

2.12. Вправи до розділу 2

Визначники 2-го та 3-го порядків

2.1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; г') $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$; і) $\begin{vmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}$; ії) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$; її) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

2.2. Довести, що для рівності нулю визначника другого порядку необхідно і достатньо, щоб його рядки (стовпчики) були пропорційні.

2.3. Довести, що при дійсних a, b, c корені рівняння $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ будуть дійсними.2.4. Довести, що значення дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$, де хоча б одне із чисел c, d відмінне від нуля, тоді і лише тоді не залежить від значення x , коли $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.2.5. Довести, що квадратна матриця X другого порядку є розв'язком рівняння

$$X^2 - (\text{tr } X)X + \det X = O.$$

2.6. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; г') $\begin{vmatrix} 1 & 211 & -3 \\ 0 & 5 & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}$.

2.7. При якій умові правильна рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 0 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

2.8. Довести, що визначник третього порядку, утворений із чисел 1 та -1 , є парним числом.

2.9. Якого найбільшого значення може набути визначник третього порядку, утворений

- а) із чисел 1 та -1 ;
б) із чисел 1 та 0.

2.10. За допомогою прямого обчислення за правилом трикутника (або за правилом Саррюса) довести такі властивості визначників 3-го порядку:

- а) якщо у визначнику 3-го порядку помінити ролями відповідні рядки та стовпці (тобто транспонувати його матрицю), то визначник не зміниться;
б) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то й сам визначник дорівнює нулю;

- в)** якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те ж число, то й весь визначник помножиться на це число;
- г)** якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак;
- г')** якщо два рядки (стовпці) визначника однакові, то він дорівнює нулю;
- д)** якщо усі елементи одного рядка пропорційні відповідним елементам іншого рядка, то визначник дорівнює нулю (це ж правильно і для стовпців);
- е)** якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох складових, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім заданого, залишились незмінними, а у заданому рядку в першому визначнику знаходяться перші, а в другому — другі складові (це ж правильно і для стовпців);
- е')** якщо до елементів одного рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і теж число, то визначник не зміниться (це ж правильно і для стовпців);
- ж)** довести, що якщо один рядок (стовпчик) визначника 3-го порядку є лінійною комбінацією решти рядків (стовпців), то визначник дорівнює нулю;
- з)** користуючись попередньою задачею, показати на прикладі, що на відміну від визначників 2-го порядку (див. задачу 2.2) для рівності нулю визначника 3-го порядку пропорційність двох рядків (стовпців) уже не є необхідною.

2.11. Користуючись властивостями визначників 3-го порядку, вказаними в задачі 2.10, обчислити такі визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^2 & a_1^2 + b_1^2 & a_1 b_1 \\ (a_2 + b_2)^2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 b_2 \\ (a_3 + b_3)^2 & a_3^2 + b_3^2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}; \quad \text{г')} \begin{vmatrix} a + b & c & 1 \\ b + c & a & 1 \\ c + a & b & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}, \text{де } \alpha, \beta, \gamma \text{ — корені рівняння } x^3 + px + q = 0.$$

2.12. Не розкриваючи визначники, довести такі тотожності:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \text{г')} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b);$$

$$\text{г')} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + bc + ca) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Перестановки

списування

2.13. Скільки інверсій у таких перестановках:

- а)** (2, 3, 5, 4, 1); **б)** (6, 3, 1, 2, 5, 4);
- в)** (1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8); **г)** (7, 5, 6, 4, 1, 3, 2);
- г')** (1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, 2, 4, 6, 8, ..., $2n$);
- д)** (2, 4, 6, ..., $2n$, 1, 3, 5, ..., $2n - 1$).

2.14. Визначити число інверсій і вказати загальну ознаку тих чисел n , для яких перестановки парні, і тих, для яких вони непарні:

- а) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;
- б) $(3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$;
- в) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$;
- г) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;
- г') $(1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n)$;
- д) $(1, 5, \dots, 4n-3, 3, 7, \dots, 4n-1, 2, 6, \dots, 4n-2, 4, 8, \dots, 4n)$;
- е) $(4n, 4n-4, \dots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \dots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \dots, 6, 2, 4n-3, 4n-7, \dots, 5, 1)$.

2.15. Скільки різних інверсій можна утворити з чисел $1, 2, \dots, n$.

