

## 3.12. Вправи до розділу 3

Системи лінійних рівнянь з визначником, відмінним від нуля

3.1. Виписати розширену матрицю заданої системи лінійних рівнянь та розв'язати її:

a) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 17; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 3x + 5y = 2, \\ 5x + 9y = 4; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6; \end{cases}$$

г') 
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1; \end{cases}$$

д) 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 30, \\ 3x + 3y + 4z + 5t = 34, \\ 4x + 4y + 4z + 5t = 41, \\ x + y + z + t = 10; \end{cases}$$

е) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -2; \end{cases}$$

е) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1. \end{cases}$$

3.2. Виписати систему лінійних рівнянь, яка відповідає заданій розширеній матриці. Розв'язати систему, користуючись правилом Крамера:

а) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{array} \right);$$

б) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{array} \right);$$

в) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right);$$

г) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ -2 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & -4 & 9 \end{array} \right);$$

г') 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right);$$

д) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right);$$

е) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

3.3. ★ Довести твердження:

а) Приєднання до сумісної системи лінійних рівнянь лінійних комбінацій її рівнянь замінює систему на еквівалентну.

б) При елементарних перетвореннях рядків розширеної матриці сумісна система лінійних рівнянь замінюється на еквівалентну.

3.4. Як змінюються розв'язки системи лінійних рівнянь при елементарних перетвореннях стовпців основної матриці?

3.5. ★ Яку систему рівнянь найпростішого вигляду можна отримати, застосовуючи алгоритм Гаусса до рядків розширеної матриці заданої системи  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими, якщо основна матриця невироджена?

**3.6.** ★ Склади систему лінійних рівнянь із заданої розширеної матриці. Розв'язати систему (нижченнаведені матриці розбиті на 4 групи за порядком основної матриці):

*n = 2*

а) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array} \right); \quad$$
 б) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 13547 & 13647 & 1 \\ 28423 & 28523 & 1 \end{array} \right); \quad$$
 в) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right);$$

*n = 3*

г) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 7 & -2 & 14 \end{array} \right); \quad$$
 і) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 6 \end{array} \right); \quad$$
 д) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -9 \end{array} \right);$$

е) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right); \quad$$
 є) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ -2 & -7 & -3 & -2 \end{array} \right);$$

*n = 4*

ж) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right); \quad$$
 з) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right);$$

и) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad$$
 і) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -4 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & -9 & -7 & 1 \\ 4 & -9 & 0 & -5 & 10 \\ -2 & 7 & 5 & 8 & -7 \end{array} \right);$$

ї) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 19 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 18 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 13 \end{array} \right); \quad$$
 ї) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -4 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & -9 \end{array} \right);$$

к) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

*n = 5*

л) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & -2 \end{array} \right); \quad$$
 м) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 7 & -7 & 7 & 2 & 2 & -1 \\ 14 & 5 & 10 & 3 & 18 & 6 \\ 4 & -11 & 2 & 1 & -8 & -12 \\ 9 & -7 & 8 & 2 & 5 & 1 \end{array} \right);$$

н) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right); \quad$$
 о) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & -1 & 4 & 9 & 10 \\ 17 & 2 & -2 & 17 & 82 & 84 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 12 & 27 & 27 \\ 2 & 2 & -1 & 10 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

п) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right); \quad$$
 р) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right);$$

с) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right); \quad$$
 т) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right);$$

## Системи лінійних однорідних рівнянь

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

**3.7.** ★ Виписати матрицю коефіцієнтів заданої системи лінійних однорідних рівнянь. Розв'язати систему:

а)  $x - y = 0;$     б)  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0;$     в)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0;$

г)  $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x + 4y + 3z = 0; \end{cases}$

і)  $\begin{cases} 5x - 8y + 3z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0; \end{cases}$

д)  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$

е)  $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

ε)  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

ж)  $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

з)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 0; \end{cases}$

и)  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0; \end{cases}$

і)  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

**3.8.** ★ Довести, що:

а) сума двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь також є її розв'язком;

б) добуток довільного розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь на число також є розв'язком цієї ж системи.

**3.9.** ★ Нехай  $k$  — максимальне число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Зобразити  $k$  через розміри і ранг матриці системи. У якому випадку  $k = 0$ ?

**3.10.** ★ Скільки лінійно незалежних розв'язків має однорідна система лінійних рівнянь, якщо її матриця невироджена?

**3.11.** ★ Чи може однорідна система лінійних рівнянь виявитися несумісною?

**3.12.** ★ Сформулювати умови (і перевірити їх необхідність та достатність), при яких однорідна система лінійних рівнянь має: а) єдиний розв'язок; б) нескінченно багато розв'язків.

