

## Розділ 7.

# Домашнє завдання до теми «Поле комплексних чисел»

### Комплексні числа у алгебричній формі

7.1. Обчислити:

е)  $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$ ;    з)  $(3+i)^3 - (3-i)^3$ .

7.2. Обчислити визначники 3-го порядку:

а) 
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}.$$

7.3. Обчислити  $i^{-57}$ , де  $n$  — ціле число.

7.4. Розв'язати систему рівнянь:

а) 
$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}$$

7.5. Знайти дійсні числа  $x$  та  $y$ , що задовольняють рівняння:

а)  $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$ ;    б)  $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$ .

7.6. Довести, що  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$  для довільних комплексних чисел  $z_1, z_2$ .

7.7. Довести, що добуток двох комплексних чисел є дійсним числом тоді і тільки тоді, коли одне з них відрізняється від спряженого до другого дійсним множником.

7.8. Знайти всі комплексні числа, які спряжені своєму квадрату.

7.9. Розв'язати рівняння:

а)  $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ .

7.10. Записати у тригонометричній формі такі числа:

г)  $2i$ ;    і)  $-1 + i\sqrt{3}$ .

7.11. Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа, що задовольняють нерівностям:

в)  $|z - 1 - i| < 1$ ;    г)  $2 < |z| < 3$ .

7.12. Розв'язати рівняння:

а)  $|z| + z = 8 + 4i$ .

7.13. Обчислити:

в)  $(\sqrt{3} + i)^{30}$ ;    д)  $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$ .

7.14. Які з відображень груп  $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  є гомоморфізмами, якщо:

б)  $\varphi(z) = 2|z|$ ;    г)  $\varphi(z) = 1 + |z|$ ?

7.15. Знайти порядок елемента групи:

а)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$ .

7.16. Виразити через  $\sin x$  і  $\cos x$  функції:

а)  $\sin 4x$ ;    б)  $\cos 4x$ .

7.17. Нехай  $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ . Довести:

а)  $e^{2\pi i} = 1$ ;    б)  $e^{\pi i} = -1$ .

7.18. Чи правильна рівність  $\sqrt[k]{z^k} = \sqrt[k]{z}$  ( $k > 1$ )?

7.19. Обчислити:

д)  $\sqrt[4]{-4}$ ;    и)  $\sqrt[3]{2-2i}$ ;    к)  $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$ .

7.20. Знайти корені з одиниці степеня:

б) 3;    в) 4.

7.21. Знайти первісні корені з одиниці степеня:

б) 3;    в) 4.

7.22. Знайти суму всіх коренів  $n$ -го степеня з одиниці.