A = A.$$

(3) Справді, визначник добутку матриць AB відмінний від нуля, оскільки

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B,$$

де, за умовою твердження, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Тому обернена матриця $(AB)^{-1}$ існує і єдина. Покажемо за означенням, що матриця $B^{-1}A^{-1}$ є оберненою до матриці AB . Дійсно

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_E \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E,$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_E \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E.$$

Із єдиності оберненої матриці випливає рівність $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) Очевидно випливає з попередньої властивості.

(5) Оскільки

$$E = E^T = (A \cdot A^{-1})^T = \{\text{за твердженням 1.6}\} = (A^{-1})^T \cdot A^T,$$

$$E = E^T = (A^{-1} \cdot A)^T = \{\text{за твердженням 1.6}\} = A^T \cdot (A^{-1})^T,$$

то, як бачимо, за означенням матриця $(A^{-1})^T$ є оберненою до матриці A^T і з єдиності оберненої матриці випливає, що $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(6) Очевидно. □

Твердження 2.26. Усі елементарні матриці є оборотними, причому матриці, обернені до елементарних матриць, також елементарні і відповідають оберненим елементарним перетворенням.

Пропонуємо читачеві виконати доведення цього твердження самостійно.

2.9. Способи знаходження оберненої матриці

Нехай задано квадратну матрицю A . Знайдемо обернену матрицю A^{-1} .

Перший спосіб. Цей спосіб вказано у теоремі 2.24 про існування та єдиність оберненої матриці. Його суть полягає у виконанні таких кроків:

- (1) обчислити визначник $\det A$ заданої матриці; якщо $\det A = 0$, то оберненої матриці не існує (матриця A вироджена);
- (2) утворити матрицю $[A_{ij}]$ із алгебричних доповнень $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ усіх елементів матриці A ;
- (3) транспонуючи матрицю $[A_{ij}]$, отримати приєднану матрицю $A^+ = [A_{ij}]^T$;
- (4) знайти обернену матрицю (2.27), поділивши всі елементи приєднаної матриці на визначник $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+.$$

Зауваження 2.5. Для невироджених квадратних матриць $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ другого порядку правило знаходження оберненої матриці значно спрощується:

- (1) помінити місцями елементи на головній діагоналі;
- (2) змінити знаки елементів бічної діагоналі (не змінюючи їх місцерозташування);
- (3) поділити отриману матрицю на визначник $\det A = ad - bc$.

В результаті отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Дійсно, виконуючи послідовно кроки першого способу, маємо:

$$(1) \det A = ad - bc; \quad (2) [A_{ij}] = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (3) A^+ = [A_{ij}]^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \quad (4) A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Є сенс в запам'ятовуванні цієї простої формули (2.28).

Другий спосіб. Для знаходження оберненої матриці можна використовувати елементарні перетворення:

- (1) утворити блочну матрицю $(A | E)$, приписавши до заданої матриці A одиничну матрицю того ж порядку;
- (2) за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці $(A | E)$ привести її лівий блок A до вигляду (1.15) (позначимо його Λ); при цьому блочна матриця зведеться до вигляду $(\Lambda | S)$, де S — квадратна матриця, яка отримується в результаті перетворень із одиничною матрицею E ;
- (3) якщо $\Lambda = E$, то блок S дорівнює оберненій матриці, тобто $S = A^{-1}$; якщо $\Lambda \neq E$, то матриця A не має оберненої.

Дійсно, за допомогою елементарних перетворень рядків матриці $(A | E)$ можна звести її лівий блок A до вигляду Λ (вигляду (1.15)). При цьому блочна матриця $(A | E)$ перетвориться у вигляд $(\Lambda | S)$, де S — матриця, яка розкладається в добуток елементарних і задоволює рівності $\Lambda = SA$. Якщо матриця A невироджена, то за твердженням ?? її спрощений вигляд Λ збігається з одиничною матрицею $\Lambda = E$. Тоді з рівності $E = \Lambda = SA$ випливає, що $S = A^{-1}$. Якщо ж матриця A вироджена, то її спрощений вигляд Λ відрізняється від одиничної матриці, а матриця A не має оберненої.

Зauważення 2.6. Другий спосіб знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень заданої матриці може бути реалізований й таким способом:

- (1) утворити блочну матриця $\begin{pmatrix} A & E \\ E & T \end{pmatrix}$, приписавши до заданої матриці A одиничну матрицю того ж порядку;
- (2) за допомогою елементарних перетворень над стовпцями звести блочну матрицю до вигляду $\begin{pmatrix} E & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$; в отриманій матриці блок T дорівнює оберненій матриці, тобто $T = A^{-1}$.

Приклад 2.25. Знайдемо обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Перший спосіб. (1) Оскільки $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то матриця A невироджена і, отож, має обернену.

