

4.6. Вправи до розділу 4

АРИФМЕТИЧНИЙ ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ТА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ

4.1. Знайти лінійну комбінацію $3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ векторів $\vec{a}_1 = (4, 1, 3, -2)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, -3, 2)$, $\vec{a}_3 = (16, 9, 1, -3)$.

4.2. Знайти \vec{x} з рівнянь:

- a)** $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 4\vec{x} = \vec{o}$, де $\vec{a}_1 = (5, -8, -1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, -1, 4, -3)$, $\vec{a}_3 = (-3, 2, -5, 4)$;
- б)** $3(\vec{a}_1 - \vec{x}) + 2(\vec{a}_2 + \vec{x}) = 5(\vec{a}_3 + \vec{x})$, де $\vec{a}_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (10, 1, 5, 10)$, $\vec{a}_3 = (4, 1, -1, 1)$.

4.3. Довести, що для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ та будь-яких чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ виконуються такі співвідношення:

- а)** $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- б)** $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$;
- в)** $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{o}$;
- г)** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- і)** $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
- д)** $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
- е)** $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- е)** $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, де $1 \in \mathbb{R}$.

4.4. Довести, що:

- а)** якщо система векторів містить лінійно залежну підсистему, то вона лінійно залежна;
- б)** якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її підсистема також лінійно незалежна.

4.5. Довести, що:

- а)** довільні k ($k > 1$) векторів лінійно залежні тоді і лише тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших;
- б)** якщо вектори a_1, \dots, a_k лінійно незалежні, а вектори a_0, a_1, \dots, a_k лінійно залежні, то вектор a_0 лінійно виражається через a_1, \dots, a_k ;
- в)** якщо вектори a_1, \dots, a_k лінійно незалежні і вектор a_0 не можна через них виразити, то система a_0, a_1, \dots, a_k лінійно незалежна;
- г)** якщо кожен з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ лінійно незалежні, то $s \leq r$;
- і)** будь-які $k > n$ векторів простору \mathbb{R}^n лінійно залежні.

4.6. Довести, що:

- а)** система векторів, яка складається з одного ненульового вектора, лінійно незалежна;
- б)** будь-яка система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна;
- в)** будь-яка система векторів, яка містить хоча б два пропорційні (або рівні) вектори, лінійно залежна.

4.7. Чи можна стверджувати, що кожен вектор лінійно залежної системи лінійно виражається через інші вектори цієї системи?

4.8. З'ясувати, чи є такі системи векторів лінійно незалежні:

- а)** $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (3, 6, 7)$;
- б)** $\vec{a}_1 = (4, -2, 6)$, $\vec{a}_2 = (6, -3, 9)$;
- в)** $\vec{a}_1 = (2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, -1, 5)$, $\vec{a}_3 = (1, -4, 3)$;
- г)** $\vec{a}_1 = (5, 4, 3)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, 2)$, $\vec{a}_3 = (8, 1, 3)$;
- і)** $\vec{a}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\vec{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$;
- д)** $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $\vec{a}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

4.9. З координат кожного вектора заданої системи векторів однієї і тієї ж вимірності виберемо координати, що стоять на певних (одних і тих же для всіх векторів) місцях, і збережемо їхній порядок; отриману систему векторів будемо називати *вкороченою* для першої системи, а першу систему будемо називати *подовженою* для другої.

Довести, що :

- а) вкорочена система будь-якої лінійно залежної системи векторів лінійно залежна;
- б) подовжена система будь-якої лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

4.10. Довести, що якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно залежні і вектор \vec{a}_3 не виражається лінійно через \vec{a}_1 та \vec{a}_2 , то вектори \vec{a}_1 та \vec{a}_2 різняться між собою лише числовим множником.

