

# ЛІНІЙНА

## Розділ 1. Матриці АЛГЕБРА

### 1.1. Означення та основні позначення

Нехай  $m$  та  $n$  — довільні фіксовані натуральні числа.

**Означення 1.1.** *Матрицею* розміру  $m \times n$  (або  $(m \times n)$ -матрицею) називають систему елементів із множини будь-яких математичних об'єктів, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, яка містить  $m$  рядків та  $n$  стовпчиків.

Матриці позначатимемо великими латинськими літерами  $A, B, C, \dots$ , а їхні елементи — малими латинськими літерами з двома індексами (наприклад,  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ ); перший індекс завжди означатиме номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких розміщений заданий елемент (для прикладу: елемент  $a_{12}$  розміщений на перетині першого рядка і другого стовпця). Детально матрицю  $A$  розміру  $m \times n$  з елементами  $a_{ij}$  записуватимемо у вигляді

ЛНУ

для підготовки

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Іноді, заради стисливості, використовуватимемо скорочений запис  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  або просто  $A = [a_{ij}]$ , якщо з контексту зрозуміло якого розміру матриця.

**Приклад 1.1.** Наведемо приклади матриць різних розмірів з елементами з різних множин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A$  має розмір  $2 \times 3$ , матриця  $B$  — розмір  $3 \times 2$ , матриця  $C$  — розмір  $2 \times 2$ , матриця  $D$  — розмір  $2 \times 1$ .

**Зauważення 1.1.** В загальному випадку,  $(m \times n)$ -матрицею над непорожньою множиною  $M$  довільної природи називають функцію  $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow M$ , яка кожній впорядкованій парі натуральних чисел (елементу декартового добутку)  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ставить у відповідність елемент  $a_{ij} \in M$ .

Здебільшого ми розглядатимемо *числові матриці*, тобто матриці з елементами множини дійсних чисел  $\mathbb{R}$  чи іншого числового поля (під *числовим полем* ми розуміємо множину чисел, у якій коректні арифметичні операції додавання, віднімання, множення, ділення на ненульове число; прикладами числових полів є множини  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , а от множини  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$  не є числовими полями). Множину всіх  $(m \times n)$ -матриць над множиною дійсних чисел  $\mathbb{R}$  позначатимемо  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , тобто

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{[a_{ij}]_{m \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

**Означення 1.2.** Матриці  $A = [a_{ij}]$  та  $B = [b_{ij}]$  вважатимемо *рівними* (записуватимемо  $A = B$ ), якщо вони однакового розміру ( $m \times n$ ) та їхні елементи на відповідних місцях рівні:  $a_{ij} = b_{ij}$  для всіх  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ .

**Приклад 1.2.** Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що  $A = B$ , але  $A \neq C$  (оскільки на перетині первого рядка і первого стовпчика розташовані різні елементи) і  $A \neq D$  (оскільки матриці різного розміру).

## 1.2. Основні типи матриць

**Означення 1.3.** В загальному випадку матрицю розміру  $m \times n$  називають *прямокутною*. Проте, якщо  $(m \times n)$ -матриця складається лише з одного рядка ( $m = 1$ )

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad (1.2)$$

або одного стовпчика ( $n = 1$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

то її відповідно називають *матрицею-рядком* або *матрицею-стовпчиком* (чи просто *рядком* або *стовпчиком*). Часто в записі матриці-рядка з метою покращення візуального сприйняття між елементами різних стовпчиків ставлять коми (як ми це зробили в записі (1.2)).

**Означення 1.4.** Якщо в  $(m \times n)$ -матриці кількість рядків дорівнює кількості стовпців ( $m = n$ ), то таку матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

називають *квадратною*. Число рядків (чи стовпчиків) квадратної матриці називають її *порядком*. Множину всіх квадратних матриць порядку  $n$  з елементами із множини дійсних чисел  $\mathbb{R}$  позначатимемо через  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Приклад 1.3.** Матриці

$$(a_{11}), \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \\ 31 & -2 & 33 \end{pmatrix}$$

є квадратними матрицями першого, другого і третього порядків відповідно.

Кожна квадратна матриця має дві діагоналі: одна з них йде з лівого верхнього кута в правий нижній (елементи  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ) і називається *головною діагоналлю*, або просто *діагоналлю*, а інша, яка йде з лівого нижнього кута в правий верхній, — *бічною діагоналлю*.

**Означення 1.5.** Квадратну матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

у якій всі елементи поза головною діагоналлю дорівнюють нулю, називають *діагональною* і часто позначають  $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ . Якщо в діагональній матриці (1.4) всі елементи головної діагоналі рівні між собою (тобто  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$ ), то така матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

# АЛГЕБРА

називається *скалярною*. Частковим випадком скалярної матриці є діагональна матриця з одиницями на головній діагоналі,

## 1 семестр

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

така матриця називається *одиничною* ( $n$ -го порядку) і позначається  $E$  (або  $E_n$  для підкреслення розміру матриці). Одиничну матрицю також зручно записувати так:

$$\text{ЛНУ} \quad E = [\delta_{ij}],$$

де  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

**Приклад 1.4.** Розглянемо квадратні матриці 3-го порядку

# для підготовки

Матриці  $A, B, C, E$  — діагональні,  $C, E$  — скалярні,  $E$  — одинична матриця.

**Означення 1.6.** Якщо в квадратній матриці всі елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю,

# до колоквіуму,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

то таку матрицю називають *верхньою трикутною*. Якщо у верхній трикутній матриці вигляду (1.5) всі діагональні елементи відмінні від нуля ( $a_{ii} \neq 0$  для усіх  $i \in \overline{1, n}$ ), то така матриця називається *верхньою строго трикутною*. Аналогічне означення можна сформулювати для нижніх трикутних і нижніх строго трикутних матриць. *Трикутна матриця* — це верхня або нижня трикутна матриця.

**Означення 1.7.** Трикутна матриця з нулями на головній діагоналі називається *нільтрикутною матрицею*. Строго трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі називається *унітрикутною матрицею*.

**Приклад 1.5.** Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A$  є верхньою строго трикутною матрицею, матриця  $B$  — нижньою (не строго) трикутною, матриця  $C$  — нільтрикутною, а матриця  $D$  — унітрикутною.

# списування на новому

**Означення 1.8.** Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою* та позначається  $O$ ,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Означення 1.9.** Матриця  $E_{ij}$ , на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпчика якої розташована одиниця, а на всіх решта місцях нулі, називають *матричною одиницею*. Очевидно, що у множині  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  існує  $m \cdot n$  матричних одиниць.

**Приклад 1.6.** У множині  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  існує 6 матричних одиниць:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Означення 1.10.** Кожній квадратній матриці можна співставити у відповідність її *слід*, тобто число, яке дорівнює сумі елементів головної діагоналі матриці. Слід матриці  $A$  позначатимемо  $\text{tr}(A)$ .

**Приклади 1.7. 1.** Слід матриці (1.3) дорівнює  $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

2. Якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , то  $\text{tr}(A) = 1 + 4 = 5$ .

### 1.3. Операції над матрицями

Означимо основні операції над матрицями: додавання матриць, множення матриць на числа, множення матриць.

**Означення 1.11.** Сумою матриць  $A = [a_{ij}]$  та  $B = [b_{ij}]$  однакового розміру  $m \times n$  називають матрицю  $C = [c_{ij}]$  того ж розміру, кожен елемент  $c_{ij}$  якої є сумою відповідних елементів  $a_{ij}$  та  $b_{ij}$  матриць  $A$  та  $B$ , тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

для усіх  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Позначатимемо:  $C = A + B$ .

**Зauważення 1.2.** Наголосимо, що додавання матриць виконується поелементно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

і додавати можна лише матриці однакових розмірів. Схематично додавання матриць можна зобразити так:

$$\underbrace{\boxed{A}}_{m \times n} + \underbrace{\boxed{B}}_{m \times n} = \underbrace{\boxed{C}}_{m \times n}.$$

**Приклади 1.8. 1.** Додамо дві матриці:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -8 & 9 \\ 10 & 11 & -12 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2-8 & 3+9 \\ -4+10 & 5+11 & 6-12 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 & 12 \\ 6 & 16 & -6 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}.$$

Як бачимо, результатом додавання двох матриць розміру  $2 \times 3$  є матриця також розміру  $2 \times 3$ .

**2.** Неможливо знайти суми вигляду

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \quad \text{або} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}}_{1 \times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}.$$

**Означення 1.12.** Добутком матриці  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  на скаляр  $\lambda$  називається матриця  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ , елементи якої отримують з відповідних елементів матриці  $A$  домноженням на скаляр  $\lambda$ , тобто

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

для усіх  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Позначатимемо:  $C = \lambda \cdot A$  або  $C = \lambda A$ .

**Зauważення 1.3.** Оскільки множення матриці на число відбувається поелементно,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

то множити на число можна будь-яку матрицю.

**Приклад 1.9.** Помножимо матрицю на скаляр:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-7) & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 27 \\ 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $(-1) \cdot A$  називається *протилежною матрицею*  $A$  і позначається  $(-A)$ . Сума матриць  $B$  і  $(-A)$  називається *різницею матриць* і позначається  $B - A$ . Для знаходження різниці матриць  $B - A$  треба від елементів матриці  $B$  відняти відповідні елементи матриці  $A$ . Очевидно, що віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

**Твердження 1.1.** Нехай  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — матриці відповідних розмірів,  $\lambda$ ,  $\mu$  — довільні дійсні числа.