(2) Утворимо матрицю із алгебричних доповнень елементів матриці A :

$$[A_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Транспонуючи матрицю $[A_{ij}]$, отримуємо приєднану матрицю

$$A^+ = [A_{ij}]^\top = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Поділивши всі елементи приєднаної матриці на визначник $\det A = -2$, знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+ = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи правило (2.28) зауваження 2.5, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ отримуємо

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо також, що $\det(A^{-1}) = \frac{1}{-2} = \frac{1}{\det A}$.

Другий спосіб. (1) Утворимо блочну матрицю

$$(A | E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Елементарними перетвореннями рядків зведемо її до вигляду $(E | A^{-1})$:

$$\begin{aligned} (A | E) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{до другого рядка} \\ \text{додамо перший, помножений на } (-3) \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{до першого рядка} \\ \text{додаємо другий} \end{array} \right\} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{щоб отримати з лівого боку} \\ \text{одиничну матрицю, поділивши другий рядок на } (-2) \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (E | A^{-1}). \end{aligned}$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 2.26. Знайдемо обернену до матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Перший спосіб. (1) Знаходимо визначник заданої матриці $\det B = 2$. Оскільки $\det B \neq 0$, то обернена до заданої матриці B існує.

(2) Знаходимо алгебричні доповнення усіх елементів матриці B

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

і утворимо з них матрицю

$$[A_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Транспонуючи матрицю $[A_{ij}]$, отримуємо приєднану матрицю

$$B^+ = [A_{ij}]^\top = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Поділивши усі елементи приєднаної матриці на визначник $\det B = 2$, отримаємо обернену матрицю:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другий спосіб. (1) Утворимо блочну матрицю $(B | E)$, приписавши до матриці B одиничну матрицю того ж порядку:

$$(B | E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Елементарними перетвореннями рядків зведемо її до вигляду $(E | B^{-1})$:

$$(B | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) = (E | B^{-1}).$$

У правому блокі отримали обернену матрицю $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2.10. Обернені блочних матриць

Нехай квадратна невироджена матриця Q порядку $m + n$ розбита на блоки

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

де A — невироджена квадратна матриця m -го порядку, а B, C, D — довільні матриці розмірів $m \times n, n \times m, n \times n$ відповідно.

Обернена матриця до матриці Q існує і обчислюється за *формулою Фробеніуса* (Ferdinand Georg Frobenius, 1849-1917)

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}BNCA^{-1} & -A^{-1}BN \\ \hline -NCA^{-1} & N \end{array} \right), \quad (2.29)$$

де $N = (D - CA^{-1}B)^{-1}$. Ця формула зводить задачу знаходження оберненої для матриці $(m + n)$ -го порядку до задачі знаходження обернених для матриць A та N меншого порядку (m та n відповідно).

Якщо невиродженою є матриця D (замість матриці A), то формула має вигляд:

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M & -MBD^{-1} \\ \hline -D^{-1}CM & D^{-1} + D^{-1}CMBD^{-1} \end{array} \right).$$

де $M = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ — квадратна матриця m -го порядку.

Насамкінець, якщо обидві матриці A та D невироджені, то

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M & -MBD^{-1} \\ \hline -D^{-1}CM & N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M & -A^{-1}BN \\ \hline -NCA^{-1} & N \end{array} \right), \quad (2.30)$$

де, як і раніше, $M = (A - BD^{-1}C)^{-1}, N = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ — квадратні матриці порядків m та n відповідно.

Доведення формул (2.29), (2.30) зводиться до множення блочних матриць

Приклад 2.27. Зайдемо обернену для блочної матриці

$$Q = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

Матриця A — невироджена другого порядку. Застосовуючи правило (2.28), послідовно знаходимо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad CA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$N = (D - CA^{-1}B)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}BN = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}BNCA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} + A^{-1}BNCA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$NCA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

За формулою (2.29) знаходимо

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array} \right).$$

Зважаючи на те, що матриця D в заданій блочній матриці Q є невиродженою, обернену матрицю Q^{-1} можна знайти й за формулою (2.30). Обчислюємо лівий верхній блок матриці Q^{-1} (решту блоків такі ж, як у формулі (2.29)):

$$A - BD^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$M = (A - BD^{-1}C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результати обчисень за формулам (2.29) і (2.30) збігаються.

Завдання 2.7. Якщо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ розбитий на чотири блоки, де матриці A та D — квадратні, то правильні формули:

$$\Delta = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| \text{ при } |A| \neq 0;$$

$$\Delta = |A - BD^{-1}C| \cdot |D| \text{ при } |D| \neq 0.$$

У частковому випадку, коли усі чотири матриці A, B, C, D квадратні одного и того же порядку, правильні формули Шура (Issai Schur, 1875-1941):

$$\Delta = |AD - ACA^{-1}B| \text{ при } |A| \neq 0;$$

$$\Delta = |AD - BD^{-1}CD| \text{ при } |D| \neq 0.$$

Якщо матриці A та C переставні ($AC = CA$), то $\Delta = |AD - CB|$, а якщо матриці C та D переставні, то $\Delta = |AD - BC|$.

