

9.12. Вправи до розділу 9

Подільність поліномів

9.1. Нехай F — поле і $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$. Довести правильність таких властивостей:

- a)** якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, то $f(x)$ ділиться на $h(x)$;
- б)** якщо $f(x)$ і $h(x)$ діляться на $g(x)$, то $f(x) \pm h(x)$ також ділиться на $g(x)$;
- в)** якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, то для довільного $p(x) \in F[x]$ добуток $p(x)f(x)$ також ділиться на $g(x)$;
- г)** якщо кожен з поліномів $f_1(x), \dots, f_k(x) \in F[x]$ ділиться на $g(x)$, то на $g(x)$ буде ділитися й поліном $p_1(x)f_1(x) + \dots + p_k(x)f_k(x)$, де $p_1(x), \dots, p_k(x)$ — довільні поліноми $F[x]$;
- і)** будь-який поліном $f(x)$ ділиться на довільний ненульовий елемент поля F ;
- д)** якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, то $f(x)$ також ділиться на $cg(x)$, де c — довільний ненульовий елемент поля F ;
- е)** поліноми $cf(x)$, де $c \in F \setminus \{0\}$, і лише вони будуть дільниками полінома $f(x)$, які мають ту ж степінь, що й $f(x)$;
- є)** $f(x)$ та $g(x)$ одночасно діляться один на одного тоді і лише тоді, коли $g(x) = cf(x)$, де c — довільний ненульовий елемент F ;
- ж)** довільний дільник одного з двох поліномів $f(x)$ та $cf(x)$, де $c \in F \setminus \{0\}$, буде дільником і для другого полінома.

9.2. Перемножити поліноми:

- а)** $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;
- б)** $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

9.3. Виконати ділення з остаточею:

- а)** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $g(x) = x^2 - 3x + 1$;
- б)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

9.4. Знайти умову, при якій поліном $x^3 + px + q$ ділиться на поліном вигляду $x^2 + mx - 1$.

9.5. При якій умові поліном $x^4 + px^2 + q$ ділиться на поліном вигляду $x^2 + mx + 1$?

9.6. Спростити поліном

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

9.7. Знайти найбільший спільний дільник поліномів $f(x)$ та $g(x)$, якщо:

- а)** $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;
- б)** $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$;
- в)** $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 2$, $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$;
- г)** $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 5$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$;
- і)** $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
- д)** $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;
- е)** $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$, $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;
- є)** $f(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$, $g(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;
- ж)** $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;
- з)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

- и) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$, $g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;
 і) $f(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$, $g(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$;
 ї) $f(x) = 2x^6 - 5x^5 - 14x^4 + 36x^3 + 86x^2 + 12x - 31$, $g(x) = 2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 37x^2 + 10x - 14$;
 љ) $f(x) = 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$, $g(x) = 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.

9.8. Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти найбільший спільний дільник $d(x)$ поліномів $f(x)$ і $g(x)$ та його вираження через $f(x)$ і $g(x)$, якщо:

- а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
 б) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
 в) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;
 г) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$, $g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$;
 р) $f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$, $g(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$;
 д) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
 е) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

9.9. За допомогою алгоритму Евкліда знайти такі поліноми $u(x)$, $v(x)$, щоб $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$:

- а) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
 б) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$;
 в) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$;
 г) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$;
 р) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$;
 д) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

9.10. Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник поліномів $f(x)$ і $g(x)$. Довести:

- а) існують такі поліноми $u(x)$, $v(x)$, що $\deg u(x) < \deg g(x) - \deg d(x)$, причому $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$;
 б) у випадку а) маємо також $\deg v(x) < \deg f(x) - \deg d(x)$;
 в) поліноми $u(x)$, $v(x)$ із а) визначаються однозначно.

9.11. Методом невизначених коефіцієнтів підібрати такі поліноми $u(x)$, $v(x)$, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$:

- а) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;
 б) $f(x) = x^3$, $g(x) = (1-x)^2$;
 в) $f(x) = x^4$, $g(x) = (1-x)^4$.

9.12. Підібрати поліноми $u(x)$ та $v(x)$ найменшого степеня так, щоб

- а) $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1)u(x) + (x^3 - 5x - 3)v(x) = x^4$;
 б) $(x^4 + 2x^3 + x + 1)u(x) + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)v(x) = x^3 - 2x$.

