

8.10. Вправи до розділу 8

Комплексні числа у алгебричній формі

8.1. Обчислити:

- a) $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$; б) $(2+i)(3+7i) - (1+2i)(5+3i)$;
 в) $(4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i)$; г) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;
 г') $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; д) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;
 е) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; е') $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
 ж) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; з) $(3+i)^3 - (3-i)^3$;
 и) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; і) $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$;
 ї) $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$; ј) $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$.

8.2. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$;
 в) $\begin{vmatrix} \cos \varphi + i \sin \varphi & 1 \\ 1 & \cos \varphi - i \sin \varphi \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

8.3. Довести, що при дійсних a, b, c, d корені рівняння $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ будуть дійсними.

8.4. Обчислити визначники 3-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$;
 в) $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

8.5. Обчислити $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n$, де n — ціле число.

8.6. Перевірити тотожність $x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$.

8.7. Довести рівність $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

8.8. Обчислити $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, де n — ціле додатне число.

8.9. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} (1-i)z_1 - 3iz_2 = -i, \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i; \end{cases}$
 г') $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

8.10. Знайти дійсні числа x та y , що задовольняють рівняння:

а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$; б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$.

8.11. Довести, що $\bar{\bar{z}} = z$ для довільного комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

8.12. Довести, що

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

для довільних комплексних чисел z_1, z_2 .

8.13. Довести, що відображення $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, де $\varphi(z) = \bar{z}$ для довільного $z \in \mathbb{C}$, є автоморфізмом поля \mathbb{C} .

8.14. Довести, що:

- а) комплексне число z є дійсним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z} = z$;
- б) комплексне число z є чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z} = -z$.

8.15. Довести, що:

- а) добуток двох комплексних чисел є дійсним числом тоді і тільки тоді, коли одне з них відрізняється від спряженого до другого дійсним множником;
- б) сума і добуток двох комплексних чисел є дійсним тоді і тільки тоді, коли дані числа або спряжені, або обидва дійсні.

8.16. Знайти всі комплексні числа, які спряжені:

- а) своєму квадрату; б) своєму кубу.

8.17. Довести: якщо в результаті скінченної кількості операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) над комплексними числами z_1, z_2, \dots, z_n отримується число z , то в результаті цих же операцій над спряженими числами $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$ отримується число \bar{z} .

8.18. Довести, що визначник

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & a \\ z_2 & \bar{z}_2 & b \\ z_3 & \bar{z}_3 & c \end{vmatrix},$$

де z_1, z_2, z_3 — комплексні і a, b, c — дійсні числа, є чисто уявним числом.

8.19. Обчислити:

- а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt{-8i}$; в) $\sqrt{3-4i}$; г) $\sqrt{-15+8i}$;
- г) $\sqrt{-3-4i}$; д) $\sqrt{-11+60i}$; е) $\sqrt{-8+6i}$;
- е) $\sqrt{-8-6i}$; ж) $\sqrt{-8-6i}$; з) $\sqrt{8+6i}$; и) $\sqrt{2-3i}$;
- и) $\sqrt{4+i} + \sqrt{4-i}$; ж) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; ї) $\sqrt[4]{-1}$; к) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

8.20. Нехай $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha + \beta i)$. Чому дорівнює $\sqrt{-a-bi}$?

8.21. Розв'язати рівняння:

- а) $z^2 = i$; б) $z^2 = 3-4i$; в) $z^2 = 5-12i$;
- г) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$; д) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
- д) $z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0$.

8.22. Розв'язати рівняння і їхні ліві частини розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами:

- а) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$; б) $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$.

8.23. Розв'язати рівняння:

- а) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

8.24. Знайти формулу для розв'язання бі kvadratного рівняння $x^4 + px^2 + q = 0$ з дійсними коефіцієнтами, яка є зручною для випадку, коли $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Комплексні числа у тригонометричній формі

8.25. Побудувати точки на площині, які зображають комплексні числа:

$$1, \quad -1, \quad -\sqrt{2}, \quad i, \quad -i, \quad i\sqrt{2}, \quad -1+i, \quad 2-3i.$$

8.26. Записати у тригонометричній формі такі числа:

- a) 1; б) -1 ; в) i ; г) $-i$; р) $2i$; д) -3 ;
- е) $1+i$; е) $-1+i$; ж) $-1-i$; з) $1-i$;
- и) $1+i\sqrt{3}$; і) $-1+i\sqrt{3}$; ї) $-1-i\sqrt{3}$; ѹ) $1-i\sqrt{3}$;
- к) $\sqrt{3}+i$; л) $-\sqrt{3}+i$; м) $-\sqrt{3}-i$; н) $\sqrt{3}-i$;
- о) $1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$; п) $2+\sqrt{3}+i$; р) $1-(2+\sqrt{3})i$;
- с) $\cos \alpha - i \sin \alpha$; т) $\sin \alpha + i \cos \alpha$; ѿ) $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \psi + i \sin \psi}$.

8.27. Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа:

- а) модуль яких дорівнює 1; б) аргумент яких $\frac{\pi}{6}$.

8.28. Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа, що задовільняють нерівностям:

- а) $|z| < 2$; б) $|z-i| \leqslant 1$; в) $|z-1-i| < 1$; г) $2 < |z| < 3$;
- р) $1 \leqslant |z-2i| < 2$; д) $|\Re z| \leqslant 1$; е) $-1 < \Re iz < 0$; е) $|\Im z| = 1$;
- ж) $|\Re z + \Im z| < 1$; з) $|z-1| + |z+1| = 3$; и) $|z+2| - |z-2| = 3$; і) $|z-2| = \Re z + 2$.

8.29. Розв'язати рівняння:

- а) $|z| + z = 8 + 4i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$;
- в) $|z| - z = 1 + 2i$; г) $|z| + z = 2 + i$

8.30. Довести тотожність

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2);$$

який геометричний зміст цієї тотожності?

8.31. Довести, що будь-яке комплексне число z , відмінне від -1 і модуль якого дорівнює 1, може бути зображене у вигляді $z = \frac{1+ir}{1-ir}$, де r — дійсне число.

8.32. Довести, що $|z| \geqslant 0$ для довільного комплексного числа $z \in \mathbb{C}$, причому $|z| = 0$ тоді і лише тоді, коли $z = 0$.

8.33. Довести, що $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ для довільних $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

8.34. Довести такі властивості модуля комплексних чисел:

- а) $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- б) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$;
- в) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ тоді і тільки тоді, коли вектори z_1 і z_2 мають однакові напрямки;
- г) $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$ тоді і тільки тоді, коли вектори z_1 і z_2 мають протилежні напрямки.

8.35. Нехай z_1, z_2 — комплексні числа і $u = \sqrt{z_1 z_2}$. Довести, що

$$|z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - u \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + u \right|.$$

8.36. Довести:

- а) якщо $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$;
- б) якщо $|z| \leq 2$, то $1 \leq |z^2 - 5| \leq 9$;
- в) якщо $|z| < \frac{1}{2}$, то $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

8.37. Довести, що:

- а) при множенні двох комплексних чисел у тригонометричній формі їхні модулі множаться, а аргументи додаються;
- б) при діленні двох комплексних чисел z_1 на z_2 ($z_2 \neq 0$) у тригонометричному вигляді їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються.

8.38. Довести формулу Muавра

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

для цілих $n \neq 0$.

8.39. Обчислити:

- а) $(1+i)^{1000}$;
- б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$;
- в) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;
- г) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$;
- і) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$;
- д) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{12}$;
- е) $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$;
- ж) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

8.40. Обчислити визначники 3-го порядку:

- а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}$, де $w = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$;
- б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}$, де $w = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$;
- в) $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{vmatrix}$, де $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.41. Довести, що для довільного цілого n виконуються співвідношення:

- а) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$;
- б) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n (\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6})$.

8.42. Спростити вираз $(1+z)^n$, якщо $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

8.43. Знайти $z_1^n + z_2^n$, де $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, n — довільне ціле число.

8.44. Обчислити $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ для довільного цілого n .

8.45. Довести, що якщо $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$, то $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m\varphi$ для довільного цілого m .

8.46. При $n \in \mathbb{Z}$ обчислити вирази:

- а) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^n$;
- б) $(\frac{1+i\tg\varphi}{1-i\tg\varphi})^n$.