Правильні такі рівності:

- (1)  $A + B = B + A;$
- (2)  $(A + B) + C = A + (B + C);$
- (3)  $A + O = O + A = A;$
- (4)  $A + (-A) = -A + A = O;$
- (5)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A;$
- (6)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$
- (7)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$
- (8)  $1 \cdot A = A.$

**Доведення.** Обмежимося доведенням, наприклад, шостої рівності. Нехай  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  — матриці однакового розміру. Тоді

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = \\ &= [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] = \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$

Решта рівностей доводиться аналогічно. □

Додавання матриць та множення матриць на скаляри називають *лінійними операціями над матрицями*. Зауважимо також, що множення матриць з множини  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  на скаляри з  $\mathbb{R}$  є унарною операцією на множині  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Означення 1.13.** Добутком матриці  $A = [a_{ij}]$  розміру  $m \times k$  на матрицю  $B = [b_{ij}]$  розміру  $k \times n$  називають матрицю  $C = [c_{ij}]$  розміру  $m \times n$ , у якій кожен елемент  $c_{ij}$  дорівнює сумі добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпчика матриці  $B$ , тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \quad (1.6)$$

для усіх  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Позначатимемо:  $C = A \cdot B$  або  $C = AB$ .

Розглянемо детальніше процедуру множення матриць, наведену в означенні 1.13. Щоб отримати елемент  $c_{ij}$ , розміщений на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця матриці  $C$ , треба виділити  $i$ -й рядок матриці  $A$  та  $j$ -й стовпець матриці  $B$ . Вони містять однакову кількість  $k$  елементів. Потім знайти суму попарних добутків відповідних елементів: перший елемент  $i$ -го рядка матриці  $A$  множиться на перший елемент  $j$ -го стовпця матриці  $B$ , другий елемент  $i$ -го рядка множиться на другий елемент  $j$ -го стовпця і т.д., а результати множення додаються.

**Приклад 1.10.** Перемножимо дві матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 9 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 9 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В добутку  $AB$  матрицю  $A$  називають **лівим множником** для матриці  $B$  і говорять про **множення матриці  $B$  на матрицю  $A$  зліва**, а матрицю  $B$  — **правим множником** для матриці  $A$  і говорять про **множення матриці  $A$  на матрицю  $B$  справа**.

**Зауваження 1.4.** Не кожні дві матриці можна перемножити. Операція множення визначена тільки для **узгоджених** матриць: матрицю  $A$  можна помножити на матрицю  $B$  лише тоді, коли кількість стовпців матриці  $A$  дорівнює кількості рядків матриці  $B$  (зокрема, множення квадратних матриць одного порядку можливе завжди). Матриця-добуток  $AB$  має стільки ж рядків, скільки її має матриця  $A$ , і стільки ж стовпців, скільки їх має матриця  $B$ . Схематично це можна зобразити так:

$$\underbrace{\begin{matrix} A \\ m \times k \end{matrix}} \cdot \underbrace{\begin{matrix} B \\ k \times n \end{matrix}} = \underbrace{\begin{matrix} C \\ m \times n \end{matrix}}.$$

**Приклади 1.11.** 1. Якщо  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ , то

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}}_{2 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 & ax_1 + bx_2 & ay_1 + by_2 & az_1 + bz_2 \\ cw_1 + dw_2 & cx_1 + dx_2 & cy_1 + dy_2 & cz_1 + dz_2 \\ ew_1 + fw_2 & ex_1 + fx_2 & ey_1 + fy_2 & ez_1 + fz_2 \end{pmatrix}}_{3 \times 4},$$

а добуток  $BA$  цих матриць невизначений, оскільки кількість стовпців матриці  $B$  (четири) не дорівнює кількості рядків матриці  $A$  (три). В таких випадках говорять, що матрицю  $A$  можна помножити на матрицю  $B$  справа і не можна помножити матрицю  $B$  зліва.

2. Добуток  $AB$  матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

не може бути знайдено, оскільки кількість стовпців матриці  $A$  (три) не дорівнює кількості рядків матриці  $B$  (один). У той же час можна помножити матрицю  $A$  на матрицю  $B$  зліва:

$$B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}}_{1 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = (1 \cdot 3 + 3 \cdot 0, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{1 \times 3}.$$

3. Знайдемо добутки  $AB$  і  $BA$  матриць  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Використовуючи правило множення матриць, отримаємо:

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 2},$$

$$B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{3 \times 3}.$$

Обидва добутки  $AB$  і  $BA$  визначені, але є матрицями різних розмірів, і тому  $AB \neq BA$ .

4. Перемножимо матрицю-стовпчик і матрицю-рядок:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{4 \times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{1 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}}_{4 \times 4},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{1 \times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{4 \times 1} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 27 \end{pmatrix}}_{1 \times 1}.$$

Як уже було зауважено, множення квадратних матриць однакового порядку можливе завжди.

- Приклади 1.12.** 1. Знайдемо добутки  $AB$  та  $BA$  матриць  $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Оскільки матриці  $A$  та  $B$  є квадратними другого порядку, то їхні добутки також будуть квадратними матрицями другого порядку. Використовуючи правило множення матриць, отримаємо:

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) & 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -26 & -5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2},$$

$$B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 6 + (-1) \cdot 2 & (-4) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 6 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -26 & -5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}.$$

Як бачимо, результати множення співпадають, тобто  $AB = BA$ .

2. Помножимо матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  справа і зліва на матрицю  $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Обидва добутки — це квадратні матриці одного і того ж порядку, але  $AB \neq BA$ .

3. Знайдемо добутки  $AB$ ,  $BA$ ,  $AE$ ,  $EA$ ,  $BO$ ,  $OB$  матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки всі матриці є квадратними другого порядку, то їх добутки будуть квадратними матрицями порядку 2. Маємо:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$O \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо,  $AB \neq BA$ ,  $AE = EA = A$ ,  $BO = OB = O$ .

У загальному випадку множення матриць не є комутативним. Добуток матриць залежить від розміщення множників, тобто  $AB$  не завжди дорівнює  $BA$ . По-перше, розміри матриць  $A$  та  $B$  можуть бути такими, що добуток  $AB$  визначено, а добуток  $BA$  — ні і навпаки (в прикладі 1.11.(1) знайдено добуток  $AB$ , а добуток  $BA$  не визначений; в прикладі 1.11.(2) знайдено добуток  $BA$ , а добуток  $AB$  неможливий). По-друге, навіть якщо обидва добутки  $AB$  і  $BA$  визначені, результати можуть виявитися матрицями різних розмірів (приклади 1.11.(3) і 1.11.(4)). Якщо матриці  $A$  та  $B$  — квадратні однакового порядку, то добутки  $AB$  і  $BA$  будуть також квадратними матрицями того ж порядку. Проте навіть за цих умов множення матриць не комутативне (приклади 1.12.(2) і 1.12.(3), де  $AB \neq BA$ ). З іншого боку, в прикладі 1.12.(3)  $AE = EA = A$  і  $BO = OB = O$ , а в прикладі 1.12.(1)  $AB = BA$ , тобто існують квадратні матриці, добутки яких не залежать від перестановки множників.

**Означення 1.14.** Матриці  $A$  та  $B$  називаються *переставними*, якщо  $AB = BA$ .

**Зауваження 1.5.** Переставними можуть бути лише квадратні матриці одного і того ж порядку. Справді, розглянемо добуток  $AB = BA$  і нехай  $A$  — матриця розміру  $m \times n$ ,  $B$  — матриця розміру  $p \times q$ . З умови існування добутку  $AB$  випливає, що  $n = p$ , а з умови існування добутку  $BA$  — що  $q = m$ . Крім цього, з рівності  $AB = BA$  випливає, що  $m = p$ ,  $n = q$ . Отже,  $m = p = q = n$ , тобто матриці  $A$  та  $B$  — квадратні однакового порядку.

Зауважимо також, що, як легко переконатися, діагональні матриці одного і того ж порядку переставні.

**Приклад 1.13. 1.** Матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  та  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$  переставні, оскільки

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = BA,$$

а матриці  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  непереставні, оскільки

$$CD = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 19 & 10 \end{pmatrix} \neq DC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}.$$

**Твердження 1.2.** Операція множення матриць володіє такими властивостями:

$$(AB)C = A(BC), \quad (1.7)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (1.8)$$

$$(B + C)D = BD + CD, \quad (1.9)$$

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

(тут передбачено, що розміри матриць  $A, B, C$  та  $D$  узгоджені так, що наведені добутки та суми мають зміст).

*Доведення.* Доведемо рівність (1.7). Нехай  $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$ . Тоді

$$AB \in M_{m \times q}(\mathbb{R}), \quad BC \in M_{p \times n}(\mathbb{R}),$$

а тому всі добутки, які входять у співвідношення (1.7), визначені, причому  $(AB)C, A(BC) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  і

$$\begin{aligned} (AB)C &= ([a_{ij}] \cdot [b_{ij}])[c_{ij}] = \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right] \cdot [c_{ij}] = \left[ \sum_{l=1}^q \left( \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \right) \right] = \\ &= \left[ \sum_{l=1}^q \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \right] = \left[ \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^q a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \right] = \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} \left( \sum_{l=1}^q b_{kl} c_{lj} \right) \right] = A(BC). \end{aligned}$$

Доведемо властивість (1.8). Нехай  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ ,  $B = [b_{ij}] \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ . Тоді

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right] = \left[ \sum_{k=1}^p (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \right] = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj} \right] = \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right] + \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj} \right] = AB + AC. \end{aligned}$$

Властивості (1.9) та (1.10) доводяться аналогічно.  $\square$

**Зauważення 1.6.** Розглянемо ще один важливий випадок множення матриць, а саме — множення на діагональні матриці. Якщо виконувати множення на діагональну матрицю зліва

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \dots & d_m a_{mn} \end{pmatrix},$$

то, як бачимо, кожен рядок другої матриці множиться на відповідний діагональний елемент першої матриці. Якщо ж множити на діагональну матрицю справа

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} d_1 & a_{12} d_2 & \dots & a_{1n} d_n \\ a_{21} d_1 & a_{22} d_2 & \dots & a_{2n} d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} d_1 & a_{m2} d_2 & \dots & a_{mn} d_n \end{pmatrix},$$

то кожен стовпчик першої матриці множиться на відповідний діагональний елемент другої матриці.