Доведемо, наприклад, формулу

$$\Delta = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

Нехай A та D — квадратні матриці m -го і n -го порядків відповідно, причому $|A| \neq 0$. Утворимо блочну матрицю $S = \begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$, де O — нульова матриця розміру $m \times n$. Матрицю S можна розглядати як елементарну блочну матрицю, оскільки вона отримана із одиничної блочної матриці $E_{m+n} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O^\top & E_n \end{pmatrix}$ в результаті додавання до її другого рядка блоків першого рядка блоків, помножених на матрицю $(-CA^{-1})$. Домножимо блочну матрицю $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ зліва на матрицю S :

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O^\top & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначники матриць в лівій і правій частинах цієї рівності. Визначник матриці S дорівнює одиниці, оскільки це нижня трикутна чисрова матриця з одиницями на головній діагоналі (тврдження 2.22). Визначник матриці в правій частині дорівнює $|A| \cdot |D - CA^{-1}B|$, оскільки це блочно-трикутна матриця (зауваження 2.2). За теоремою про визначник добутку матриць отримуємо формулу

$$\begin{vmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O^\top & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \Leftrightarrow 1 \cdot \Delta = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|,$$

яку й треба було довести.

2.11. Матричні рівняння

Для підготовки (2.31)

Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$A \cdot X = B$$

де A та B — задані матриці, які мають однакову кількість рядків, причому матриця A квадратна. Треба знайти матрицю X , яка задовольняє рівняння (2.31).

Твердження 2.27. Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то матричне рівняння (2.31) має єдиний розв'язок $X = A^{-1}B$.

Дійсно, підставляючи $X = A^{-1}B$ в ліву частину рівності (2.31), отримуємо $A(A^{-1}B) = (\underbrace{AA^{-1}}_E)B = B$, тобто праву частину цієї рівності.

Зауважимо, що розв'язком матричного рівняння $AX = E$ є обернена матриця $X = A^{-1}$.

Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$Y \cdot A = B, \quad (2.32)$$

де A та B — задані матриці, які мають однакову кількість стовпців, причому матриця A квадратна. Треба знайти матрицю Y , яка задовольняє рівняння (2.32).

Твердження 2.28. Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то матричне рівняння (2.32) має єдиний розв'язок $Y = BA^{-1}$.

Приклад 2.28. Розв'язати рівняння

$$\text{а)} \quad AX = B, \quad \text{б)} \quad YB = B, \quad \text{в)} \quad YA = C,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ було обчислено у прикладі 2.25.

а) Розв'язок рівняння $AX = B$ знаходимо, домноживши обидві його частини на A^{-1} :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

б) Рівняння $YB = B$ не має розв'язків, оскільки матриці A та B мають різну кількість стовпчиків ($2 \neq 3$).

в) Розв'язок рівняння $YA = C$ знаходимо, домноживши обидві його частини справа на A^{-1} :

$$Y = CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.29. Розв'яжемо рівняння $BX + 2X = E$, де $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Перетворивши ліву частину рівняння

$$B \cdot X + 2 \cdot X = B \cdot X + 2 \cdot E \cdot X = (B + 2 \cdot E) \cdot X,$$

приведемо його до вигляду (2.31)

$$A \cdot X = E,$$

де $A = B + 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тому $X = A^{-1}E = A^{-1}$. Обернену матрицю A^{-1} було знайдено у прикладі 2.25: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Отже, $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 2.30. Розв'яжемо рівняння $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обернені матриці

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

були обчислені у прикладах 2.25, 2.26 відповідно. Розв'язок рівняння знаходимо за формулou

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 2.31. Розв'яжемо рівняння $AX = B$, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки визначник матриці A дорівнює нулю (в обидвох випадках), то обернена матриця не існує і, отож, не можна використовувати формулу $X = A^{-1}B$. Знайдемо інші шляхи розв'язання цього рівняння.

а) Нехай $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо матриці і прирівняємо відповідні елементи матриць в лівій і правій частинах рівняння:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=1, \\ b+2d=0. \end{cases}$$

Тут, зважаючи на пропорційність рівнянь, в системі залишено лише два рівняння із чотирьох. Виразимо невідомі a та b :

АЛГЕБРА

Як наслідок, розв'язок матричного рівняння має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 1-2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix},$$

де параметри c та d можуть приймати довільні значення. Отже, задане матричне рівняння має нескінченну множину розв'язків.

б) Оскільки матриці A та B квадратні другого порядку, то шукана матриця X також повинна бути квадратною матрицею другого порядку, і ми можемо застосувати теорему про визначник добутку матриць:

$$\det(AX) = \det A \cdot \det X = 0 \cdot \det X = 0.$$

Оскільки $\det B = -6$, рівність $AX = B$ неможливо при жодному значенні $\det X$. Отже, задане матричне рівняння не має розв'язків.

Для підготовки

до колоквіуму,

а не для

списування

на ньому