

7.21. Вправи до розділу 7

Бінарні алгебричні операції. Напівгрупи. Моноїди

7.1. Чи визначає бінарну алгебричну операцію на множині X правило \circledast , яке задане формулою $x \circledast y = x^2 - 2xy + y^2$, якщо

- a) $X = \mathbb{Q}$; **б)** $X = \mathbb{N}$?

7.2. Чи визначає правило $x * y = x - y$ бінарну алгебричну операцію на множині X , якщо

- a) $X = \mathbb{R}$; **б)** $X = \mathbb{N}$?

7.3. Довести, що множення матриць є алгебричною бінарною операцією на множині

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

7.4. Чи є скалярне множення векторів алгебричною операцією на множині \mathbb{R}^3 ? А векторне?

7.5. Скількома способами можна визначити бінарну операцію на n -елементній множині? Скільки серед цих операцій:

- a) будуть комутативними; **б)** матимуть нейтральний елемент?

7.6. Побудувати таблицю Келі для множення на множині рухів правильного трикутника.

7.7. Побудувати таблицю множення для множини рухів різностороннього прямокутного паралелепіпеда.

7.8. Як за таблицею Келі для операції $*$ на множині X з'ясувати, чи є заданий елемент a :

- a) скоротним зліва (справа); **б)** ідемпотентом?

7.9. З'ясуйте, чи операція $*$ є асоціативною на множині \mathbb{R} , якщо

- a) $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; **б)** $x * y = e^x e^y$.

7.10. Доведіть, що операція \star , яка задана на множині цілих чисел правилом $n \star m = -n - m$, є комутативною, але неасоціативною.

7.11. Перевірити на асоціативність і комутативність

- a) операцію приєднаного множення \circ із прикладу 7.1;
 б) операцію \circledast із задачі 7.1;
 в) операцію множення із задачі 7.3.

7.12. Перевірити на асоціативність і комутативність операцію \odot , визначену на множині M^2 правилом $(x, y) \odot (z, t) = (x, t)$, де $x, y, z, t \in M$.

7.13. Доведіть, що якщо бінарна операція на множині асоціативна, то результат її послідовного застосування до n елементів цієї множини не залежить від розміщення дужок.

7.14. Скількома способами можна визначити асоціативну операцію на двоелементній множині?

7.15. Чи утворює напівгрупу множина X стосовно операції $*$, якщо

- a) $X = \mathbb{N}$, $m * n = m^n$; **б)** $X = \mathbb{N}$, $m * n = 2mn$;
 в) $X = \mathbb{Z}$, $m * n = m - n$; **г)** $X = \mathbb{N}$, $m * n = \text{НСК}(m, n)$?

7.16. Які з алгебричних операцій задачі 7.15 є комутативними?

7.17. Чи утворює напівгрупу множина X стосовно операції $*$, якщо

- a) $X = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НСД}(x, y)$; **б)** $X = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;
 в) $X = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$; **г)** $X = \mathbb{R}^*$, $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$?

7.18. Чи утворює напівгрупу множина X стосовно операції $*$, якщо

- a)** $X = \mathbb{N}$, $x * y = \max(x, y)$;
- б)** $X = \mathbb{R}$, $x * y = \ln(e^x + e^y)$?

7.19. На множині X^2 визначено такі операції:

- а)** $(a, b) *_1 (c, d) = (a, c)$; **б)** $(a, b) *_2 (c, d) = (a, d)$;
- в)** $(a, b) *_3 (c, d) = (b, c)$; **г)** $(a, b) *_4 (c, d) = (b, d)$.

Які з структур $(X^2; *_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, є напівгрупою?

7.20. На множині X визначена операція \diamond за правилом $x \diamond y = x$. Довести, що $(X; \diamond)$ — напівгрупа.

7.21. Чи існує нейтральний елемент у множині \mathbb{Q}^* стосовно алгебричної операції, заданої правилом $a \square b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$?

7.22. Чи існує нейтральний елемент у множині M^2 стосовно операції \odot , розглянутої в задачі 7.12?

7.23. Чи існує нейтральний елемент

- а)** у множині \mathbb{Q} стосовно операції \circledast із задачі 7.1;
- б)** у множині M із задачі 7.3 стосовно операції множення матриць?

У випадку існування нейтрального елемента з'ясувати для яких елементів заданих множин існують обернені елементи.

7.24. Довести, що множина \mathbb{R} стосовно операції приєднаного множення (див. приклад 7.1) є моноїдом. Чи усі елементи цього моноїда є оборотними?

7.25. Скільки елементів містить напівгрупа, що складається з усіх додатних степенів матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Чи є ця напівгрупа моноїдом?