4.11. Нехай задана лінійно незалежна система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. З'ясувати, чи є лінійно залежними системи векторів :

- а) $\vec{b}_1 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4, \quad \vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4, \quad \vec{b}_3 = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4;$
- б) $\vec{b}_1 = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 - 5\vec{a}_3 - 2\vec{a}_4 + 4\vec{a}_5, \quad \vec{b}_2 = 8\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 5\vec{a}_4 - 10\vec{a}_5, \quad \vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 8\vec{a}_3 - \vec{a}_4 + 2\vec{a}_5;$
- в) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \dots, \quad \vec{b}_k = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k;$
- г) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3, \quad \dots, \quad \vec{b}_k = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \dots + k\vec{a}_k;$
- г') $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4, \quad \dots, \quad \vec{b}_{k-1} = \vec{a}_{k-1} + \vec{a}_k, \quad \vec{b}_k = \vec{a}_k + \vec{a}_1;$
- д) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \vec{a}_4, \quad \dots, \quad \vec{b}_{k-1} = \vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k, \quad \vec{b}_k = \vec{a}_k - \vec{a}_1.$

4.12. Задано вектори $\vec{a}_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $\vec{a}_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $\vec{a}_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Чи існують такі числа λ_{ij} , що вектори

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^5 \lambda_{ij} \vec{a}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

лінійно незалежні?

4.13. Знайти всі значення λ , при яких вектор \vec{b} лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, якщо:

- а) $\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \quad \vec{a}_2 = (3, 7, 8), \quad \vec{a}_3 = (1, -6, 1), \quad \vec{b} = (7, -2, \lambda);$
- б) $\vec{a}_1 = (4, 4, 3), \quad \vec{a}_2 = (7, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (4, 1, 6), \quad \vec{b} = (5, 9, \lambda);$
- в) $\vec{a}_1 = (3, 4, 2), \quad \vec{a}_2 = (6, 8, 7), \quad \vec{a}_3 = (15, 20, 11), \quad \vec{b} = (9, 12, \lambda);$
- г) $\vec{a}_1 = (3, 2, 5), \quad \vec{a}_2 = (2, 4, 7), \quad \vec{a}_3 = (5, 6, \lambda), \quad \vec{b} = (1, 3, 5);$
- г') $\vec{a}_1 = (3, 2, 6), \quad \vec{a}_2 = (5, 1, 3), \quad \vec{a}_3 = (7, 3, 9), \quad \vec{b} = (\lambda, 2, 5).$

4.14. Нехай задано систему векторів $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, де $i = 1, 2, \dots, s$; $s \leq n$. Довести, що якщо

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq j}}^s |a_{ij}|$$

для довільного $j = 1, \dots, s$, то задана система векторів лінійно незалежна.

4.15. Довести, що якщо цілочисельні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{Z}^n$ лінійно залежні над полем \mathbb{Q} , то існують такі цілі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, взаємно прості в сукупності, що

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Підпростори. Бази. Вимірність

4.16. Чи є підпростором відповідного векторного простору кожна з таких сукупностей векторів:

- а) всі вектори простору \mathbb{R}^n , координати яких цілі числа;
- б) всі вектори геометричної площини, кожен з яких лежить на одній з осей координат Ox і Oy ;
- в) всі вектори геометричної площини, кінці яких лежать на заданій прямій (початок будь-якого вектора, якщо не обумовлено протилежне, співпадає з початком координат);
- г) всі вектори геометричної площини, початки і кінці яких лежать на заданій прямій;

- г) всі вектори тривимірного геометричного простору, кінці яких не лежать на заданій прямій;
- д) всі вектори геометричної площини, кінці яких лежать в першій чверті системи координат;
- е) всі вектори з \mathbb{R}^n , координати x_1, x_2, \dots, x_n яких задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;
- ж) всі вектори з \mathbb{R}^n , координати x_1, x_2, \dots, x_n яких задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$;
- жк) всі вектори, які є лінійними комбінаціями заданих векторів: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ із \mathbb{R}^n ?

4.17. Перелічти всі підпростори тривимірного векторного простору.

4.18. Знайти всі бази системи векторів:

- а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 6, 0, 0)$;
- б) $\vec{a}_1 = (4, -1, 3, -2)$, $\vec{a}_2 = (8, -2, 6, -4)$, $\vec{a}_3 = (3, -1, 4, -2)$, $\vec{a}_4 = (6, -2, 8, -4)$;
- в) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\vec{a}_4 = (4, 5, 6, 7)$;
- г) $\vec{a}_1 = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 2, -6, 2)$, $\vec{a}_3 = (6, 3, -9, 3)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$;
- ж) $\vec{a}_1 = (3, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 2, 3)$, $\vec{a}_4 = (4, 3, 4)$, $\vec{a}_5 = (1, 1, 1)$.