Множення матриці на скалярну матрицю з, наприклад, елементом  $d$  на головній діагоналі зводиться до домноження елементів заданої матриці на елемент  $d$  (причому неважливо, з якого боку відбувається це множення, важливо лише, щоб розміри матриць були узгоджені щодо можливості самого множення):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & \dots & da_{1n} \\ da_{21} & da_{22} & \dots & da_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ da_{m1} & da_{m2} & \dots & da_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= d \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Приклади 1.14.** 1. Множення на діагональні матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & -2 \cdot 3 & 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 5 \cdot 3 & 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 4 & 15 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 6 & 15 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. Множення на скалярні матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Одним із часткових випадків множення на скалярні матриці є множення на одиничну матрицю. Такі добутки повністю описує **основна властивість одиничної матриці**.

**Твердження 1.3 (основна властивість одиничної матриці).** Якщо  $E_n$  та  $E_m$  — одиничні матриці порядків  $n$  та  $m$  відповідно,  $A$  — довільна матриця розміру  $m \times n$ , то

$$A \cdot E_n = E_m \cdot A = A. \quad (1.11)$$

**Доведення.** Доведемо першу з рівностей (1.11). Оскільки  $A \cdot E_n = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \right]$  і  $\delta_{kj} = 1$  при  $k = j$  та  $\delta_{kj} = 0$  при  $k \neq j$ , то  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$ . Тому  $A \cdot E_n = [a_{ij}] = A$ .

Друга рівність із співвідношень (1.11) доводиться аналогічно.  $\square$

**Твердження 1.4.** Якщо  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , то  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Доведення.**  $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA)$ .  $\square$

## 1.4. Піднесення матриць до степеня. Поліноми від матриць

Нагадаємо, що для будь-якої квадратної матриці  $A$  визначено добуток  $A \cdot A$  матриці  $A$  на себе. Тому можна говорити про **цілий невід'ємний степінь  $k$  матриці  $A$** , визначаючи послідовно

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \dots, \quad A^k = A^{k-1} \cdot A, \quad \dots$$

(тут враховано, що  $A^0 = E$  у випадку, коли  $A \neq O$ ).

Наголосимо, що степені  $A^k$  та  $A^m$  однієї і тієї ж матриці  $A$  переставні (комутують), оскільки

$$\begin{aligned} A^k \cdot A^m &= (\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ разів}}) \cdot (\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ разів}}) = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k+m \text{ разів}} = \\ &= \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m+k \text{ разів}} = (\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ разів}}) \cdot (\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ разів}}) = A^m \cdot A^k, \end{aligned}$$

а тому правильні звичайні властивості степенів з натуральними показниками:

$$A^k \cdot A^m = A^m \cdot A^k = A^{k+m}, \quad (A^k)^m = A^{km}.$$

Наведемо означення, які пов'язані зі степенем матриці і характеризують певні її властивості.

**Означення 1.15.** Квадратна матриця  $A$  називається

- ідемпотентною, якщо  $A^2 = A$ ;
- інволютивною, якщо  $A^2 = E$ ;
- періодичною, якщо  $A^k = E$  при деякому натуральному  $k$  (найменше з таких чисел  $k$  називається періодом матриці  $A$ );
- нільпотентною, якщо  $A^k = O$  при деякому натуральному  $k$ ; найменше з таких чисел  $k$  називається показником нільпотентності матриці  $A$ .

**Приклад 1.15.** Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися, що  $A^2 = A$ ,  $B^2 = E$ ,  $C^3 = O$ ,  $D^2 = O$ , а тому матриця  $A$  – ідемпотентна,  $B$  – інволютивна (періодична з періодом 2),  $C$  – нільпотентна з показником нільпотентності 3,  $D$  – нільпотентна з показником нільпотентності 2.

За допомогою операцій піднесення до степеня, додавання матриць і множення матриць на числа можна отримувати поліноми від матриць (поняття полінома ми детально розглядалимо у розділі 8 «Поліноми від однієї змінної», а зараз зупинимося лише на одному застосуванні теорії поліномів).

**Означення 1.16.** Нехай  $f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$  – поліном степеня  $k$  від змінної  $x$  (див. співвідношення (8.9)),  $A$  – квадратна матриця  $n$ -го порядку. Вираз вигляду

$$f(A) = a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0 \underbrace{E}_{A^0}$$

називають *поліномом  $k$ -го степеня від матриці  $A$* .

Очевидно, що якщо  $A$  – квадратна матриця порядку  $n$ , то поліном  $f(A)$  також є квадратною матрицею порядку  $n$ .

**Приклад 1.16.** Знайдемо  $f(A)$ , якщо  $f(x) = x^2 - 5x + 4$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

Використовуючи означення полінома від матриці, отримаємо

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 5A + 4E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Якщо поліном  $f(A)$  є нульовою матрицею, тобто  $f(A) = O$ , то матриця  $A$  називається *коренем полінома  $f(x)$* , а поліном  $f(x)$  – *анулюючим для матриці  $A$* .

**Приклад 1.17.** Покажемо, що матриця  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$  є коренем полінома  $f(x) = x^2 + x - 14$ .

Дійсно,

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + A - 14E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 14 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, \end{aligned}$$

що й треба було показати.

**Зауваження 1.7.** Оскільки степені однієї і тієї ж матриці переставні, то поліноми від однієї і тієї ж матриці також переставні. Справді, якщо  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$  і  $A$  — довільна квадратна матриця, то

$$\begin{aligned} f(A) \cdot g(A) &= \left( \sum_{i=0}^k a_i A^i \right) \left( \sum_{j=0}^m b_j A^j \right) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m a_i b_j A^i A^j = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^k b_j a_i A^j A^i = \left( \sum_{j=0}^m b_j A^j \right) \left( \sum_{i=0}^k a_i A^i \right) = g(A) \cdot f(A), \end{aligned}$$

що й треба було показати.

## 1.5. Транспоновані матриці

**Означення 1.17.** *Транспонуванням* матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають її перетворення у матрицю

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

рядками якої є стовпчики матриці  $A$ , а стовпчиками — рядки матриці  $A$ ; при цьому матриця  $A^\top$  називається *транспонованою* до матриці  $A$ . Очевидно, що якщо елементи матриці  $A^\top$  позначити через  $a_{ij}^\top$ , то  $a_{ij}^\top = a_{ji}$  для всіх  $i \in \overline{1, n}$ ,  $j \in \overline{1, m}$ .

**Приклад 1.18.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 7 \\ 9 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^\top = (a \quad b \quad c).$$

**Означення 1.18.** Квадратна матриця  $A$  називається

- *симетричною*, якщо  $A^\top = A$ ;
- *кососиметричною*, якщо  $A^\top = -A$ .

У симетричній матриці елементи, які розташовані на симетричних стосовно головної діагоналі місцях, рівні між собою. У кососиметричній матриці елементи, розташовані симетрично стосовно головної діагоналі, протилежні, а на головній діагоналі розташовано нулі.

**Приклад 1.19.** Якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 9 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

то, як легко бачити, матриця  $A$  є симетричною ( $A^\top = A$ ), а матриця  $B$  — кососиметричною ( $B^\top = -B$ ).

**Твердження 1.5.** Для будь-яких матриць  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  і довільного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  правильні такі властивості:

$$(A^\top)^\top = A,$$

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top,$$

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Їхня правильність очевидно випливає з означення 1.17.

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

**Твердження 1.6.** Для довільних матриць  $A, B$  відповідних розмірів (тобто таких, що добуток  $AB$  можливий) виконується рівність

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

**Доведення.** Припустимо, що  $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$  і  $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ . Тоді  $AB \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  і

$$(AB)^\top \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

З іншого боку, оскільки  $B^\top \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$  та  $A^\top \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ , то добуток  $B^\top A^\top$  визначений і

$$B^\top A^\top \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Отож, матриці  $(AB)^\top$  і  $B^\top A^\top$  мають однакові розміри.