7.26. Доведіть, що множина усіх оборотних елементів моноїда є його підмоноїдом.

7.27. Нехай на множині \mathbb{R} визначено операцію $x * y = \lambda x + \beta y + \eta$, де $\lambda, \beta, \eta \in \mathbb{R}$. Для яких значень параметрів $\lambda, \beta, \eta \in \mathbb{R}$

- а)** операція $*$ буде асоціативною;
- б)** в множині R існуватиме нейтральний елемент;
- в)** усі елементи множини R будуть оборотними?

Групи. Підгрупи

7.28. Довести, що множина натуральних чисел не утворює групу ні стосовно операції додавання, ні стосовно операції множення.

7.29. З'ясувати, чи утворює групу кожна з заданих множин стосовно вказаної операції над елементами:

- а)** цілі числа стосовно додавання;
- б)** парні цілі числа стосовно додавання;
- в)** цілі числа, кратні заданому натуральному числу n , стосовно додавання;
- г)** невід'ємні цілі числа стосовно додавання;
- г')** непарні цілі числа стосовно додавання;
- д)** цілі числа стосовно віднімання;
- е)** цілі числа стосовно множення;
- е')** цілі числа стосовно ділення.

7.30. Чи утворює групу кожна з заданих множин стосовно вказаної операції над елементами:

- а)** раціональні числа стосовно додавання;
- б)** раціональні числа стосовно множення;

- в) ненульові раціональні числа стосовно множення;
- г) додатні раціональні числа стосовно множення;
- ґ) додатні раціональні числа стосовно ділення;
- д) двійково-раціональні числа (тобто раціональні числа, знаменники яких є степенями числа 2 з цілими невід'ємними показниками) стосовно додавання;
- е) всі раціональні числа, знаменники яких дорівнюють добуткам простих чисел із заданої множини M (скінченної чи нескінченної) з цілими невід'ємними показниками (лише скінчена кількість яких може бути відмінна від нуля), стосовно додавання.

7.31. Які з вказаних числових множин з операціями є групами:

- а) $(\mathbb{R}, +)$; б) (\mathbb{R}, \cdot) ; в) (\mathbb{R}^*, \cdot) ;
- г) степінь заданого дійсного числа a , $a \neq 0, \pm 1$, з цілими показниками стосовно множення;
- ґ) додатні дійсні числа, якщо операцію визначено так: $x * y = x^y$;
- д) додатні дійсні числа, якщо операцію визначено так: $x * y = x^2 y^2$;
- е) $(\{-1, 1\}, \cdot)$;
- є) вектори арифметичного простору \mathbb{R}^n стосовно операції додавання векторів;
- ж) числа вигляду $a + b\sqrt{5}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$ і $a^2 + b^2 \neq 0$, стосовно множення.

7.32. Які з вказаних множин матриць утворюють групу стосовно заданої операції:

- а) $(M_n(\mathbb{Z}), +)$; б) $(M_n(\mathbb{Z}), \cdot)$;
- в) n -вимірні ціличисельні матриці з визначником, рівним одиниці, стосовно множення;
- ґ) ціличисельні матриці порядку n з визначником, рівним ± 1 , стосовно множення;
- д) матриці порядку n з цілими елементами і визначником, рівним фіксованому ненульовому числу d , стосовно множення.

7.33. Довести, що множина $GL_n(\mathbb{R})$ — всіх оберотних матриць n -го порядку з дійсними елементами — стосовно операції множення матриць утворює некомутативну групу (так звану, *поєну лінійну групу* порядку n над \mathbb{R}).

7.34. Які з вказаних множин квадратних матриць з дійсними елементами фіксованого порядку утворюють групу стосовно заданої операції:

- а) $(M_n(\mathbb{R}), +)$; б) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$;
- в) множина невироджених матриць стосовно множення;
- г) множина матриць з фіксованим визначником, рівним d , стосовно множення;
- ґ) множина діагональних матриць стосовно додавання;
- д) множина діагональних матриць стосовно множення;
- є) множина діагональних матриць, усі діагональні елементи яких відмінні від нуля, стосовно множення;
- ж) множина верхніх трикутних матриць стосовно множення;
- ж) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно множення;
- з) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно додавання;
- и) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно операції $A * B = A + B - AB$;
- і) множина верхніх унітрикутних матриць стосовно множення;
- ї) множина всіх ортогональних матриць стосовно множення;
- й) множина симетричних (кососиметричних) матриць стосовно додавання;
- к) множина симетричних (кососиметричних) матриць стосовно множення;
- л) множина ненульових матриць вигляду $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, де $x, y \in \mathbb{R}$, стосовно множення;
- м) множина ненульових матриць вигляду $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, де λ — фіксоване дійсне число, стосовно множення.