9.13. Визначити поліном найменшого степеня, який в остатці дає:

- а) $2x$ при діленні на $(x-1)^2$ і $3x$ при діленні на $(x-2)^3$;
 б) x^2+x+1 при діленні на $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ і $2x^2-3$ при діленні на $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

9.14. Знайти такі поліноми $u(x)$ і $v(x)$, що $x^m u(x) + (1-x)^n v(x) = 1$.

9.15. Нехай $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$, де $d(x)$ — найбільший спільний дільник $f(x)$ і $g(x)$. Чому дорівнює найбільший спільний дільник $u(x)$ і $v(x)$?

9.16. Виділивши кратні незвідні множники заданого полінома, розкласти його на незвідні множники:

- а) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

- б)**) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;
в)) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;
г)) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
г')) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$;
д)) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;
е)) $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

Прості і кратні корені

9.17. Виконати ділення з остачею:

- а)**) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;
б)) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$;
в)) $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$;
г)) $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

9.18. Розділити поліном $f(x)$ з остачею на $x - x_0$ і знайти значення $f(x_0)$:

- а)**) $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$, $x_0 = 2$;
б)) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$, $x_0 = -2$.

9.19. Користуючись схемою Горнера, обчислити $f(x_0)$, якщо:

- а)**) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ на $x_0 = 4$;
б)) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$ на $x_0 = -2 - i$.

9.20. Користуючись схемою Горнера, розкласти поліном $f(x)$ за степенями $x - x_0$ і знайти значення $f(x_0)$:

- а)**) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -1$;
б)) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$;
в)) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $x_0 = 2$;
г)) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $x_0 = -i$;
г')) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i$, $x_0 = -1 + 2i$.

9.21. Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби:

- а)**) $\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$; **б)**) $\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$.

9.22. За допомогою схеми Горнера розкласти за степенями x :

- а)**) $f(x+3)$, де $f(x) = x^4 - x^3 + 1$;
б)) $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$.

9.23. Розкласти поліном $f(x)$ за степенями $x - x_0$ і знайти значення його похідних в точці x_0 :

- а)**) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$, $x_0 = 2$;
б)) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $x_0 = 1 + 2i$;
в)) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20$, $x_0 = -2$.

9.24. Визначити кратність кореня x_0 полінома $f(x)$:

- а)**) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;
б)) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$;
в)) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

г) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \quad x_0 = 3.$

9.25. При якому значенні λ поліном $f(x) = x^5 - \lambda x^2 - \lambda x + 1$ має -1 коренем не нижче другої кратності?

9.26. Знайти такі λ та μ , щоб тричлен $f(x) = \lambda x^4 + \mu x^3 + 1$ ділився на $(x - 1)^2$?

9.27. При яких значеннях λ та μ поліном $f(x) = \lambda x^{n+1} + \mu x^n + 1$ ділиться на $(x - 1)^2$?

9.28. При яких значеннях λ та μ поліном $f(x) = x^5 + \lambda x^3 + \mu$ має подвійний корінь, відмінний від нуля?

9.29. При яких значеннях λ, μ, ξ поліном $f(x) = x^5 + 10\lambda x^3 + 5\mu x + \xi$ має потрійний корінь, відмінний від нуля?

9.30. Довести, що поліноми

а) $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1,$

б) $g(x) = x^{2n+1} - (2n + 1)x^{n+1} + (2n + 1)x^n - 1,$

в) $h(x) = (n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m)$

мають число 1 потрійним коренем.

9.31. Довести, що поліном

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

не має кратних коренів.

9.32. Довести, що поліном

$$a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \cdots + a_k x^{n_k}, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k,$$

не має відмінних від нуля коренів кратності, більшої $k - 1$.

9.33. Довести, що поліном

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^{n+1} - \\ - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

ділиться на $(x - 1)^5$ і не ділиться на $(x - 1)^6$.

9.34. Довести, що для того, щоб поліном

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ділиться на $(x - 1)^{k+1}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n &= 0, \\ a_1 + 2a_2 + \dots + na_n &= 0, \\ a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_1 + 2^k a_2 + \dots + n^k a_n &= 0. \end{aligned}$$

9.35. Визначити показник кратності кореня a полінома

$$\frac{x - a}{2} (f'(x) + f'(a)) - f(x) - f(a),$$

де $f(x)$ — поліном.