Залишається перевірити, чи їхні відповідні елементи дорівнюють один одному. Нехай  $(AB)^\top = [c_{ij}]$ . За означенням транспонування елемент  $c_{ij}$  дорівнює сумі добутків елементів  $j$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $i$ -го стовпця матриці  $B$ :

$$c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jp}b_{pi}.$$

З іншого боку, якщо  $B^\top A^\top = [d_{ij}]$ , то елемент  $d_{ij}$  дорівнює сумі добутків елементів  $i$ -го стовпця матриці  $B$  на відповідні елементи  $j$ -го рядка матриці  $A$ :

$$d_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{pi}a_{jp} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jp}b_{pi}.$$

Отже,  $c_{ij} = d_{ij}$ , що і треба було довести.  $\square$

**Зауваження 1.8.** Наголосимо, що, за твердженням 1.6, при транспонуванні добутку двох матриць спів множники транспонуються і міняються місцями. Для добутку трьох матриць маємо

$$(ABC)^\top = ((AB)C)^\top = C^\top(AB)^\top = C^\top(B^\top A^\top) = C^\top B^\top A^\top,$$

тобто

$$(ABC)^\top = C^\top B^\top A^\top.$$

Аналогічно для  $n$  спів множників добутку матриць правильною є рівність

$$(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n)^\top = A_n^\top A_{n-1}^\top \dots A_2^\top A_1^\top.$$

## 1.6. БЛОЧНІ МАТРИЦІ

Як відомо із означення 1.1 елементами матриць можуть бути елементи із множини будь-яких математичних об'єктів. До цього часу ми розглядали лише матриці, елементами яких були числа. Зразж же розглянемо матриці, елементами яких будуть матриці.

# на наступому

Розглянемо числову матрицю  $A$  розміру  $m \times n$ ,

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо її горизонтальними та вертикальними лініями на окрімі прямокутні **блоки**-матриці (*клітинки*)  $A_{ij}$  розміру  $m_i \times n_j$ , які занумеруємо природним чином (нумерація природним чином означає, що кожен блок  $A_{ij}$  наділятимемо двома індексами, перший з яких вказуватиме номер «блочного» рядка, а другий — номер «блочного» стовпця). Тоді виникає можливість розгляду вихідної матриці  $A$  як, так званої, **блочної** матриці  $[A_{ij}]$ , елементами якої будуть вказані блоки  $A_{ij}$ ,

## 1 Сестр

$$[A_{ij}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}.$$

У такому випадку кажуть, що блочна матриця  $[A_{ij}]$  отримана з матриці  $A$  *розділенням на блоки*.

**Приклад 1.20.** Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

можна розглядати як блочну матрицю

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & & a_{55} & a_{56} \end{array} \right),$$

елементами якої є такі блоки:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}.$$

Нехай, навпаки, задано блочну матрицю  $[A_{ij}]$ . Із елементів блоків-матриць  $A_{ij}$  можна природним чином утворити числову матрицю  $A$  розміру  $\sum_i m_i \times \sum_j n_j$ , де  $m_i \times n_j$  — розмір блоку  $A_{ij}$ . У такому випадку ми говоримо, що матриця  $A$  отримана із **блочної** матриці  $[A_{ij}]$  *об'єднанням блоків*.

Інколи для позначення блочної матриці використовують символ  $\square$  і записують «блочна матриця  $A^\square = [A_{ij}]$ ». Проте ми часто опускатимемо цей символ, оскільки, зазвичай, з контексту зрозуміло, про яку саме матрицю йде мова, і тому блочну матрицю позначатимемо тією ж буквою, що й числову.

**Означення 1.19.** Чисрова матриця  $A$  розміру  $m \times n$ , розділена горизонтальними і вертикальними лініями на блоки (клітини), називається **блочною** (*клітинною*) **матрицею**; елементами блочної матриці  $A$  є матриці  $A_{ij}$  розмірів  $m_i \times n_j$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ ), причому  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = m$  і  $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$ .

Операції з блочними матрицями виконуються за тими ж правилами, за якими вони здійснюються зі звичайними числовими матрицями, тільки в ролі елементів виступають блоки.

Якщо числові матриці  $A$  та  $B$  рівних розмірів однаково розбиті на блоки  $A = [A_{ij}]$  та  $B = [B_{ij}]$ , то сумаю блочних матриць  $A$  та  $B$  є блочна матриця  $C = [C_{ij}]$ , аналогічним чином розбита на блоки  $C_{ij}$ , причому для кожного блоку виконується рівність

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

(суми блочних елементів  $A_{ij} + B_{ij}$  обчислюються за правилом звичайного додавання числових матриць).

Якщо блочну матрицю  $A = [A_{ij}]$  помножити на число  $\lambda$ , то отримана в результаті блочна матриця  $\lambda A = [\lambda A_{ij}]$  матиме аналогічне матриці  $A$  розбиття на блоки, а блоками будуть матриці  $\lambda A_{ij}$  (при цьому блочні елементи  $\lambda A_{ij}$  обчислюються за правилом звичайного множення числа  $\lambda$  на числову матрицю  $A_{ij}$ ).

При транспонуванні блочної матриці транспонуванню підлягають її блокова структура і всі блоки; наприклад:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)^\top = \left( \begin{array}{c|c} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ \hline A_{12}^\top & A_{22}^\top \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{array} \right)^\top = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{11}^\top & A_{21}^\top & \cdots & A_{p1}^\top \\ \hline A_{12}^\top & A_{22}^\top & \cdots & A_{p2}^\top \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline A_{1q}^\top & A_{2q}^\top & \cdots & A_{pq}^\top \end{array} \right).$$

**Приклад 1.21.** Знайдемо  $C = A + B$ ,  $D = 5B$ ,  $B^\top$  для блочних матриць

$$A = \left( \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right).$$

Оскільки відповідні блоки матриць  $A$  та  $B$  мають одинакові розміри (блоки  $A_{11}$  і  $B_{11}$  мають розмір  $m_1 \times n_1 = 1 \times 2$ ; блоки  $A_{12}$  і  $B_{12} - m_1 \times n_2 = 1 \times 1$ ; блоки  $A_{21}$  і  $B_{21} - m_2 \times n_1 = 2 \times 2$ ; блоки  $A_{22}$  і  $B_{22} - m_2 \times n_2 = 2 \times 1$ ), то матриця

$$C = A + B = \left( \begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right)$$

буде мати такі ж за розмірами блоки. Для кожного блоку матриці  $C$  знаходимо:

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11} + B_{11} = (2 \ 3) + (1 \ 1) = (3 \ 4), & C_{12} &= A_{12} + B_{12} = (6) + (0) = (6), \\ C_{21} &= A_{21} + B_{21} = \left( \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array} \right), & C_{22} &= A_{22} + B_{22} = \left( \begin{array}{c} 7 \\ 8 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 9 \\ 9 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Як наслідок, шукана матриця  $C$  матиме вигляд:

$$C = \left( \begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline 7 & 5 \end{array} \right).$$

Матриця  $D = 5B$  матиме блоки тих же розмірів, що й матриця  $B$ :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 5B_{11} = 5 \cdot (1 \ 1) = (5 \ 5), & D_{12} &= 5B_{12} = 5 \cdot (0) = (0), \\ D_{21} &= 5B_{21} = 5 \cdot \left( \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 10 \\ 15 \end{array} \right), & D_{22} &= 5B_{22} = 5 \cdot \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Тому матриця  $D$  буде мати вигляд

$$D = \left( \begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ \hline 10 & 5 \\ \hline 15 & 0 \end{array} \right).$$

Використовуючи правило транспонування блочних матриць, отримуємо

$$B^\top = \begin{pmatrix} B_{11}^\top & B_{21}^\top \\ B_{12}^\top & B_{22}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер операцію множення блочних матриць. Блочні матриці  $A$  та  $B$  називають *узгодженими*, якщо розбиття матриці  $A = [A_{ik}]$  на блоки за стовпчиками збігається з розбиттям матриці  $B = [B_{kj}]$  на блоки за рядками, тобто блоки  $A_{ik}$  мають розміри  $m_i \times p_k$ , а блоки  $B_{kj}$  —  $p_k \times n_j$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ). В узгоджених блочних матрицях відповідні блоки  $A_{ik}$  і  $B_{kj}$  є узгодженими матрицями.

*Добутком*  $C = A \cdot B$  узгоджених блочних матриць  $A$  та  $B$  називається блочна матриця  $C = [C_{ij}]$ , блоки якої обчислюються за формулою

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{is} \cdot B_{sj}.$$

Це означає, що блочні матриці, які розділені на блоки належним чином, можна множити звичайним способом. Щоб отримати блок  $C_{ij}$  добутку, треба виділити  $i$ -й рядок блоків матриці  $A$  і  $j$ -й стовпець блоків матриці  $B$ . Потім знайти суму попарних добутків відповідних блоків: перший блок  $i$ -го рядка блоків множиться на перший блок  $j$ -го стовпця блоків, другий блок  $i$ -го рядка блоків множиться на другий блок  $j$ -го стовпця блоків і т.д., а результати множень додаються.

**Приклади 1.22.** 1. Знайдемо добуток  $C = AB$  блочних матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A$  розбита на блоки:  $A_{11}$  розміру  $m_1 \times p_1 = 1 \times 2$ ,  $A_{12} = m_1 \times p_2 = 1 \times 1$ ,  $A_{21} = m_2 \times p_1 = 2 \times 2$ ,  $A_{22} = m_2 \times p_2 = 2 \times 1$ . Матриця  $B$  розбита на блоки:  $B_{11}$  розміру  $p_1 \times n_1 = 2 \times 2$ ,  $B_{12} = p_1 \times n_2 = 2 \times 1$ ,  $B_{21} = p_2 \times n_1 = 1 \times 2$ ,  $B_{22} = p_2 \times n_2 = 1 \times 1$ . Як бачимо, блочні матриці  $A$  та  $B$  узгоджені. Матриця  $A$  розбита за стовпцями на два і один (рахуючи зліва), матриця  $B$  розбита за рядками на два і один (рахуючи зверху). Тому добуток  $AB$  визначений:

$$AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Для кожного блоку матриці  $C$  знаходимо:

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = (2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (4) \cdot (3 \ 0) = (8 \ 5) + (12 \ 0) = (20 \ 5),$$

$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = (2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (4) \cdot (1) = (6) + (4) = (10),$$

$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 0) = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 32 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця  $C$  матиме вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 26 & 7 & 13 \\ 32 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай матриці  $A$  та  $B$  є блочними матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

де

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (-1), \quad A_{22} = (0 \quad 3),$$

$$B_{11} = (-2 \quad 0), \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що блочні матриці  $A$  та  $B$  узгоджені, а тому їхній добуток визначений:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-2 \quad 0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} &= (-1) \cdot (-2 \quad 0) + (0 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 0) + (0 \quad 0) = (2 \quad 0), \end{aligned}$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Якщо розглянути блочні матриці  $A$  та  $B$  вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то блочну матрицю  $A$  не можна перемножити на блочну матрицю  $B$  (оскільки немає відповідності між числом стовпчиків кожного блоку матриці  $A$  і числом рядків відповідних блоків матриці  $B$ ).