7.35. Довести, що множина $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ всіх невироджених матриць n -го порядку з дійсними елементами і визначником, рівним 1, стосовно операції множення утворює некомутативну групу (так звану, *спеціальну лінійну групу*).

7.36. Які з вказаних нижче сукупностей відображень множини $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себе утворюють групу стосовно множення відображень:

- a)** множина всіх відображень;
- б)** множина всіх ін'ективних відображень;
- в)** множина всіх сюр'ективних відображень;
- г)** множина всіх біективних відображень.

7.37. Доведіть, що:

- a)** множина $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ з операцією $x * y = x + y + xy$;
- б)** множина \mathbb{Z} з операцією $m * n = m + n + 2007$;
- в)** множина \mathbb{Z} з операцією $m * n = m + (-1)^m n$

утворюють групи.

7.38. Для яких натуральних чисел n множина \mathbb{R} з операцією $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ буде групою?

7.39. Доведіть, що множини:

- a)** $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ з операцією $a * b = ab - a - b + 2$;
- б)** $G = [0, 1)$ з операцією $*$, де $a * b$ дорівнює дробовій частині числа $a + b$;
- в)** $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ з операцією $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

утворюють групи.

7.40. Доведіть, що в групі нейтральний елемент єдиний.

7.41. Довести, що в групі для кожного елемента існує єдиний обернений.

7.42. Нехай (G, \cdot) — група, $a, b, c \in G$. Доведіть закон скорочення: для довільних елементів a, b, c групи (G, \cdot) із кожної з рівностей $ab = ac$ і $ba = ca$ випливає рівність $b = c$.

7.43. Нехай (G, \cdot) — група, $a, b \in G$. Доведіть, що кожне з рівнянь $ax = b$ і $ya = b$ має єдиний розв'язок.

7.44. Доведіть, що моноїд M , у якому для довільних елементів $a, b \in M$ або рівняння **a)** $ax = b$, або **b)** $ya = b$ має принаймні один розв'язок, є групою.

7.45. Довести, що скінчена множина G , в якій визначена асоціативна операція множення і кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$ для будь-яких $a, b \in G$ має в G не більше одного розв'язку, буде групою.

7.46. Нехай (G, \cdot) — група, e — її нейтральний елемент. Довести, що якщо $a^2 = e$ для будь-якого елемента a групи G , то ця група абелева.

7.47. Довести, що повороти кожного із п'яти правильних многогранників навколо центра, які суміщають многогранник із самим собою, утворюють групу, якщо за множення двох поворотів прийняти їх послідовне виконання. Знайти порядки цих груп.

7.48. Які з груп задач 7.29, 7.30 є підгрупами інших із цих груп?

7.49. Доведіть, що непорожня підмножина $H \subseteq G$ є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли $a^{-1}b \in H$ для довільних елементів $a, b \in H$.

7.50. Чи може в підгрупі групи G існувати нейтральний елемент, відмінний від нейтрального елемента групи G .

7.51. Нехай H — підгрупа групи G . Довести, що обернений до довільного елемента $h \in H$ в підгрупі H співпадає з оберненим до h в групі G .

7.52. Довести, що у довільній групі G :

- а) перетин довільної кількості підгруп є підгрупою;
 б) об'єднання двох підгруп є підгрупою тоді й тільки тоді, коли одна з підгруп міститься в іншій;
 в) якщо підгрупа H міститься в об'єднанні підгруп V і W , то або $H \subseteq V$, або $H \subseteq W$.

7.53. Довести: якщо a — довільний елемент мультиплікативної групи G , то множина усіх цілих степенів елемента a утворює підгрупу групи G .

7.54. Довести, що скінчена піднапівгрупа будь-якої групи є підгрупою. Чи вірно це твердження, якщо піднапівгрупа нескінчена?

7.55. Довести, що будь-яка нескінчена група має нескінчену кількість підгруп.

7.56. Довести, що якщо H — скінчена множина елементів групи G і добуток двох довільних елементів із H знову лежить в H , то H буде підгрупою групи G .

Порядок елемента групи

7.57. Довести, що якщо усі елементи множини H з групи G мають скінчені порядки і добуток двох довільних елементів із H знову лежить в H , то H буде підгрупою групи G .

7.58. Знайти порядок елемента групи:

- а) $-1 \in (\{-1, 1\}, \cdot)$; б) $1 \in (\mathbb{Z}, +)$;
 в) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$;
 д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$.

7.59. Довести: якщо a, b — довільні елементи групи G , то

- а) елементи ab і ba мають одинаковий порядок;
 б) елементи a і bab^{-1} мають одинаковий порядок.

