

Розділ 4.

Домашнє завдання до теми

«Арифметичний векторний простір»

4.1. Довести, що для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ та будь-яких чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ виконуються такі співвідношення:

г) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$ д) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$

4.2. Довести, що:

в) якщо вектори a_1, \dots, a_k лінійно незалежні і вектор a_0 не можна через них виразити, то система a_0, a_1, \dots, a_k лінійно незалежна.

4.3. Довести, що:

в) будь-яка система векторів, яка містить хоча б два пропорційні (або рівні) вектори, лінійно залежна.

4.4. З'ясувати, чи є такі системи векторів лінійно незалежні:

б) $\vec{a}_1 = (4, -2, 6), \quad \vec{a}_2 = (6, -3, 9);$
г) $\vec{a}_1 = (5, 4, 3), \quad \vec{a}_2 = (3, 3, 2), \quad \vec{a}_3 = (8, 1, 3).$

4.5. Знайти всі значення λ , при яких вектор \vec{b} лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, якщо:

б) $\vec{a}_1 = (4, 4, 3), \quad \vec{a}_2 = (7, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (4, 1, 6), \quad \vec{b} = (5, 9, \lambda).$

4.6. Чи є підпростором відповідного векторного простору кожна з таких сукупностей векторів:

- г) всі вектори геометричної площини, початки і кінці яких лежать на заданій прямій;
г') всі вектори тривимірного геометричного простору, кінці яких не лежать на заданій прямій?

4.7. Знайти яку-небудь базу системи векторів і виразити через цю базу інші вектори системи:

$\vec{a}_1 = (1, 2, 3, -4), \quad \vec{a}_2 = (2, 3, -4, 1), \quad \vec{a}_3 = (2, -5, 8, -3), \quad \vec{a}_4 = (5, 26, -9, -12), \quad \vec{a}_5 = (3, -4, 1, 2).$

4.8. Довести, що якщо сума вимірностей підпросторів простору \mathbb{R}^n більше n , то ці підпростори мають спільний ненульовий вектор.

4.9. Довести, що такі системи векторів утворюють підпростори простору \mathbb{R}^n і знайти їхню базу та вимірність:

- а) всі n -вимірні вектори, у яких перша і остання координати рівні між собою;
г) всі n -вимірні вектори вигляду $(x, y, x, y, x, y, \dots)$, де x, y — довільні числа.

4.10. Знайти вимірність та базу лінійних оболонок таких систем векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \quad \vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3).$