4.19. У якому випадку система векторів володіє єдиною базою?

4.20. Знайти яку-небудь базу системи векторів і виразити через цю базу інші вектори системи:

- а) $\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$, $\vec{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$;
- б) $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\vec{a}_4 = (4, -1, -15, 17)$;
- в) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, -4)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, -4, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, -5, 8, -3)$, $\vec{a}_4 = (5, 26, -9, -12)$, $\vec{a}_5 = (3, -4, 1, 2)$;
- г) $\vec{a}_1 = (2, 3, -4, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (5, -3, -1, 8)$, $\vec{a}_4 = (3, 8, -9, -5)$;
- ж) $\vec{a}_1 = (2, 2, 7, -1)$, $\vec{a}_2 = (3, -1, 2, 4)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 3, 1)$;
- д) $\vec{a}_1 = (3, 2, -5, 4)$, $\vec{a}_2 = (3, -1, 3, -3)$, $\vec{a}_3 = (3, 5, -13, 11)$;
- е) $\vec{a}_1 = (2, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 1)$, $\vec{a}_4 = (2, 3)$;
- ж) $\vec{a}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{a}_2 = (3, 1, -5)$, $\vec{a}_3 = (4, 2, -1)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -7)$;
- жк) $\vec{a}_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 7, 8, -11, -3)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 1, -2, 3)$;
- з) $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 4, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, -3, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (5, -5, 12, 11, -5)$, $\vec{a}_4 = (1, -3, 6, 3, -3)$;
- и) $\vec{a}_1 = (4, 3, -1, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, -3, 2, -5)$, $\vec{a}_3 = (1, -3, 0, 1, -2)$, $\vec{a}_4 = (1, 5, 2, -2, 6)$.

4.21. Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ лінійно незалежні. Знайти всі бази системи векторів

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \vec{a}_4, \quad \dots, \quad \vec{b}_{k-1} = \vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k, \quad \vec{b}_k = \vec{a}_k - \vec{a}_1.$$

4.22. Довести, що кожен вектор підпростору можна записати у вигляді лінійної комбінації векторів бази цього підпростору однозначно.

4.23. Довести, що кожен підпростір простору \mathbb{R}^n має скінченну базу.

4.24. Скільки баз може мати ненульовий підпростір простору \mathbb{R}^n ?

4.25. Довести, що усі бази одного й того ж підпростору простору \mathbb{R}^n складаються з однакової кількості векторів.

4.26. Нехай U_1, U_2 — підпростори простору \mathbb{R}^n , причому підпростір U_1 міститься в підпросторі U_2 . Довести, що вимірність U_1 не вища вимірності U_2 , причому вимірності рівні тоді і тільки тоді, коли $U_1 = U_2$.

4.27. Довести, що якщо сума вимірностей підпросторів простору \mathbb{R}^n більше n , то ці підпростори мають спільний ненульовий вектор.

4.28. Довести, що такі системи векторів утворюють підпростори простору \mathbb{R}^n і знайти їхню базу та вимірність:

- а) всі n -вимірні вектори, у яких перша і остання координати рівні між собою;
- б) всі n -вимірні вектори, у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю;
- в) всі n -вимірні вектори, у яких координати з парними номерами рівні між собою;

г) всі n -вимірні вектори вигляду $(x, y, x, y, x, y, \dots)$, де x, y — довільні числа.

4.29. Знайти яку-небудь базу і вимірність підпростору U простору \mathbb{R}^n , якщо підпростір U задано рівнянням $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

4.30. Знайти вимірність та базу лінійних оболонок таких систем векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \quad \vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3);$

б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, -1, -1, -1), \quad \vec{a}_3 = (2, 2, 0, 0, -1), \quad \vec{a}_4 = (1, 1, 5, 5, 2),$

$\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0).$