7.60. Довести, що для довільних елементів a, b, c групи G

- а) елементи abc, bca і cab мають одинаковий порядок;
 б) елементи abc і cba можуть мати різні порядки.

7.61. Довести, що якщо елемент a групи G має нескінчений порядок, то $a^k = a^m$ тоді і тільки тоді, коли $k = m$.

7.62. Довести, що якщо елемент a групи G має порядок n , то

- а) $a^{-1} = a^{n-1}$;
 б) $a^m = e$ тоді і лише тоді, коли m ділиться націло на n ;
 в) $a^m = a^k$ тоді і лише тоді, коли $(m - k)$ ділиться націло на n ;
 г) $\mathrm{ord}(a^m) = \frac{n}{\mathrm{НСД}(n, m)}$.

7.63. Якщо елементи a, b групи G переставні ($ab = ba$), $\mathrm{ord}(a) = n$, $\mathrm{ord}(b) = m$, причому n, m — взаємно прості, то $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(a) \cdot \mathrm{ord}(b) = nm$.

7.64. Доведіть, що для скінчених підгруп N і H групи G виконується рівність

$$|N| \cdot |H| = |N \cap H| \cdot |NH|.$$

7.65. Нехай p — просте непарне число, X — ціличисельна квадратна матриця порядку n , причому матриця $E + pX$ лежить в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ і має скінчений порядок. Довести, що $X = O$.

7.66. Доведіть, що порядок групи поворотів правильного многогранника дорівнює подвоєній кількості його ребер.

7.67. Доведіть, що множина 2^M є групою стосовно операції симетричної різниці Δ .

Підстановки

7.68. Перемножити підстановки:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

7.69. Записати перестановки у вигляді добутків незалежних циклів і за декрементом визначити їхню парність:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix};$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$

і) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix};$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix};$

ε) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix};$

з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix};$

и) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

і) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & nk-k+1 & nk-k+2 & \dots & nk \\ k+1 & k+2 & \dots & 2k & \dots & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}.$

7.70. Записати підстановки у вигляді таблиць:

а) $(1 \ 5)(2 \ 3 \ 4);$ б) $(1 \ 3)(2 \ 5)(4);$

в) $(7 \ 5 \ 3 \ 1)(2 \ 4 \ 6)(8)(9);$ г) $(1 \ 2)(3 \ 4) \dots (2n-1, \ 2n);$

і) $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 2n-1, \ 2n);$ д) $(3 \ 2 \ 1)(6 \ 5 \ 4) \dots (3n, \ 3n-1, \ 3n-2).$

7.71. Перемножити підстановки, записані у вигляді циклів:

а) $[(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4 \ 6 \ 7)] \cdot [(1 \ 4 \ 7)(2 \ 3 \ 5 \ 6)];$

б) $[(1 \ 3)(5 \ 7)(2 \ 4 \ 6)] \cdot [(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4)(6 \ 7)].$

7.72. Довести, що множина S_n — усіх підстановок довжини n — утворює мультиплікативну групу, причому неаблеву при $n \geq 3$.

7.73. Довести, що порядок симетричної групи S_n дорівнює $n!$.

7.74. Довести, що для кожної підстановки σ із симетричної групи S_n існує таке натуральне число k , що $\sigma^k = e$, де e — одинична підстановка S_n .

7.75. Знайти порядок елемента групи:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$.

7.76. Скільки елементів порядку 6 міститься в групі:

a) S_5 ; б) A_5 ?

7.77. Довести, що кожна підстановка розкладається в добуток незалежних циклів, причому однозначно.

7.78. Довести, що кожна підстановка розкладається в добуток транспозицій.

7.79. Парна підстановка розкладається в добуток парного числа транспозицій, а непарна — в добуток непарного числа транспозицій.

7.80. Довести, що якщо деякий степінь циклу дорівнює одиничній підстановці, то показник степеня ділиться на довжину циклу (кількість елементів циклу).

7.81. Довести, що серед усіх степенів підстановки, рівних одиничній, найменший показник дорівнює найменшому спільному кратному довжин циклів, які входять до розкладання підстановки.

7.82. Знайти σ^{100} , якщо $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

7.83. Знайти σ^{150} , якщо $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

7.84. Довести, що в групі S_n :

- a) порядок непарної підстановки є парним числом;
- б) порядок будь-якої підстановки є найменшим спільним кратним довжин незалежних циклів, які входять у її розкладання.

7.85. Знайти підстановку χ із рівності $\sigma\chi\tau = \pi$, якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.86. Довести, що в будь-якій групі підстановок, що містить хоча б одну непарну підстановку, число парних підстановок дорівнює числу непарних.