**Зauważення 1.9.** 1. Операції додавання, множення на числа і добутки блочних матриць виконуються за тими самими правилами, що й для звичайних матриць, тільки замість елементів в формулах використовуються блоки.

2. Виконуючи операції над блочними матрицями, завжди можна їх розглядати як звичайні числові матриці, і здійснювати зазначені операції за звичайними правилами для числових матриць. При цьому результат операцій (числова матриця) буде один і той же. Дії з числовими матрицями **варто** замінити на дії з блочними у тому випадку, коли в результаті обчислень потрібно шукати не всю матрицю, а тільки її частину — блок.

Матриця, більшість елементів якої відмінні від нуля, називається *щільною* матрицею. Матриця, більшість елементів якої є нулями, називається *роздіженою* матрицею. Для розріджених матриць, переважна кількість елементів яких дорівнює нулю, корисно виділяти нульові блоки з метою зменшення обчислювальних операцій.

**Приклад 1.23.** Знайдемо добутки матриць четвертого порядку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Для цього розіб'ємо задані матриці на блоки розміру  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ O & D \end{pmatrix},$$

де  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ( $E$  – одинична,  $O$  – нульова матриця). Запишемо спочатку добутки блочних матриць

$$AB = \begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & E \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \cdot E + O \cdot O & E \cdot E + O \cdot D \\ C \cdot E + E \cdot O & C \cdot E + E \cdot D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ C & C + D \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, замість множення матриць  $A$  та  $B$  достатньо обчислити тільки один блок, додавши матриці  $C$  і  $D$ :

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Залишилось записати результат:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

В ролі прикладів застосування блочних матриць зупинимося на поняттях кронекерівських добутку та суми матриць, а також понятті прямої суми матриць.

**Означення 1.20.** Нехай задано матриці  $A = [a_{ij}]$  та  $B$  розмірів  $m \times n$  і  $p \times q$  відповідно. Числова матриця  $A \otimes B$  розміру  $mp \times nq$ , складена із блоків  $a_{ij}B$ ,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \cdots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot B & \cdots & a_{mn} \cdot B \end{pmatrix},$$

називається *правим кронекерівським добутком* або *правим добутком Кронекера* матриць  $A$  та  $B$  (Leopold Kronecker, 1823–1891). Аналогічно можна означити лівий кронекерівський добуток матриць.

**Означення 1.21.** Нехай  $A$  та  $B$  – квадратні матриці  $n$ -го і  $m$ -го порядків відповідно. *Кронекерівською сумою* (або *сумою Кронекера*)  $A \oplus B$  матриць  $A$  та  $B$  називається квадратна матриця порядку  $m \cdot n$  вигляду

$$A \oplus B = (E_m \otimes A) + (B \otimes E_n),$$

де  $E_m$ ,  $E_n$  – одиничні матриці порядків  $m$  та  $n$  відповідно.

**Приклад 1.24.** Знайдемо правий кронекерівський добуток  $A \otimes B$  і кронекерівську суму  $A \oplus C$  матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

За означенням знаходимо

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 9 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A \oplus C = (E \otimes A) + (C \otimes E) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Означення 1.22.** Прямою сумою (позначатимемо  $\oplus$ ) двох матриць  $A = [a_{ij}]$  розміру  $m \times n$  та  $B = [b_{ij}]$  розміру  $p \times q$  називається матриця  $A \oplus B$  розміру  $(m+p) \times (n+q)$ , яка дорівнює

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{array} \right).$$

Звернемо увагу, що кронекерівська сума і пряма suma матриць позначаються однаково  $\oplus$  (зрозуміти, про яку операцію йде мова, зазвичай можна з контексту).

**Приклад 1.25.** Знайдемо пряму суму матриць  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ .

За означенням прямої суми матриць маємо:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, прямою сумою матриць є спеціальний тип блочної матриці, зокрема пряма suma квадратних матриць — блочна діагональна матриця. Загалом, пряма suma  $n$  квадратних матриць визначається як

$$\text{Для підготовки} \quad \bigoplus_{i=1}^n A_i = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$

Із означення прямої суми матриць  $A$  та  $B$  легко бачити, що ця suma, взагалі кажучи, не володіє комутативною властивістю. Проте елементарно перевіряється виконання асоціативної властивості:

$$\text{до колоквіуму,} \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

За допомогою властивостей операцій над блочними матрицями легко перевіряються формули, які встановлюють зв'язок між операцією прямого сумування та операціями звичайного додавання і множення матриць:

$$\text{а ненадя} \quad (A_m \oplus A_n) + (B_m \oplus B_n) = (A_m + B_m) \oplus (A_n + B_n),$$

$$(A_m \oplus A_n) \cdot (B_m \oplus B_n) = A_m \cdot B_m \oplus A_n \cdot B_n$$

(у цих формулах  $A_m, B_m$  — довільні квадратні матриці порядку  $m$ , а  $A_n, B_n$  — довільні квадратні матриці порядку  $n$ ). Перевірку правильності цих формул пропонуємо читачу виконати самостійно.

## 1.7. Елементарні перетворення матриць. Східчасті матриці

**Означення 1.23.** Елементарними перетвореннями матриць називають перетворення таких трьох типів:

- 1) додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на один і той же скаляр;
- 2) множення всіх елементів одного рядка (стовпця) матриці на один і той же ненульовий скаляр;
- 3) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці.

Перетворення, обернені до елементарних, також є елементарними. Справді, якщо до  $i$ -го стовпця матриці додали  $j$ -й стовпець, помножений на число  $\lambda$  (перетворення першого типу), то для отримання вихідної матриці досить до  $i$ -го стовпця матриці додати  $j$ -й стовпець, помножений на протилежне число  $(-\lambda)$ . Якщо стовпець матриці помножили на число  $\lambda \neq 0$  (перетворення другого типу), то для отримання вихідної матриці треба цей же стовпець помножити на обернене число  $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ . Якщо в матриці поміняли місцями два стовпці (перетворення третього типу), то вихідну матрицю можна отримати, ще раз помінявши місцями ці стовпці.

Якщо матриця  $B$  отримана з матриці  $A$  деяким елементарним перетворенням, а з матриці  $B$  певним елементарним перетворенням отримано матрицю  $C$ , то кажуть, що матриця  $C$  отримана з матриці  $A$  послідовним виконанням відповідних елементарних перетворень.

**Означення 1.24.** Якщо матриця  $B$  отримана з матриці  $A$  деяким елементарним перетворенням, а з матриці  $B$  певним елементарним перетворенням отримано матрицю  $C$ , то кажуть, що матриця  $C$  отримана з матриці  $A$  послідовним виконанням відповідних елементарних перетворень. Матриці  $A$  та  $B$  називають *еквівалентними* (позначають  $A \sim B$ ), якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою декількох послідовно виконаних елементарних перетворень.

Очевидно, що поняття еквівалентності матриць володіє властивістю симетричності, тобто, якщо  $A \sim B$ , то  $B \sim A$ .

**Приклад 1.26.** Матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

еквівалентні, оскільки одна матриця отримується з іншої перестановою рядків. Analogічно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

оскільки другу матрицю отримують з першої матриці додаванням до першого рядка третього рядка, помноженого на число 2 (або першу матрицю отримують з другої додаванням до першого рядка відповідних елементів третього рядка, помножених на число  $(-2)$ ).

Елементарні перетворення застосовуються для певного спрощення матриць, що в подальшому буде використовуватися для розв'язання різноманітних задач. Покажемо, як за допомогою елементарних перетворень довільну матрицю можна звести до, так званого, східчастого вигляду.

**Означення 1.25.**  $(m \times n)$ -матриця вигляду

$$\left( \begin{array}{ccc|ccccccccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \quad (1.12)$$

називається *східчастою*, якщо вона задовільняє такі умови:

- 1) всі нульові рядки (якщо такі існують) розташовані нижче всіх ненульових рядків;
- 2) номери стовпчиків, у яких розміщені перші ненульові елементи рядків матриці, утворюють зростаючу послідовність, тобто, якщо  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  — перші ненульові елементи першого, другого,  $\dots$ ,  $r$ -го рядків ( $r \leq m$ ), то  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ .

Наголосимо на тому, що в східчастій матриці висота кожної «ходинки» становить лише один рядок.

**Приклад 1.27.** Східчастими матрицями є нульова матриця, одинична матриця, матриця-рядок, матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

а от матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

не є східчастими.

**Теорема 1.7 (про зведення до східчастого вигляду).** Будь-яку матрицю можна звести до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень лише її рядків.