**3.13.** ★ Скласти і розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь, задану своєю основною матрицею (матрицею коефіцієнтів):

а)  $(1 \ 2);$     б)  $(1 \ 1 \ 1);$     в)  $(1 \ 3 \ 0 \ 1);$     г)  $(\begin{matrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{matrix});$

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}$

е)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ; ж)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; з)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

и)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ .

**3.14.** ★ Скласти однорідну систему лінійних рівнянь за заданою матрицею коефіцієнтів, що містить параметр. Розв'язати систему при довільних значеннях параметра:

а)  $\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5 - \lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 4 - \lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 4 & -4 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ -3 & -3 & -3 - \lambda \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ .

**3.15.** ★ Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь, задану своєю матрицею коефіцієнтів. Скласти і розв'язати відповідну спряжену систему:

а)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} & i - \sqrt{2} & 1 \\ 1 + i\sqrt{3} & i - \sqrt{3} & 1 \\ 1 + i\sqrt{4} & i - \sqrt{4} & 1 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

е)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ; ж)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; з)  $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$

и)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}$ ; і)  $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**3.16.** ★ Чи можуть задана однорідна система лінійних рівнянь і її спряжена система мати однакову кількість лінійно незалежних розв'язків?

**3.17.** ★ Чи можуть збігатися множини розв'язків заданої однорідної системи лінійних рівнянь та її спряженої?

**3.18.** ★ Довести, що однорідна система лінійних рівнянь має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли рядки основної матриці спряженої системи лінійно залежні.

**3.19.** ★ Знаючи одну фундаментальну матрицю  $\Phi$ , знайти загальний вигляд довільної фундаментальної матриці тієї ж системи рівнянь.

**3.20.** ★ Задана матриця є фундаментальною матрицею деякої однорідної системи лінійних рівнянь. Знайти хоча б одну нормальну фундаментальну матрицю:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.21.** ★ Задана матриця є фундаментальною матрицею деякої системи лінійних рівнянь. Знайти всі нормальні фундаментальні матриці цієї системи рівнянь:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.22.** ★ В системі рівнянь  $Ax = o$  ( $X$  — стовпець), яка має фундаментальну матрицю  $\Phi$ , виконано заміну невідомих  $x = Sy$  ( $\det S \neq 0$ ). Яка система рівнянь отримається для  $y$ ? Вкажіть фундаментальну матрицю розв'язків цієї системи.

**3.23.** ★ Знайти хоча б одну однорідну систему лінійних рівнянь, для якої дана матриця є фундаментальною:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{г')} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.24.** ★ Знайти всі однорідні системи рівнянь, еквівалентні заданій системі  $Ax = o$ .

**3.25.** ★ Знайти всі однорідні системи рівнянь, для яких задана матриця  $\Phi$  є фундаментальною.

**3.26.** ★ Задана матриця  $A$ , рядки якої лінійно незалежні. Знизу до неї приписали транспоновану фундаментальну матрицю системи  $Ax = o$ . Довести, що детермінант отриманої матриці відмінний від нуля.

## Системи лінійних неоднорідних рівнянь

**3.27.** ★ Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\text{а)} 2x - 3y = 4; \quad \text{б)} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \quad \text{в)} \begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ 3x + z = 4; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y + \sqrt{2}z = 1 + \sqrt{2}, \\ x + (3 - 2\sqrt{2})y + (\sqrt{2} - 2)z = 1; \end{cases} \quad \text{г')} \begin{cases} x + 2y + 3z = -4, \\ 2x + 3y + 4z = 1, \\ 3x + 4y + 5z = 6; \end{cases}$$

д)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1; \end{cases}$

е)  $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4; \end{cases}$

ж)  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2; \end{cases}$

з)  $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 20, \\ 13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 = 11, \\ 4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 = -12, \\ x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7. \end{cases}$

3.28. ★ Довести, що :

- різниця двох розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком відповідної однорідної системи;
- сума будь-якого розв'язку неоднорідної системи лінійних рівнянь і будь-якого розв'язку відповідної однорідної системи також є розв'язком заданої неоднорідної системи.

3.29. ★ На скільки одиниць ранг основної матриці системи може відрізнятися від рангу розширеної?

3.30. ★ Нехай система  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими несумісна, а її основна матриця має ранг  $n$ . До якого найпростішого вигляду можна привести цю систему рівнянь, застосовуючи до рядків розширеної матриці алгоритм Гаусса?

3.31. ★ Сформулювати необхідну і достатню умову того, що система  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими має єдиний розв'язок.

3.32. ★ Складти систему лінійних рівнянь за заданою розширеною матрицею. Розв'язати систему або встановити її несумісність. (Наведені нижче матриці розбиті на 4 групи за числом стовпців основної матриці. Всередині кожної групи матриці впорядковані за кількістю рядків.)