7.87. Знайти всі підгрупи в групах

a) S_3 ; б) A_4 .

7.88. Довести, що якщо підгрупа H групи S_n містить одну з множин

$$\{(1 2), (1 3), \dots, (1 n)\}, \quad \{(1 2), (1 2 3 \dots n)\},$$

то $H = S_n$.

7.89. Довести, що

- а) симетрична група S_n при $n > 1$ породжується множиною всіх транспозицій $(i j)$;
- б) симетрична група S_n при $n > 1$ породжується транспозиціями: $(1 2), (1 3), \dots, (1 n)$;

- в)** знакозмінна група A_n при $n > 2$ породжується множиною всіх потрійних циклів $(i \ j \ k)$;
г) знакозмінна група A_n при $n > 2$ породжується потрійними циклами: $(1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 4), \dots, (1 \ 2 \ n)$.

7.90. Довести, що знакозмінна група A_4 не має підгрупи шостого порядку (таким чином, група G порядку n для деяких k , які ділять n , може не мати підгруп порядку k).

Твірні елементи. Циклічні групи

7.91. Знайти всі твірні елементи адитивної групи цілих чисел.

7.92. Доведіть, що група \mathbb{Q} не має скінченних систем твірних.

7.93. Які серед груп

- а)** \mathbb{Z}_{10}^* ; **б)** \mathbb{Z}_{11}^* ; **в)** \mathbb{Z}_{12}^* ; **г)** \mathbb{Z}_{14}^*

є циклічними?

7.94. Які з множин є системами твірних групи S_n :

- а)** $\{(12), (23), (34), \dots, (n-1, n)\}$;
б) $\{(12), (123\dots n)\}$?

7.95. Доведіть, що в групі \mathbb{Q} кожна скінченнопороджена підгрупа є циклічною.

7.96. Скільки різних циклічних підгруп містить група S_4 ?

7.97. Нехай G — скінчена група, $a \in G$. Довести, що $G = \langle a \rangle$ тоді і тільки тоді, коли порядок a дорівнює $|G|$.

7.98. Знайти число елементів порядку p^m у циклічній групі порядку p^n , де p — просте число і $0 < m \leq n$.

7.99. Нехай $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку n . Довести, що:

- а)** елементи a^k і a^m мають однакові порядки тоді і тільки тоді, коли $\text{НСД}(k, n) = \text{НСД}(m, n)$;
б) елемент a^k є твірним групи G тоді і тільки тоді, коли k та n взаємно прості;
в) порядок елемента a^k дорівнює $\frac{n}{d}$, де d — найбільший спільний дільник n та k ;
г) якщо n та k взаємно прості, то в G існує корінь $\sqrt[k]{a}$, тобто елемент a є k -тим степенем деякого елемента із G та навпаки;
і) в групі непарного порядку всі елементи є квадратними;
д) довільна підгрупа $H \subseteq G$ породжується елементом вигляду a^t , де $t | n$;
е) для довільного дільника t числа n існує єдина підгрупа $H \subseteq G$ порядку t .

7.100. Нехай $G = \langle a \rangle$ — скінчена циклічна група порядку n . Довести твердження:

- а)** порядок будь-якої підгрупи групи G ділить число n (порядок цієї групи);
б) підгрупа H порядку m містить в ролі твірних елементів всі елементи порядку m групи G .
Зокрема, $H = \langle a^{\frac{n}{m}} \rangle$.

7.101. Довести твердження:

- а)** якщо елементи a та b групи G переставні, тобто

$$ab = ba, \quad (7.15)$$

і мають скінченні взаємно прості порядки r та s , то їх добуток ab має порядок rs ;

- б)** якщо елементи a та b групи G переставні, мають скінченні порядки r та s і перетин їх циклічних підгруп містить лише одиницю e , тобто

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle, \quad (7.16)$$

то порядок добутку ab дорівнює найменшому спільному кратному r та s . Показати на прикладах, що для правильності останнього твердження кожної з умов (7.15) та (7.16) окрім недостатньо і що умова (7.15) не є наслідком умови (7.16), навіть для взаємно простих порядків елементів a та b :

- в) якщо порядки r та s елементів a та b взаємно прості, то умова (7.16) виконується;
- г) показати на прикладі, що без умови (7.16) порядок добутку ab не визначається однозначно порядками співмножників a та b .