8.47. Чи утворює групу:

- а) множина \mathbb{C}^* — ненульових комплексних чисел — стосовно множення;
- б) множина комплексних чисел з фіксованим модулем r стосовно множення;
- в) множина ненульових комплексних чисел з модулем, не більшим за фіксоване число r , стосовно множення;

г) множина ненульових комплексних чисел, розташованих на променях, які виходять з початку координат і утворюють з променем Ox кути $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, стосовно множення;

г') множина матриць $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ стосовно множення?

8.48. Які з відображень груп $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ є гомоморфізмами, якщо:

- а) $\varphi(z) = |z|$; б) $\varphi(z) = 2|z|$;
- в) $\varphi(z) = \frac{1}{|z|}$; г) $\varphi(z) = 1 + |z|$;
- г') $\varphi(z) = |z|^2$; д) $\varphi(z) = 1$; е) $\varphi(z) = 2$?

8.49. Знайти порядок елемента групи:

- а) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \in \mathbb{C}^*$;
- в) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; г) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; г') $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$;

- д) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — різні корені k -го степеня з 1.

8.50. Довести, що:

- а) елемент $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ групи \mathbb{C}^* має нескінчений порядок;
- б) число $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ ірраціональне.

8.51. Скільки елементів порядку 6 існує в групі \mathbb{C}^* ?

8.52. Знайти суміжні класи:

- а) адитивної групи \mathbb{C} за підгрупою $\mathbb{Z}[i]$ цілих гаусових чисел, тобто чисел $a + bi$ з цілими a, b ;
- б) адитивної групи \mathbb{C} за підгрупою \mathbb{R} ;
- в) мультиплікативної групи \mathbb{C}^* за підгрупою комплексних чисел, модуль яких дорівнює 1;
- г) мультиплікативної групи \mathbb{C}^* за підгрупою \mathbb{R}^* ;
- г') мультиплікативної групи \mathbb{C}^* за підгрупою додатних дійсних чисел.

8.53. Нехай Q — невироджена матриця із $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ і $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Довести, що суміжний клас QH складається із усіх матриць $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, визначник яких дорівнює визначнику матриці Q .

8.54. Чи утворює кільце стосовно операцій додавання та множення комплексних чисел:

- а) множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{Z}$;
- б) множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{Q}$;
- в) множина всіможливих сум вигляду $a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_nz_n$, де a_1, a_2, \dots, a_n — раціональні числа, z_1, z_2, \dots, z_n — комплексні корені степеня n з 1?

8.55. Чи утворює кільце множина комплексних матриць вигляду $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ стосовно звичайних операцій додавання та множення матриць?

8.56. Довести, що множина комплексних чисел утворює поле стосовно операцій додавання та множення комплексних чисел.

8.57. Довести, що поле комплексних чисел містить підполе, ізоморфне полю дійсних чисел.

8.58. Довести, що поле комплексних чисел ізоморфне полю матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де a, b — дійсні числа.

8.59. Виразити через $\sin x$ і $\cos x$ функції:

a) $\sin 4x$; б) $\cos 4x$; в) $\sin 5x$; г) $\cos 5x$.

8.60. Виразити $\operatorname{tg} 6\varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$.

8.61. Довести рівності:

a) $\cos nx = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x$;

б) $\sin nx = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x$.

8.62. Виразити через перші степені синуса і косинуса аргументів, кратних x , функції:

a) $\sin^4 x$; б) $\cos^4 x$; в) $\sin^5 x$; г) $\cos^5 x$.

8.63. Знайти суми:

a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$; б) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$

8.64. Довести, що:

a) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4})$;

б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4})$.

8.65. Знайти суму $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \dots$

8.66. Довести рівності:

a) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, ($x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$);

б) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, ($x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$);

в) $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$;

г) $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \sin \frac{5\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$.

8.67. Довести, що

a) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$;

б) $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$;

в) $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}$.

8.68. Знайти суму $\sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 (2n-1)x$.

8.69. Довести, що

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$;

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$.

8.70. Знайти суми:

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \dots + \cos^3 nx$;

б) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \dots + \sin^3 nx$.

8.71. Знайти суми:

a) $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx$;

б) $\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx$.

8.72. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ при $z = a + bi$.

8.73. Нехай $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Довести:

- а) $e^{2\pi i} = 1$; б) $e^{\pi i} = -1$;
- в) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$; г) $(e^z)^k = e^{zk}$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.