$n = 3$

а)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right); \quad$  б)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right); \quad$  в)  $\left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & -10 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right);$

г)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right); \quad$  д)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 & 0 \\ 4 & -9 & 9 & 1 \end{array} \right); \quad$  е)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right);$

ж)  $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & 21 & 17 & 10 \\ 6 & -26 & -21 & 9 \end{array} \right); \quad$  з)  $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 & 1 \\ 6 & -26 & -21 & -1 \end{array} \right); \quad$  и)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right);$

ж)  $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 6 & 3 \\ 1 & 21 & -26 & 9 \\ 1 & 17 & -21 & 6 \end{array} \right); \quad$  з)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right); \quad$  и)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \end{array} \right);$

$n = 4$

і)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -1 \end{array} \right)$ ;    і)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 & 2 \end{array} \right)$ ;    ї)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \end{array} \right)$ ;

к)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \\ 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \end{array} \right)$ ;    л)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$ ;

м)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \end{array} \right)$ ;    н)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array} \right)$ ;

о)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$ ;    п)  $\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & -4 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right)$ ;

п)  $\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & 2 \\ 8 & -1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right)$ ;    с)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & 4 & 11 & -14 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 30 \end{array} \right)$

$n = 5$

т)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \end{array} \right)$ ;    у)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right)$ ;

ф)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right)$ ;    х)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 1 \end{array} \right)$ ;

ц)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & -3 \end{array} \right)$ ;    ч)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 & -5 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 & 1 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right)$ ;

ш)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right)$ ;    щ)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 17 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 12 & 14 \end{array} \right)$ ;

ь)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right)$ ;    ю)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 100 & 10^3 & 10^4 & 30000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 3000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 800 & 100 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 90 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 3 \end{array} \right)$ ;

$n = 6$

я)  $\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ .

3.33. ★ Скласти систему лінійних рівнянь за заданою розширененою матрицею, яка містить параметр. Знайти всі значення параметра, при яких система сумісна, і розв'язати її:

а)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array} \right)$ ;    б)  $\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -3 & \lambda \\ 4 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array} \right)$ ;    в)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & \lambda \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right)$ ;

г) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & \lambda \end{array} \right).$$

# ЛІНІЙНА

**3.34.** ★ Описати всі лінійні комбінації розв'язків заданої неоднорідної системи лінійних рівнянь, які є розв'язками цієї ж системи.

**3.35.** ★ Описати всі такі лінійні комбінації розв'язків заданої лінійної неоднорідної системи рівнянь, які є розв'язками відповідної однорідної системи.

**3.36.** ★ Нехай стовпчик з вільних членів лінійної системи рівнянь дорівнює сумі стовпчиків її основної матриці. Вказати який-небудь частковий розв'язок системи.

**3.37.** ★ Нехай стовпець з вільних членів лінійної системи рівнянь збігається з останнім стовпцем її основної матриці. Вказати який-небудь частковий розв'язок системи.

**3.38.** ★ Нехай  $x, y$  — стовпчики розв'язків систем рівнянь  $Ax = a, Ay = b$  відповідно і  $\alpha, \beta$  — деякі числа. Якій системі рівнянь задовольняє:

- а)  $z = \alpha x$ ; б)  $z = x + y$ ; в)  $z = \alpha x + \beta y$ .

## Умови сумісності системи лінійних рівнянь

# ЛІНУ

**3.39.** ★ Довести, що якщо стовпці основної матриці лінійно незалежні, то система лінійних рівнянь має не більше, ніж один розв'язок.

**3.40.** ★ Довести, що якщо рядки основної матриці лінійно незалежні, то система рівнянь сумісна при будь-якому стовпці вільних членів.

**3.41.** ★ Довести таке твердження: якщо система лінійних рівнянь сумісна при будь-якому стовпці вільних членів, то рядки її основної матриці лінійно незалежні.

**3.42.** ★ Довести, що завжди має місце один з двох випадків: або система лінійних рівнянь сумісна при будь-якому стовпці вільних членів, або її спряженна однорідна система має ненульовий розв'язок (альтернатива Фредгольма).

**3.43.** ★ Сформулювати умови (і довести їх необхідність та достатність), яким повинна задовольняти основна матриця для того, щоб число розв'язків системи лінійних рівнянь, залежно від стовпця  $b$  вільних членів, дорівнювало:

- а) 0 або 1; б) 1 або  $\infty$ ; в) 0 або  $\infty$ ; г) 1 при всіх  $b$ .