7.102. У циклічної групі $\langle a \rangle$ порядку n знайти всі елементи g , які задовільняють умові $g^k = e$, і всі елементи порядку k при:

- а) $n = 24, k = 6$;
- б) $n = 24, k = 4$;
- в) $n = 100, k = 20$;
- г) $n = 100, k = 5$;
- г) $n = 360, k = 30$;
- д) $n = 360, k = 12$;
- е) $n = 360, k = 7$.

7.103. Знайти всі підгрупи в циклічній групі порядку

- а) 24;
- б) 100;
- в) 360;
- г) 125.

7.104. Знайти всі підгрупи *примарної циклічної групи*, тобто циклічної групи порядку p^k , де p — просте число.

7.105. Довести, що якщо в неодиничній групі всі неодиничні елементи мають одинаковий порядок p , то p — просте число.

7.106. Нехай G — скінчена група і $d(G)$ — найменше серед натуральних чисел s таких, що $g^s = e$ для довільного елемента $g \in G$ (*період групи G*). Довести, що:

- а) період $d(G)$ ділить порядок усієї групи G і дорівнює найменшому спільному кратному порядків елементів групи G ;
- б) якщо група G абелева, то існує елемент $g \in G$ порядку $d(G)$;
- в) скінчена абелева група є циклічною тоді і тільки тоді, коли $d(G) = |G|$.

Чи правильні твердження **б)** та **в)** для неабелевої групи?

7.107. Чи існує нескінчена група, всі елементи якої мають скінчений порядок?

7.108. *Періодичною частиною* групи G називається множина всіх її елементів скінченного порядку. Довести, що періодична частина абелевої групи є підгрупою, і з'ясувати, чи правильне це твердження для неабелевої групи? Також довести, що якщо в абелевій групі G є елементи нескінченного порядку і всі вони містяться в підгрупі H , то H співпадає з G .

7.109. Довести, що в абелевій групі множина елементів, порядки яких ділять фіксоване число n , є підгрупою. Чи правильне це твердження для неабелевої групи?

7.110. Знайти всі скінчені групи, в яких існує найбільша власна підгрупа.

7.111. Множина всіх підгруп групи G *утворює ланцюг*, якщо для будь-яких двох її підгруп одна міститься в іншій. Довести, що підгрупи циклічної групи порядку p^n , де p — просте число, утворюють ланцюг. Знайти всі скінчені групи, в яких підгрупи утворюють ланцюг. Знайти усі групи, у яких підгрупи утворюють ланцюг.

7.112. Зобразити групу \mathbb{Q} у вигляді об'єднання зростаючого ланцюжка циклічних підгруп.

7.113. Довести, що в довільній групі парного порядку існує елемент порядку 2.

Гомоморфізми та ізоморфізми груп

7.114. Знайти усі (з точністю до ізоморфізму) групи порядку:

- а) 3;
- б) 4;
- в) 6.

Написати таблиці множення цих груп і зобразити ці групи у вигляді груп підстановок.

7.115. Довести, що групи **а), б), в)** із задачі 7.29 ізоморфні між собою та ізоморфні групі **г)** із задачі 7.31.

7.116. Довести, що:

- а)** усі нескінчені циклічні групи ізоморфні між собою;
- б)** усі скінчені циклічні групи даного порядку n ізоморфні між собою.

7.117. Довести, що:

- а)** група додатних дійсних чисел щодо множення ізоморфна групі всіх дійсних чисел щодо додавання;
- б)** група додатних раціональних чисел щодо множення не ізоморфна групі всіх раціональних чисел щодо додавання.

7.118. Довести, що:

- а)** будь-яка скінченна група порядку n ізоморфна деякій групі підстановок n елементів;
- б)** будь-яка група ізоморфна групі деяких взаємно однозначних відображенів множини елементів цієї групи на себе.

7.119. Знайти всі (з точністю до ізоморфізму) групи, кожна з яких ізоморфна будь-якій своїй неоднічній підгрупі.

7.120. Знайти всі підгрупи:

- а)** циклічної групи порядку 6;
- б)** циклічної групи порядку 24;
- в)** четвертої групи;
- г)** симетричної групи S_3 ;
- г')** довести, що знакозмінна група четвертого степеня A_4 не має підгрупи шостого порядку. Таким чином, група G порядку n для деяких k , які ділять n , може не мати підгруп порядку k .

7.121. Знайти всі підгрупи групи G порядку 8, усі елементи якої, крім одиниці e , мають порядок 2.

Класи суміжності. Індекси підгруп.

7.122. Нехай $H \leq G$. Довести, що якщо $h \in H$, то $hH = H$.

7.123. Нехай H — підгрупа групи G і $a, b \in G$. Довести, що

- а)** якщо $b \in aH$, то $aH = bH$;
- а)** $aH = bH$ тоді і лише тоді, коли $b^{-1}a \in H$.