Корені з комплексних чисел. Корені з одиниці

8.74. Довести, що якщо $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}$ і n — довільне натуральне число, то

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

8.75. Довести, що якщо комплексне число z є одним з коренів степеня n з дійсного числа a , то й спряжене число \bar{z} є одним з коренів степеня n з a .

8.76. Довести, що якщо $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\bar{z}} = \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n\}$.

8.77. Довести, що об'єднання множин $\sqrt[n]{z}$ і $\sqrt[n]{-z}$ є множина $\sqrt[2n]{z^2}$.

8.78. Чи правильна рівність $\sqrt[n^k]{z^k} = \sqrt[n]{z}$ ($k > 1$)?

8.79. Обчислити:

- а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[6]{1}$; г) $\sqrt[3]{i}$; г') $\sqrt[6]{i}$;
- д) $\sqrt[4]{-4}$; е) $\sqrt[6]{64}$; е') $\sqrt[8]{16}$; ж) $\sqrt[6]{-27}$;
- з) $\sqrt[3]{1+i}$; и) $\sqrt[3]{2-2i}$; і) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$;
- ї) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; ї) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$; к) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$;
- л) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$; м) $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$;
- н) $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\frac{1+2i}{2-i} + 2}$; о) $\sqrt[4]{\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{5}} - 5\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}$.

8.80. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b, \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c, \end{cases}$$

де ε — відмінне від 1 значення $\sqrt[3]{1}$.

8.81. Нехай $\epsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ ($0 \leq k < n$). Довести, що:

- а) $\sqrt[n]{1} = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}\}$;
- б) $\epsilon_k = \epsilon_1^k$ ($0 \leq k < n$);
- в) $\epsilon_k \epsilon_m = \begin{cases} \epsilon_{k+m}, & \text{якщо } k+m < n, \\ \epsilon_{k+m-n}, & \text{якщо } k+m \geq n \end{cases}$ ($0 \leq k < n, 0 \leq m < n$);

г) множина \mathbb{C}_n всіх коренів n -го степеня з 1 є циклічною групою порядку n щодо операції множення комплексних чисел;

г') будь-яка циклічна підгрупа порядку n ізоморфна групі \mathbb{C}_n .

8.82. Довести, що наступні твердження рівносильні:

- а) ϵ — первісний корінь з 1 степеня n ;
- б) порядок ϵ в групі \mathbb{C}_n дорівнює n ;
- в) ϵ — твірний елемент групи \mathbb{C}_n .

8.83. Знайти корені з одиниці степеня:

- а) 2; б) 3; в) 4; г) 6; і) 8; д) 12; е) 24.

8.84. Знайти первісні корені з одиниці степеня:

- а) 2; б) 3; в) 4; г) 6; і) 8; д) 12; е) 24.

8.85. Знайти двома способами корені степеня 5 з одиниці і виразити в радикалах:

- а) $\cos \frac{2\pi}{5}$; б) $\sin \frac{2\pi}{5}$; в) $\cos \frac{4\pi}{5}$; г) $\sin \frac{4\pi}{5}$.

8.86. Розв'язати рівняння:

- а) $(z+1)^m - (z-1)^m = 0$; б) $(z+i)^m - (z-i)^m = 0$.

8.87. Обчислити суму $1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{n-1}$, де ϵ — первісний корінь степеня $2n$ з 1.

8.88. Знайти суму всіх коренів n -го степеня з одиниці.

8.89. Знайти добуток всіх коренів n -го степеня з одиниці.

8.90. Знайти суму k -их степенів всіх коренів n -го степеня з одиниці.

8.91. Обчислити суми

- а) $1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1}$,
б) $1 + 4\epsilon + 9\epsilon^2 + \dots + n^2\epsilon^{n-1}$,

де ϵ — корінь n -го степеня з 1.

8.92. Знайти суму первісних коренів а) 15-го, б) 24-го, в) 30-го степеня з одиниці.

8.93. Нехай $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Число $\varepsilon^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ є первісним коренем n -го степеня з 1 тоді і тільки тоді, коли числа k і n взаємно прості.

8.94. Усі корені n -го степеня з комплексного числа отримуються шляхом домноження одного з них на всі корені n -го степеня з 1.

8.95. Довести, що якщо z — первісний корінь непарного степеня n з одиниці, то $-z$ — первісний корінь степеня $2n$.

8.96. Чи є число $\frac{2+i}{2-i}$ коренем якогось степеня з одиниці?