**Доведення.** Якщо матриця нульова, то вона вже східчасти і доводити нічого. Тому нехай матриця  $A = [a_{ij}]$  є ненульовою матрицею розміру  $m \times n$  і нехай  $a_{1j_1}$  — її перший, з точністю до перестановки рядків, ненульовий елемент першого ненульового стовпчика, тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_3} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_3} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3j_1} & \cdots & a_{3j_2} & \cdots & a_{3j_3} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де  $a_{1j_1} \neq 0$ . Виконаемо над цією матрицею такі елементарні перетворення: до другого рядка додамо перший рядок, помножений на  $(-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}})$ ; до третього рядка також додамо перший, помножений на  $(-\frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}})$  і т.д., до  $m$ -го рядка додамо перший, помножений на  $(-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}})$ . В результаті отримаємо еквівалентну до  $A$  матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_3} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{2j_2} & \cdots & a'_{2j_3} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{3j_2} & \cdots & a'_{3j_3} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{mj_2} & \cdots & a'_{mj_3} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далі з точністю до перестановок рядків матриці  $A'$  припустимо, що елемент  $a'_{2j_2}$  є першим ненульовим елементом наступного після  $j_1$ -го стовпчика (не враховуючи елементи першого рядка). Над матрицею  $A'$  виконамо аналогічні наведеним вище елементарні перетворення з тією відмінністю, що використовуватимемо не перший, а другий рядок: помножимо другий рядок на  $(-\frac{a'_{3j_2}}{a'_{2j_2}})$  і додамо

до третього; далі помножимо другий рядок на  $(-\frac{a'_{4j_2}}{a'_{2j_2}})$  і додамо до четвертого і т.д., до  $m$ -го рядка додамо другий, помножений на  $(-\frac{a'_{mj_2}}{a'_{2j_2}})$ . Отримаємо еквівалентну до  $A'$  (отже, і до матриці  $A$ ) матрицю

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_3} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{2j_2} & \cdots & a'_{2j_3} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a''_{3j_3} & \cdots & a''_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a''_{mj_3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи аналогічні перетворення далі (а цей процес скінчений, оскільки матриця  $A$  скінченного розміру  $m \times n$ ), в підсумку отримаємо східчасту матрицю вигляду (1.12).  $\square$

Очевидним наслідком із теореми 1.7 є таке твердження.

**Теорема 1.8.** Довільна матриця еквівалентна деякій східчастій матриці.

Із доведення теореми 1.7 випливає алгоритм зведення матриці до східчастого вигляду, який, зазвичай, називають *методом Гауса зведення матриці до східчастого вигляду* (Johann Carolus Fridericus Gauss, 1777-1855). Отож, щоб звести матрицю до східчастого вигляду, треба виконати такі дії.

1. У першому стовпці вибрати елемент, відмінний від нуля (*провідний елемент*). Якщо рядок з провідним елементом (*провідний рядок*) не є перший, то переставити його на місце першого рядка (перетворення третього типу). Якщо в першому стовпці немає провідного елемента (тобто всі елементи першого стовпця дорівнюють нулю), то виключаємо цей стовпець з розгляду і продовжуємо пошук провідного елемента послідовно в інших стовпцях матриці. Перетворення закінчуються, якщо виключено всі стовпці або в решті матриці всі елементи нульові.

2. До кожного рядка, розташованого нижче провідного, додати провідний рядок, помножений на таке число, щоб всі елементи, які стоять під провідним елементом, виявилися рівними нулю (перетворення першого типу).

3. Виключивши з розгляду рядок і стовпець, на перетині яких стоїть провідний елемент, перейти до пункту 1 і застосувати всі описані дії до решти матриці.

**Приклади 1.28.** 1. Зведемо до східчастого вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

У першому стовпчику матриці  $A$  вибираємо провідний елемент  $a_{11} = 2 \neq 0$ . Наша мета на цьому етапі: за допомогою елементарних перетворень перетворити в нулі усі елементи першого стовпчика, які розміщені під провідним елементом. Для цього виконамо такі елементарні перетворення (першого типу): до другого рядка додамо перший рядок, помножений на  $(-2)$ ; до третього рядка додамо перший рядок. Отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок і перший стовпчик (на перетині яких розміщено перший провідний елемент) виключаємо з розгляду. Серед решти елементів другого стовпчика вибираємо наступний провідний елемент  $a_{22} = 3 \neq 0$ . Мета цього етапу: елементарними перетвореннями перетворити в нуль елементи другого стовпчика, які розташовані під провідним (насправді там лише один елемент). Для цього третій рядок домножимо на  $(-3)$  (елементарне перетворення другого типу) і додамо до нього другий рядок (елементарне перетворення першого типу):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Отже, задану матрицю  $A$  елементарними перетвореннями рядків ми звели до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Зведемо до східчастого вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перший стовпець матриці  $A$  — нульовий. Виключаємо його з розгляду і досліджуємо решту (останні 5 стовпців). Обираємо в ролі провідного елемента  $a_{12} = 1$ . Додаємо до другого рядка перший, помножений на

( $-1$ ); до третього рядка — перший, помножений на ( $-2$ ); до четвертого рядка — перший рядок, помножений на ( $-4$ ). Ці перетворення «обнуляють» всі елементи другого стовпця, розташовані нижче провідного елемента:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця не має східчастого вигляду, оскільки одна із сходинок має висоту в два рядки, а тому продовжуємо перетворення. Перший рядок і другий стовпець (на перетині яких розташовано перший провідний елемент  $a_{12} = 1$ ) виключаємо з розгляду. Оскільки перший стовпець решти матриці нульовий, виключаємо і його. Тепер решта матриці — це матриця (розміру  $3 \times 3$ ), утворена елементами, розташованими в останніх трьох рядках і трьох стовпцях отриманої матриці. В ролі провідного елемента вибираємо  $a_{24} = 1$ . Додавши до третього рядка другий, отримаємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок і четвертий стовпець з провідним елементом  $a_{24} = 1$  виключаємо з розгляду. В ролі нового провідного елемента беремо елемент  $a_{35} = 2$ . Від четвертого рядка віднімаємо третій (до четвертого рядка додаємо третій, помножений на ( $-1$ )):

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третій рядок і п'ятий стовпець, на перетині яких розташовано провідний елемент  $a_{35} = 2$ , виключаємо з розгляду. Оскільки в решти матриці всі елементи (тобто один елемент  $a_{46}$ ) нульові, перетворення завершено і, отже, задану матрицю  $A$  зведено до східчастого вигляду.

Якщо під час зведення матриці до східчастого вигляду використовувати елементарні перетворення не лише рядків, а й стовпчиків (за потреби), то довільну матрицю можна звести до, так званого, строго східчастого вигляду.

**Означення 1.26.** Строго східчastою матрицею називається східчаста  $(m \times n)$ -матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

в якій елементи  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  — ненульові ( $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ ), а елементи, позначені  $*$ , — довільні.

**Теорема 1.9** (про зведення до строго східчастого вигляду). За допомогою елементарних перетворень рядків і стовпчиків довільну матрицю можна звести до строго східчастого вигляду.

**Доведення.** З теореми 1.7 випливає, що довільну ненульову матрицю розміру  $m \times n$  за допомогою елементарних перетворень рядків можна звести до східчастого вигляду (1.12). Над стовпчиками цієї східчастої матриці виконамо такі елементарні перетворення:  $j_1$ -ий стовпчик поміняємо місцями з першим,  $j_2$ -ий стовпчик — з другим, і т.д.,  $j_r$ -ий стовпчик поміняємо місцями з  $r$ -им стовпчиком. Очевидно, що у результаті цих перетворень отримаємо строго східчасту матрицю вигляду (1.13).  $\square$

**Приклади 1.29.** 1. Як показано у прикладі 1.28.1, матриця

$$\text{ЛІНІЙНА} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

еквівалентна строго східчастій матриці

$$\text{АЛГЕБРА} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

2. У прикладі 1.28.2 доведено, що

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Як бачимо, матриця  $B$  не є строго східчастою. Для того, щоб звести її (а, отже, й матрицю  $A$ ) до строго східчастого вигляду, виконаємо такі елементарні перетворення стовпців:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(перше елементарне перетворення — поміняли місця перші два стовпчики, друге елементарне перетворення — новоутворений другий стовпчик поміняли місцями з четвертим, третє елементарне перетворення — поміняли місцями п'ятий і третій стовпчики).

Розглянемо модифікацію пункту 2 методу Гауса. Провідний елемент, обраний в пункті 1 методу Гауса, визначає провідний рядок і провідний стовпець матриці (проводний елемент знаходиться на їх перетині). Додаючи провідний рядок, помножений на відповідні числа, до інших рядків матриці (пункт 2 методу Гауса), робимо рівними нулю всі елементи провідного стовпця, за винятком провідного елемента. Потім, додаючи отриманий провідний стовпець, помножений на відповідні числа, до решти стовпців матриці, робимо рівними нулю всі елементи провідного рядка, за винятком провідного елемента. При цьому отримуємо провідні рядок і стовпець, всі елементи яких дорівнюють нулю, за винятком провідного елемента. Виключивши з розгляду цей рядок і цей стовпець, на перетині яких стоїть провідний елемент, виконаємо всі описані вище дії до решти матриці. Модифікований таким чином метод Гауса називається *методом Гаусса-Жордана* (Wilhelm Jordan, 1841-1899). За допомогою методу Гаусса-Жордана довільну матрицю розміру  $m \times n$  можна звести до строго східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \quad \text{списування} \quad (1.14)$$

Більше цього, оскільки в матриці (1.14) елементи  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  — ненульові, то елементарні перетворення можна продовжити: поділимо перший рядок на елемент  $a_{11}$ , другий — на  $a_{22}$ , і т.д.,  $r$ -ий

рядок поділимо на  $a_{rr}$ . В підсумку отримаємо матрицю вигляду

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

(лівий верхній кут матриці є одиничною матрицею порядку  $r$  ( $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ ), а інші елементи дорівнюють нулю).