**3.44.** ★ Система лінійних рівнянь задана своєю розширеною матрицею. Перевірити сумісність цієї системи, користуючись теоремою Фредгольма (задача 4.4) і результатом задачі 4.9 для відповідної спряженої системи рівнянь:

а) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{array} \right); \quad$$
 б) 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right); \quad$$
 в) 
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

**3.45.** ★ Система рівнянь задана своєю розширеною матрицею, яка містить параметр. Застосовуючи теорему Фредгольма, знайти всі значення параметра, при яких система сумісна, і розв'язати її:

а) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 & \alpha^2 \\ 3 & 4 & 5 & \alpha^3 \end{array} \right); \quad$$
 б) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & \alpha \\ 6 & -4 & 4 & 3 & \alpha^2 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & \alpha^3 \end{array} \right); \quad$$
 в) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & 3 & 1 & \alpha^2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & \alpha^3 \end{array} \right).$$

**3.46.** ★ Система рівнянь задана своєю розширеною матрицею

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & \mu \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 & \mu^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} & \mu^{n-1} \end{array} \right),$$

яка залежить від параметрів  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu$ . Описати множину значень параметрів, при яких система сумісна, і розв'язати її.

### Еквівалентні системи рівнянь

**3.47.** ★ Довести, що якщо еквівалентні сумісні системи лінійних неоднорідних рівнянь, то еквівалентні і відповідні однорідні системи.

**3.48.** ★а) Довести, що нетривіальні<sup>5</sup> рівняння  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  і  $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$  еквівалентні тоді і лише тоді, коли  $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1$ .

б) Довести, що нетривіальні рівняння  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a$  і  $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = b$  еквівалентні тоді і лише тоді, коли  $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n & a \\ b_1 & \dots & b_n & b \end{pmatrix} = 1$ .

в) Сформулювати ознаку попарної еквівалентності  $k$  лінійних рівнянь.

**3.49.** ★а) Довести, що системи лінійних рівнянь  $Ax = o$ ,  $Bx = o$  еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^\square = \text{rang } A = \text{rang } B.$$

б) Довести, що сумісні системи лінійних рівнянь  $Ax = a$ ,  $Bx = b$  еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}^\square = \text{rang } A = \text{rang } B.$$

**3.50.** ★ Перевірити еквівалентність систем рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

**3.51.** ★ Перевірити, чи еквівалентні системи рівнянь, які задані розширеними матрицями:

а)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{i} \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right);$

б)  $\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{i} \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right);$

в)  $\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & -26 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -11 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & -67 \end{array} \right) \xrightarrow{i} \left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 & -5 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 & 1 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right).$

**3.52.** ★ Перевірити еквівалентність всіх систем заданої сукупності (кожна система рівнянь задана розширеною матрицею):

<sup>5</sup>Нагадаємо, що лінійне рівняння *нетривіальне*, якщо хоча б один із коефіцієнтів біля невідомих відмінний від 0.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \\ 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & -6 & 11 & -9 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 7 & -15 & 17 \end{array} \right).$$

**3.53.** ★а) Припустимо, що додавання до заданої однорідної системи лінійних рівнянь ще деякого числа лінійних однорідних рівнянь не змінює множини її розв'язків. Довести, що додавання рівняння є лінійними комбінаціями рівнянь заданої системи.

б) Довести це ж твердження для сумісної системи лінійних неоднорідних рівнянь.

**3.54.** ★а) Довести, що дві однорідні системи лінійних рівнянь еквівалентні тоді і тільки тоді, коли рівняння кожної з них є лінійними комбінаціями рівнянь іншої системи.

б) Довести це ж твердження для сумісних систем лінійних неоднорідних рівнянь.

## Матричні рівняння

# 1 семестр

**3.55.** Розв'язати систему матричних рівнянь:

а)  $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

б)  $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

**3.56.** Нехай матриці  $A$  та  $C$  невироджені. Розв'язати матричні рівняння:

а)  $AX = O;$     б)  $AX = B;$     в)  $XA = B;$     г)  $AXC = B;$     г')  $A(X + C) = B.$

**3.57.** Розв'язати матричні рівняння:

а)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$     б)  $X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix};$     г)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$

г')  $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$     д)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

е)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$     е')  $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

ж)  $X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$     з)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

и)  $X \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix};$     и')  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix};$

ї)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$     ї')  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

к)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix};$     л)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$

м)  $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

h) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**3.58.** Нехай  $A$  — квадратна матриця. Довести, що матричне рівняння  $AX = B$  має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли матриця  $A$  невироджена.

**3.59.** Нехай  $A$  — матриця розміру  $m \times n$ , причому  $m \neq n$ . Довести, що для будь-якого натурального числа  $k$  існує така матриця  $B$  розміру  $m \times k$ , що матричне рівняння  $AX = B$  не має однозначного розв'язку.

**3.60.** Довести, що система рівнянь

**1 семестр**

де  $X_j$  та  $B_i$  — матриці порядку  $p \times q$ , має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли  $\det [a_{ij}] \neq 0$ .

**лну**

**Для підготовки**

**до колоквіуму,**

**а не для**

**списування**

**на ньому**