

Розділ 2.

Визначники

2.1. Домашнє завдання до теми «Визначники»

2.1. Довести, що квадратна матриця X другого порядку є розв'язком рівняння

$$X^2 - (\text{tr } X)X + \det X = O.$$

2.2. Обчислити визначники третього порядку:

ε) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$ ж) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}.$

2.3. Якого найбільшого значення може набути визначник третього порядку, утворений із чисел 1 та -1 ?

2.4. За допомогою прямого обчислення за правилом трикутника (або за правилом Саррюса) довести такі властивості визначників 3-го порядку:

- в) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те ж число, то й весь визначник помножиться на це число;
- г) якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак;
- г') якщо два рядки (стовпці) визначника однакові, то він дорівнює нулю.

2.5. Скільки інверсій у таких перестановці $(7, 5, 6, 4, 1, 3, 2)$.

2.6. Визначити число інверсій і вказати загальну ознаку тих чисел n , для яких перестановки парні, і тих, для яких вони непарні:

- б) $(3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2);$
- г) $(1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n).$

2.7. З'ясувати, які з наведених нижче добутків входять у визначники відповідних порядків і з яким знаками:

- в) $a_{61} a_{23} a_{45} a_{36} a_{12} a_{54};$
- г) $a_{27} a_{36} a_{51} a_{74} a_{25} a_{43} a_{62}.$

2.8. Вибрать значення i, j, k так, щоб добуток $a_{51} a_{i6} a_{1j} a_{35} a_{44} a_{6k}$ входив у визначник 6-го порядку зі знаком мінус.

2.9. З яким знаком входить у визначник n -го порядку добуток елементів бічної діагоналі?

2.10. Як зміниться визначник n -го порядку, якщо

- а) його перший стовпчик переставити на останнє місце, а решта стовпчиків пересунути вліво, зберігаючи їх розташування;
- в) змінити знак всіх його елементів на протилежний?

2.11. Числа 1081, 1403, 2093 і 1541 діляться на 23. Пояснити без обчислень, чому число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

також ділиться на 23.

2.12. Чи правильні тотожності:

- a) $\det(A + B) = \det A + \det B$;
- г) $\det(\lambda A^k) = (\det A)^k$?

2.13. Довести, що для довільної квадратної матриці A з дійсними коефіцієнтами виконується нерівність $\det(AA^\top) \geq 0$.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.16. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

2.17. З'ясувати, чи правильні тотожності:

- б) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$;
- д) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

2.18. За допомогою приєднаних матриць знайти обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.19. За допомогою елементарних перетворень обчислити обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.20. Як зміниться матриця A^{-1} , якщо в матриці A переставити i -й та j -й рядки?

2.21. Нехай $A^2 + A + E = O$. Довести, що матриця A невироджена, і вказати найпростіший спосіб обчислення A^{-1} .