Вищепеределені міркування доводять правильність такої теореми.

**Теорема 1.10.** Будь-яку матрицю за допомогою елементарних перетворень рядків та стовпців можна звести до вигляду (1.15).

**Приклади 1.30. 1.** Зведемо до вигляду (1.15) матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

В ролі провідного елемента візьмемо елемент  $a_{11} = 1$ . До другого рядка додамо перший, помножений на  $(-2)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

До другого стовпця додамо перший стовпець, помножений на  $(-2)$ , а до третього — перший, помножений на  $(-3)$ :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо всі елементи останнього стовпця на  $(-1)$  і переставимо його на місце другого:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вихідна матриця  $A$  за допомогою елементарних перетворень рядків та стовпчиків зведена до вигляду (1.15).

**2.** Елементарними перетвореннями рядків і стовпців зведемо до вигляду (1.15) матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Як показано у прикладах 1.28.2 і 1.29.2,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Над стовпцями матриці  $C$  виконаємо такі елементарні перетворення: від другого, третього, п'ятого та шостого стовпців віднімемо перший,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

до третього стовпця додамо другий, помножений на  $(-2)$ , а до шостого — другий, помножений на  $(-1)$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

третій стовпчик поділимо на 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ми звели вихідну матрицю  $A$  до вигляду (1.15),

$$1 \text{ семестр} \quad A \sim \begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

**Зауваження 1.10.** Наголосимо, що до східчастого вигляду (1.12) довільну матрицю можна звести за допомогою елементарних перетворень лише її рядків (не використовуючи перетворення її стовпців!), а щоб звести до строго східчастого вигляду (1.13) або до вигляду (1.15) потрібно використовувати перетворення як рядків, так і стовпців матриці.

## 1.8. Елементарні матриці

Якщо елементарні перетворення застосувати до одиничної матриці, то отримаємо так звані елементарні матриці.

**Означення 1.27.** Елементарними матрицями називають квадратні матриці таких типів:

- 1) матриці, відмінні від одиничної наявністю на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця ( $i \neq j$ ) деякого ненульового елемента  $\lambda$ ;
- 2) матриці, відмінні від одиничної тим, що замість одиниці в  $i$ -му рядку міститься ненульовий елемент  $\lambda$ ;
- 3) матриці, які отримують з одиничної перестановою місцями  $i$ -го та  $j$ -го рядків ( $i \neq j$ ).

Між елементарними перетвореннями та елементарними матрицями існує тісний взаємозв'язок: елементарні перетворення можна зобразити як процес множення заданої матриці на елементарні матриці.

1) Додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число. Нехай задано матрицю  $A$  розміру  $t \times n$ . Щоб додати до одного рядка ( $i$ -го) відповідні елементи іншого рядка ( $j$ -го), помножені на одне і те же число  $\lambda$ , досить помножити матрицю  $A$  зліва на елементарну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ i \\ \cdot \\ j \\ m \end{matrix} \quad (1.16)$$

Ця квадратна матриця  $m$ -го порядку є елементарною матрицею першого типу і отримана з одиничної матриці  $m$ -го порядку додаванням до елементів  $i$ -го рядка відповідних елементів  $j$ -го рядка, помножених на число  $\lambda$ .

Щоб додати до одного стовпця ( $i$ -го) відповідні елементи іншого стовпця ( $j$ -го), помножені на одне і те ж число  $\lambda$ , досить помножити матрицю  $A$  справа на елементарну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Ця квадратна матриця  $n$ -го порядку є елементарною матрицею першого типу і отримана з одиничної матриці  $n$ -го порядку в результаті додавання до  $i$ -го стовпця відповідних елементів  $j$ -го стовпця, помножених на число  $\lambda$ .

**Приклад 1.31.** Додавання до першого рядка матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  її третього рядка, помноженого на число 2, (елементарне перетворення першого типу) рівносильне домноженню цієї матриці зліва на елементарну матрицю першого типу  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , яка отримується з одиничної матриці третього порядку додаванням її до першого рядка третього рядка, помноженого на 2.

Справді,

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7 \cdot 2 & 2 + 8 \cdot 2 & 3 + 9 \cdot 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2) Множення всіх елементів одного рядка (стовпця) матриці на одне і те ж число, відмінне від нуля. Щоб помножити всі елементи  $i$ -го рядка ( $m \times n$ )-матриці  $A$  на одне і те ж число  $\lambda$ , відмінне від нуля, досить помножити задану матрицю  $A$  зліва на елементарну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_i^1. \quad (1.18)$$

Ця квадратна матриця  $m$ -го порядку є елементарною матрицею другого типу і отримана з одиничної матриці  $m$ -го порядку множенням  $i$ -го рядка на число  $\lambda$ .

Для множення всіх елементів одного стовпця ( $i$ -го) заданої матриці  $A$  на одне і те ж ненульове число  $\lambda$  досить помножити матрицю  $A$  справа на елементарну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_i^n. \quad (1.19)$$

Ця квадратна матриця  $n$ -го порядку є елементарною матрицею другого типу і отримана з одиничної матриці  $n$ -го порядку множенням  $i$ -го стовпця на число  $\lambda$ .

**Приклад 1.32.** Покажемо, що множення матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  зліва на матрицю  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  призводить до множення всіх елементів 1-го рядка матриці  $A$  на число 2; множення матриці  $A$  справа на матрицю  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  призводить до множення 3-го стовпця матриці  $A$  на матрицю на число 3.

Як бачимо, задана матриця  $A$  має розміри  $2 \times 3$ ; матриця  $P$  отримана з одиничної матриці другого порядку множенням першого рядка на число 2; матриця  $Q$  отримана з одиничної матриці третього порядку множенням 3-го стовпця на число 3. Знаходимо добутки:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}.$$

3) Перестановка двох рядків (стовпців) матриці. Нехай задано матрицю  $A$  розміру  $m \times n$ . Щоб поміняти місцями два рядки ( $i$ -ї та  $j$ -ї) заданої матриці  $A$ , досить помножити її зліва на елементарну матрицю  $m$ -го порядку вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}^{\text{1 } i \ j \ m} \quad (1.20)$$

Ця матриця є елементарною матрицею третього типу і отримана із одиничної матриці  $m$ -го порядку за допомогою перестановки  $i$ -го та  $j$ -го рядків.

Для перестановки двох стовпців ( $i$ -го та  $j$ -го) заданої матриці досить помножити її справа на елементарну матрицю  $n$ -го порядку вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}^{\text{1 } i \ j \ n} \quad (1.21)$$

Ця матриця є елементарною матрицею третього типу і отримана з одиничної матриці  $n$ -го порядку за допомогою перестановки  $i$ -го та  $j$ -го стовпців.

**Приклад 1.33.** Покажемо, що множення матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$  зліва на матрицю  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  призводить до перестановки 2-го і 3-го рядків матриці  $A$ , а множення заданої матриці  $A$  справа на матрицю  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  призводить до перестановки 2-го і 4-го стовпців.

Матриця  $P$  отримана з одиничної матриці третього порядку за допомогою перестановки 2-го і 3-го рядків. Знаходимо добуток матриці  $A$  на матрицю  $P$  зліва:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи результат з вихідною матрицею  $A$ , бачимо, що 2-й і 3-й рядки помінялися місцями.

Матриця  $Q$  отримана з одиничної матриці четвертого порядку за допомогою перестановки 2-го і 4-го стовпців. Помножимо матрицю  $A$  справа на  $Q$ :

$$A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи результат з вихідною матрицею  $A$ , бачимо, що 2-й і 4-й стовпці помінялися місцями.

З вищепереданих міркувань випливає правильність такого твердження.

**Твердження 1.11.** (1) Будь-яке елементарне перетворення, виконане над рядками матриці, рівносильне домноженню цієї матриці на відповідну елементарну матрицю зліва.

(2) Будь-яке елементарне перетворення, виконане над стовпчиками матриці, рівносильне домноженню цієї матриці на відповідну елементарну матрицю справа.

З твердження 1.11 випливає, що зведення матриці до вигляду (1.12) методом Гауса (теорема 1.7) або до вигляду (1.15) методом Гаусса-Жордана (теорема 1.10) полягає у послідовному домноженні заданої матриці на відповідні елементарні матриці. Таким чином, вказані теореми можна переформулювати так.

**Теорема 1.12.** Для будь-якої матриці  $A$  існує набір таких елементарних матриць  $P_1, P_2, \dots, P_s$  вигляду (1.16), (1.18), (1.20), що матриця  $P_s \cdots P_2 P_1 A$  матиме східчастий вигляд (1.12). Зокрема, якщо матриця  $A$  — квадратна, то матриця  $P_s \cdots P_2 P_1 A$  буде верхньою трикутною.

**Теорема 1.13.** Для довільної матриці  $A$  існують такі елементарні матриці  $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  вигляду (1.16) - (1.21), що матриця  $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$  матиме вигляд (1.15).