7.124. Знайти всі підгрупи симетричної групи S_3 та всі (ліві і праві) суміжні класи за цими підгрупами. Які з цих підгруп є нормальними дільниками?

7.125. Опишіть класи суміжності групи G за підгрупою H , якщо:

- а)** $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$;
- б)** $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$;
- в)** $G = \mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{R}^*$;
- г)** $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$;
- г')** $G = \mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{R}^+$;
- д)** $G = \mathbb{C}^*$, $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

7.126. Опишіть ліві й праві класи суміжності циклічної групи $\langle a \rangle$ порядку 24 за підгрупою $\langle a^4 \rangle$.

7.127. Знайти суміжні класи:

- а)** адитивної групи цілих чисел \mathbb{Z} за підгрупою $n\mathbb{Z}$ — чисел, кратних заданому натуральному числу n ;

- б) адитивної групи комплексних чисел за підгрупою цілих гаусових чисел, тобто чисел $a + bi$ з цілими a та b ;
- в) адитивної групи векторів площини (що виходять з початку координат) за підгрупою векторів, що лежать на осі абсцис Ox ;
- г) симетричної групи S_n за підгрупою підстановок, які залишають число n на місці.

7.128. Доведіть таке:

- а) будь-які дві підгрупи групи G взаємно простих порядків перетинаються по одиничній підгрупі;
- б) якщо порядок групи G є добутком двох простих чисел, то будь-які дві різні власні підгрупи групи G перетинаються по одиничній підгрупі.

7.129. Наведіть приклад таких груп G і підгрупи H , що:

- а) $|H| = \infty$, $|G : H| < \infty$;
- б) $1 < |H| < \infty$, $|G : H| = \infty$;
- в) $|H| = \infty$, $|G : H| = \infty$.

7.130. Для кожного натурального числа n описіть у групі \mathbb{C}^* усі підгрупи порядку n .

7.131. Нехай p, q — прості числа і $p < q$. Доведіть, що кожна група порядку pq містить підгрупу порядку p .

7.132. Використовуючи лише розклад на класи суміжності, доведіть, що група \mathbb{Q} не має власних підгруп скінченного індексу.

7.133. Доведіть, що для довільних підгруп N, H групи G виконується нерівність $|N : N \cap H| \leq |G : H|$.

7.134. Доведіть, що перетин скінченої кількості підгруп скінченного індексу теж є підгрупою скінченного індексу.

7.135. Нехай M — така підмножина групи G , що для довільних $x, y, z \in M$ елемент $xy^{-1}z$ також належить M . Доведіть, що M є класом суміжності групи G за певною підгрупою.

7.136. Нехай N і H — підгрупи скінченних індексів групи G . Доведіть, що група G розкладається в добуток $G = NH$ своїх підгруп N і H тоді й лише тоді, коли $|N : N \cap H| = |G : H|$.

7.137. Довести, що:

- а) підгрупа H порядку k скінченої групи G порядку $2k$ містить квадрати всіх елементів групи G ;
- б) підгрупа індексу два будь-якої групи G містить квадрати всіх елементів групи G .

7.138. Довести, що при $n > 1$ знакозмінна група A_n є єдиною підгрупою індексу два (тобто містить половину всіх елементів) в симетричній групі S_n . Навести приклад скінченої групи, що містить кілька підгруп індексу два.

Нормальні підгрупи.

7.139. Знайти всі підгрупи симетричної групи S_3 та всі (ліві і праві) суміжні класи за цими підгрупами. Які з цих підгруп є нормальними дільниками?

7.140. Нехай $H \leq G$. Довести, що $H \triangleleft G$ тоді і лише тоді, коли $g^{-1}hg \in H$ для кожного $g \in G$ і кожного $h \in H$.

7.141. Довести, що:

- а) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$;
- б) якщо $M = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$, то $M \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

7.142. Чи буде нормальнюю підгрупою групи $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ підгрупа:

- a)** усіх невироджених матриць з раціональними коефіцієнтами;
- б)** усіх скалярних матриць;
- в)** усіх діагональних матриць;
- г)** усіх верхніх трикутних матриць;
- г')** усіх матриць з додатними визначниками;
- д)** усіх ортогональних матриць?

7.143. Чи буде нормальнюю підгрупою групи $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ підгрупа:

- a)** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$;
- б)** усіх матриць з дійсними визначниками;
- в)** усіх матриць, визначники яких є коренями 13-го степеня з 1;
- г)** усіх унітарних матриць?

7.144. Доведіть, що добуток NH нормальної підгрупи $N \triangleleft G$ на довільну підгрупу $H \leq G$ теж буде підгрупою групи G .

