

Розділ 1.

Матриці

1.1. Домашнє завдання до теми «Матриці»

1.1. Чи можна перемножити рядок довжини m на стовпчик висоти n ?

1.2. Перевірити, чи існують добутки, і якщо так, то обчислити їх:

г) $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4)$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Виразити розміри матриці AB через розміри матриць A та B .

1.4. Матрицю A помножити зліва та справа на діагональну матрицю D , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Результати обчислень порівняти.

1.5. Матриці A та C мають розміри відповідно $m \times n$ та $p \times q$ та існує добуток ABC . Які розміри матриць B та ABC ?

1.6. Перемножити матриці:

а) $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$; г) $(-12 \ 13) \cdot \begin{pmatrix} 83574 & 83674 \\ 98423 & 98523 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-12 \ 13)$.

1.7. Перевірити правильність тотожностей (A, B, C, D – матриці, λ – число):

а) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; в) $A(B + C) = AB + AC$.

1.8. Обчислити $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$, використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.9. Обчислити:

г) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$; д) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n$.

1.10. Знайти значення полінома $f(x)$ від матриці A , якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.11. Обчислити e^A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.12. Що можна сказати про розміри матриць A та B , якщо $AB = BA$?

1.13. Нехай A та B – квадратні матриці однакового порядку. Перевірити чи правильні такі матричні тотожності:

в) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$; г) $(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$.

1.14. Як зміниться добуток AB матриць A та B , якщо до i -го стовпця матриці B додати її j -й стовпець, помножений на число λ .

1.15. На яку матрицю треба домножити матрицю A , щоб в результаті отримати перший рядок A ?

1.16. Підібрати елементарну матрицю P так, щоб матриця PA отримувалась із A перестановою двох перших рядків A .

1.17. Довести, що довільну квадратну матрицю можна розкласти в суму симетричної та кососиметричної матриць. Чи є це розкладання однозначне?

1.18. Знайти матриці $C = A + B$, $D = 5B$, B^\top , якщо A та B блочні матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 4 & | & 7 \\ 4 & 5 & | & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

1.19. Розбиваючи матриці на блоки, обчислити добутки:

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.