**Приклади 1.34.** 1. Зведемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

до східчастого вигляду множенням на відповідні елементарні матриці.

В прикладі 1.30 ця матриця за допомогою елементарних перетворень була зведена до східчастого вигляду, причому перетворення виконувалися тільки над її рядками. Запишемо послідовність перетворень, зображені їх як множення матриці  $A$  зліва на елементарні матриці. Перше перетворення — додавання до другого рядка першого, помноженого на  $(-1)$ , — відповідає множенню матриці  $A$  зліва на матрицю

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справді,

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Друге перетворення — додавання до третього рядка першого, помноженого на  $(-2)$ , — відповідає множенню матриці  $P_1 A$  зліва на матрицю

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи множення, отримаємо

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Третє перетворення — додавання до четвертого рядка першого, помноженого на  $(-4)$ , — відповідає множенню матриці  $P_2 P_1 A$  зліва на матрицю

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно,

$$P_3 P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі були здійсненні такі перетворення: до третього рядка додавали другий, потім помножили третій рядок на  $\frac{1}{2}$  і, насамкінець, до четвертого рядка додали третій, помножений на  $(-2)$ . Цим перетворенням відповідає множення матриці  $P_3 P_2 P_1 A$  зліва на матриці

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справді, виконуючи множення, отримуємо східчастий вигляд

$$P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Зведемо матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  до вигляду (1.15) множенням на відповідні елементарні матриці.

В прикладі 1.30.1 ця матриця за допомогою елементарних перетворень була зведена до вигляду (1.15). Запишемо послідовність перетворень, зображаючи їх як множення на відповідні елементарні матриці. На першому кроці ми до другого рядка додали перший, помножений на  $(-2)$ . Цьому перетворенню відповідає множення матриці  $A$  зліва на елементарну матрицю першого типу  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Потім до другого стовпчика ми додали перший, помножений на  $(-2)$ , а до третього — перший, помножений на  $(-3)$ . Ці перетворення відповідають послідовному множенню заданої матриці справа на матриці

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $Q_1$  отримана з одиничної матриці третього порядку додаванням до елементів 2-го стовпця відповідних елементів 1-го стовпця, помножених на число  $(-2)$ . Матриця  $Q_2$  отримана з одиничної матриці третього порядку додаванням до елементів 3-го стовпця відповідних елементів 1-го стовпця, помножених на число  $(-3)$ .

Знаходимо добутки

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Останній крок — множення останнього стовпчика на  $(-1)$  і заміна його місцями із другим. Цим перетворенням відповідає послідовне множення справа на матриці

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $Q_3$  отримана з одиничної матриці третього порядку множенням елементів 3-го стовпця на число  $(-1)$ . Матриця  $Q_4$  отримана з одиничної матриці третього порядку перестановкою 2-го і 3-го стовпців. Знаходимо добутки

$$P_1AQ_1Q_2Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1AQ_1Q_2Q_3Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, вихідна матриця  $A$  множенням на відповідні елементарні матриці зведена до вигляду (1.15).

Якщо множину усіх матриць  $n$ -го порядку, які розкладаються в добуток елементарних матриць 1-3 типу, позначити через  $\text{GE}_n$ , то теорему 1.13 можна сформулювати так.

**Теорема 1.14.** Для будь-якої матриці  $A$  розміру  $m \times n$  існують такі матриці  $P \in \text{GE}_m$  і  $Q \in \text{GE}_n$ , що матриця  $D = PAQ$  має вигляд (1.15), тобто

$$D = PAQ = \left( \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right), \quad (1.22)$$

де  $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ . Матриці  $P$  і  $Q$  будемо називати елементарними перетворювальними матрицями.

Для зведення матриці  $A$  до вигляду (1.22) і знаходження елементарних перетворювальних матриць  $P$  і  $Q$  можна скористатись таким алгоритмом.

1. Приписавши до матриці  $A$  (розміру  $m \times n$ ) праворуч і знизу одиничні матриці  $E_m$  і  $E_n$  відповідно, утворити блочну матрицю

$$\left( \begin{array}{c|c} A & E_m \\ \hline E_n & \end{array} \right). \quad (1.23)$$

Елементи правого нижнього блоку цієї матриці можна вважати рівними нулю або не вказувати взагалі, оскільки вони не братимуть участь в подальших перетвореннях.

2. За допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців блочної матриці звести її лівий верхній блок  $A$  до вигляду (1.22). При цьому блочна матриця набуде вигляду

$$\left( \begin{array}{c|c} D & P \\ \hline Q & \end{array} \right), \quad (1.24)$$

де  $D$  — матриця вигляду (1.22), а  $P$  і  $Q$  — шукані перетворювальні матриці, пов'язані з матрицею  $A$  рівністю (1.22).

Справді, елементарні перетворення (зазначені в пункті 2 алгоритму) стосуються перших  $m$  рядків і перших  $n$  стовпчиків блочної матриці (1.23). Цим перетворенням відповідає множення матриці (1.23) зліва на матрицю  $\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$  і справа на матрицю  $\begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_m \end{pmatrix}$ , де символом  $O$  позначені нульові матриці відповідних розмірів. Виконуючи множення блочних матриць, отримуємо

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cdot A & P \\ E_n & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cdot A \cdot Q & P \\ Q & O \end{pmatrix}.$$

Ця матриця збігається з (1.24), якщо  $D = PAQ$ . Іншими словами, якщо в результаті пункту 2 алгоритму лівий верхній блок  $A$  матриці (1.23) зведенено до вигляду  $D$ , то в інших блоках матриці (1.24) отримуємо шукані перетворювальні матриці  $P$  і  $Q$ .

**Приклад 1.35.** Зведемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

до вигляду (1.22) і знайдемо відповідні елементарні перетворювальні матриці  $P$  і  $Q$ .

Припишемо до матриці  $A$  праворуч і знизу одиничні матриці відповідних розмірів

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} A & E_3 \\ \hline E_4 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Візьмемо в ролі провідного елемента  $a_{11} = 1 \neq 0$ . До другого рядка додамо перший:

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

До другого стовпця додамо перший, до третього — перший, помножений на  $(-2)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Тепер візьмемо в ролі провідного елемента  $a_{22} = 1 \neq 0$ . До третього рядка додамо другий, помножений на  $(-1)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

До третього стовпця додамо другий, а до четвертого — другий, помножений на  $(-1)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} D & P \\ Q & \end{array} \right).$$

В результаті перетворень на місці вихідної матриці  $A$  отримано матрицю

$$D = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} E_2 & O \\ O & O \end{array} \right)$$

вигляду (1.22), а на місці одиничних матриць — елементарні перетворювальні матриці

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо рівність  $D = PAQ$ , обчисливши добуток

$$\begin{aligned} P \cdot A \cdot Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.11.** Елементарні перетворювальні матриці  $P$  і  $Q$  із теореми 1.14 знаходяться неоднозначно, тому що залежать від обраної послідовності перетворень.

**Зауваження 1.12.** Якщо потрібно знайти лише одну з елементарних перетворювальних матриць, наприклад,  $P$ , то досить застосувати розглянутий вище алгоритм до матриці  $(A | E_m)$ . Виконуючи елементарні перетворення над рядками матриці  $(A | E_m)$  і над першими її стовпцями, які входять в лівий блок, отримаємо матрицю  $(D | P)$ , де  $D$  — матриця вигляду (1.22), а  $P$  — шукана матриця.

Якщо потрібно знайти лише матрицю  $Q$ , то виконуємо перетворення матриці  $\left( \begin{array}{c|c} A & E_n \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{c|c} D & Q \end{array} \right)$ .

**Зауваження 1.13.** Зважаючи на зауваження 1.12, теорему 1.12 можна сформулювати так: *для будь-якої матриці  $A$  розміру  $t \times n$  існує така матриця  $P \in GE_m$ , що матриця  $PA$  має східчастий вигляд.*

Для знаходження матриці  $P$  потрібно скласти блочну матрицю  $(A | E_m)$ , потім за допомогою елементарних перетворень, які виконуються тільки над рядками матриці  $(A | E_m)$ , звести її лівий блок  $A$  до східчастого вигляду. При цьому блочна матриця перетвориться до вигляду  $(D | P)$ , де  $D$  — матриця східчастого вигляду (1.12), а  $P$  — шукана елементарна матриця.

**Приклад 1.36.** Знайдемо елементарну перетворювальну матрицю  $P$ , яка зводить матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

до східчастого вигляду.

Припишемо до матриці  $A$  справа одиничну матрицю 3-го порядку

$$(A | E_3) = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Елементарними перетвореннями рядків блочної матриці зводимо її лівий блок до східчастого вигляду. Для цього спочатку до другого рядка додаємо перший, а потім до третього рядка додаємо другий, помножений на  $(-1)$ :

$$(A | E_3) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = (D | P).$$

Лівий блок  $D$  матриці  $(D | P)$  має східчастий вигляд, а правий блок — шукана матриця  $P$ . Перевіримо рівність  $D = PA$ , обчисливши добуток

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, матриця  $PA$  справді має східчастий вигляд.

**Зauważення 1.14.** Більшість вищеперелічених фактів та міркувань про зведення матриць до східчастого вигляду стосуються матриць над полями (числових матриць). Зведення ж матриць до східчастого вигляду або до вигляду (1.14) над різними класами кілець (див. розділ 6.9 «Кільця») є складною науковою задачею, розв'язанню якої присвячена значна кількість наукових робіт.

# Для підготовки

# до колоквіуму,

## а не для

## списування

## на ньому