7.145. Нехай порядок $|N|$ нормальної підгрупи N скінченної групи G є взаємно простим з її індексом $|G : N|$. Доведіть, що:

- а)** кожна підгрупа $H \leq G$, порядок $|H|$ якої є дільником числа $|N|$, міститься в N ;
- б)** N є єдиною підгрупою в G порядку $|N|$.

7.146. Довести, що будь-яка підгрупа індексу два є нормальним дільником.

7.147. Довести, що множина Z всіх елементів групи G , кожен з яких комутує з усіма елементами цієї групи, є нормальним дільником (*центр групи* G).

7.148. Елемент $aba^{-1}b^{-1}$ називається *комутатором елементів* a та b групи G . Довести, що всі комутатори та їхні добутки (з будь-яким скінченним числом співмножників) утворюють нормальній дільник K групи G (комутант даної групи).

7.149. Довести, що нормальній дільник H групи G , який має скінчений індекс j , містить всі елементи групи G , порядки яких взаємно прості з j . Показати на прикладі, що для підгрупи H , котра не є нормальним дільником, твердження може бути неправильним.

Факторгрупи

7.150. Довести, що:

- а)** $S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$;
- б)** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

7.151. Знайти факторгрупу \mathbb{C}^*/U , де $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

7.152. Нехай $H_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Довести, що $H_n/\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{R}^+$.

7.153. Знайти факторгрупи:

- а)** адитивної групи цілих чисел за підгрупою чисел, кратних заданому натуральному числу n ;
- б)** адитивної групи цілих чисел, кратних 3, за підгрупою чисел, кратних 15;
- в)** адитивної групи цілих чисел, кратних 4, за підгрупою чисел, кратних 24.

7.154. Для мультиплікативних груп невироджених квадратних матриць порядку n довести твердження:

- а)** факторгрупа групи дійсних матриць за підгрупою матриць з визначником, рівним ± 1 , ізоморфна мультиплікативній групі додатних чисел;
- б)** факторгрупа групи дійсних матриць за підгрупою матриць з додатними визначниками є циклічною групою другого порядку;

- в)** факторгрупа групи комплексних матриць за підгрупою матриць з визначниками, по модулю рівними одиниці, ізоморфна мультиплікативній групі додатних чисел;
- г)** факторгрупа групи комплексних матриць за підгрупою матриць з додатними визначниками ізоморфна мультиплікативній групі комплексних чисел, за модулем рівних одиниці.

7.155. Довести, що:

- а)** четверна група V є нормальним дільником симетричної групи S_4 ;
- б)** факторгрупа S_4/V ізоморфна симетричній групі S_3 .

7.156. Довести, що якщо $H \triangleleft G$, то $|G : H| = |G/H|$.

7.157. Довести, що факторгрупа G/H тоді і тільки тоді комутативна, коли H містить комутант K групи G (задача 7.148).

7.158. Довести **теорему Коші**: якщо порядок скінченної групи G ділиться на просте число p , то G містить елемент порядку p .

Кільця. Підкільця

7.159. Які з наступних числових множин утворюють кільце стосовно звичайних операцій додавання та множення:

- а)** множина \mathbb{Z} цілих чисел;
- б)** множина $n\mathbb{Z}$ — цілі числа, кратні заданому натуральному числу $n > 1$;
- в)** множина невід'ємних цілих чисел
- г)** множина \mathbb{Q} раціональних чисел;
- г')** множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники ділять фіксоване число $n \in \mathbb{N}$;
- д)** множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники не діляться на фіксоване просте число p ;
- е)** множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники є степенями фіксованого простого числа p ;
- е')** множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt{2}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$;
- ж)** множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt[3]{2}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$;
- з)** множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, де $a, b, c \in \mathbb{Q}$;
- и)** множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{Z}$;
- і)** множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{Q}$;
- ї)** множина всеможливих сум вигляду $a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_nz_n$, де a_1, a_2, \dots, a_n — раціональні числа, z_1, z_2, \dots, z_n — комплексні корені степеня n із 1.

7.160. Які з вказаних множин матриць утворюють кільце стосовно операцій матричного додавання та множення:

- а)** множина дійсних симетричних матриць порядку n ;
- б)** множина дійсних ортогональних матриць порядку n ;
- в)** множина верхніх трикутних матриць порядку $n \geq 2$;
- г)** множина матриць порядку $n \geq 2$, у яких два останні рядки нульові;
- г')** множина матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in \mathbb{Z}$, k — фіксоване ціле число;
- д)** множина матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$, k — фіксований елемент деякого кільця R ;
- е)** множина комплексних матриць вигляду $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$;