

## Розділ 6.

# Домашнє завдання до теми «Алгебричні структури»

**6.1.** Довести, що множення матриць є алгебричною бінарною операцією на множині

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

**6.2.** Чи є скалярне множення векторів алгебричною операцією на множині  $\mathbb{R}^3$ ? А векторне?

**6.3.** Перевірити на асоціативність і комутативність операцію  $\odot$ , визначену на множині  $M^2$  правилом  $(x, y) \odot (z, t) = (x, t)$ , де  $x, y, z, t \in M$ .

**6.4.** Чи існує нейтральний елемент у множині  $\mathbb{Q}^*$  стосовно алгебричної операції, заданої правилом  $a \square b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ?

**6.5.** Довести, що множина натуральних чисел не утворює групу ні стосовно операції додавання, ні стосовно операції множення.

**6.6.** Які з вказаних числових множин з операціями є групами:

- а)  $(\mathbb{R}, +)$ ;    б)  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ;    в)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

**6.7.** Які з вказаних множин матриць утворюють групу стосовно заданої операції:

- а)  $(M_n(\mathbb{Z}), +)$ ;    б)  $(M_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ .

**6.8.** Доведіть, що:

- а) множина  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  з операцією  $x * y = x + y + xy$ ;
- б) множина  $\mathbb{Z}$  з операцією  $m * n = m + n + 2007$

утворюють групи.

**6.9.** Довести, що в групі для кожного елемента існує єдиний обернений.

**6.10.** Знайти порядок елемента групи:

- а)  $-1 \in (\{-1, 1\}, \cdot)$ ;
- в)  $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

**6.11.** Довести: якщо  $a, b$  — довільні елементи групи  $G$ , то

- а) елементи  $ab$  і  $ba$  мають одинаковий порядок;
- б) елементи  $a$  і  $bab^{-1}$  мають одинаковий порядок.

**6.12.** Перемножити підстановки:

- а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;

**б)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

**6.13.** Записати перестановки у вигляді добутків незалежних циклів і за декрементом визначити їхню парність:

**а)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;    **б)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**6.14.** Записати підстановки у вигляді таблиць:

**а)**  $(1 \ 5)(2 \ 3 \ 4)$ ;    **б)**  $(1 \ 3)(2 \ 5)(4)$ .

**6.15.** Знайти  $\sigma^{150}$ , якщо  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ .

**6.16.** Знайти всі твірні елементи адитивної групи цілих чисел.

**6.17.** Які серед груп

**а)**  $\mathbb{Z}_{10}^*$ ;    **б)**  $\mathbb{Z}_{11}^*$

є циклічними?

**6.18.** Знайти усі (з точністю до ізоморфізму) групи порядку:

**а)** 3;    **б)** 4;    **в)** 6.

Написати таблиці множення цих груп і зобразити ці групи у вигляді груп підстановок.

**6.19.** Довести, що:

**а)** група додатних дійсних чисел щодо множення ізоморфна групі всіх дійсних чисел щодо додавання;

**б)** група додатних раціональних чисел щодо множення не ізоморфна групі всіх раціональних чисел щодо додавання.

**6.20.** Опишіть класи суміжності групи  $G$  за підгрупою  $H$ , якщо:

**а)**  $G = \mathbb{R}$ ,  $H = \mathbb{Z}$ ;  
**г)**  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ .

**6.21.** Знайти факторгрупи:

- а)** адитивної групи цілих чисел за підгрупою чисел, кратних заданому натуральному числу  $n$ ;  
**б)** адитивної групи цілих чисел, кратних 3, за підгрупою чисел, кратних 15.

**6.22.** Які з наступних числових множин утворюють кільце стосовно звичайних операцій додавання та множення:

- а)** множина  $\mathbb{Z}$  цілих чисел;  
**б)** множина  $n\mathbb{Z}$  — цілі числа, кратні заданому натуральному числу  $n > 1$ ;  
**в)** множина невід'ємних цілих чисел  
**г)** множина  $\mathbb{Q}$  раціональних чисел.