2.16. В якій перестановці чисел $1, 2, \dots, n$ кількість інверсій найбільша і чому вона дорівнює?

2.17. Скільки інверсій утворює

- а) число 1, розташоване на k -ому місці перестановки;
- б) число n , розташоване на k -ому місці в перестановці чисел $1, 2, 3, \dots, n$?

2.18. Чому дорівнює сума числа інверсій і числа порядків в довільній перестановці чисел $1, 2, 3, \dots, n$?

2.19. Для яких чисел n парність числа інверсій і числа порядків у всіх перестановках чисел $1, 2, 3, \dots, n$ однаакова і для яких протилежна?

2.20. Довести, що число інверсій в перестановці a_1, a_2, \dots, a_n дорівнює числу інверсій в тій перестановці індексів $1, 2, \dots, n$, яка отримується, якщо дану перестановку замінити вихідним розташуванням.

2.21. Довести, що від однієї перестановки a_1, a_2, \dots, a_n до іншої перестановки b_1, b_2, \dots, b_n тих же елементів можна перейти шляхом не більше, ніж $n - 1$ транспозицій.

2.22. Навести приклад перестановки чисел $1, 2, 3, \dots, n$, яку не можна привести в нормальне розташування шляхом менше, ніж $n - 1$ транспозиції, і довести це.

2.23. Довести, що від однієї перестановки a_1, a_2, \dots, a_n до будь-якої іншої перестановки b_1, b_2, \dots, b_n тих же елементів можна перейти шляхом не більше, ніж $\frac{n(n-1)}{2}$ суміжних транспозицій (тобто транспозицій сусідніх елементів).

2.24. Нехай в перестановці $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ кількість інверсій дорівнює k . Скільки інверсій буде в перестановці $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$.

2.25. Скільки інверсій у всіх перестановках n елементів разом?

2.26. Довести, що транспозиція будь-яких двох елементів перестановки змінює її парність.

2.27. Скільки існує різних парних (непарних) перестановок чисел $1, 2, \dots, n$?

2.28. Довести, що від будь-якої перестановки чисел $1, 2, 3, \dots, n$, яка містить k інверсій, можна перейти до вихідного розташування шляхом k суміжних транспозицій, але не можна перейти шляхом меншої кількості таких транспозицій.

2.29. Довести, що для довільного цілого числа k ($0 \leq k \leq C_n^2$) існує перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$, число інверсій якої дорівнює k .

2.30. Позначимо через (n, k) число перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, кожна із яких містить k інверсій. Вивести для числа (n, k) рекурентне співвідношення

$$(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + \dots + (n, k-n),$$

де треба покласти $(n, j) = 0$ при $j > C_n^2$ і при $j < 0$.

2.31. Довести, що число перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, які містять k інверсій, дорівнює числу перестановок тих же чисел, які містять $C_n^2 - k$ інверсій.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Означення та властивості визначників довільного порядку

2.32. З'ясувати, які з наведених нижче добутків входять у визначники відповідних порядків і з яким знаками:

- а) $a_{13} a_{22} a_{31} a_{46} a_{55} a_{64}$; б) $a_{43} a_{21} a_{35} a_{12} a_{54}$; в) $a_{61} a_{23} a_{45} a_{36} a_{12} a_{54}$;
- г) $a_{27} a_{36} a_{51} a_{74} a_{25} a_{43} a_{62}$; г') $a_{33} a_{16} a_{72} a_{27} a_{55} a_{61} a_{44}$;
- д) $a_{12} a_{23} a_{34} \dots a_{n-1,n} a_{kk}$, $1 \leq k \leq n$;
- е) $a_{12} a_{23} a_{34} \dots a_{n-1,n} a_{n1}$; е) $a_{12} a_{21} a_{34} a_{43} \dots a_{2n-1,2n} a_{2n,2n-1}$;
- ж) $a_{11} a_{2,n} a_{3,n-1} \dots a_{n2}$; з) $a_{13} a_{22} a_{31} a_{46} a_{55} a_{64} \dots a_{3n-2,3n} a_{3n-1,3n-1} a_{3n,3n-2}$.

2.33. Вибрати значення i та k так, щоб добуток

- а) $a_{62} a_{i5} a_{33} a_{k4} a_{46} a_{21}$ входив у визначник 6-го порядку зі знаком мінус;
- б) $a_{47} a_{63} a_{1i} a_{55} a_{7k} a_{24} a_{31}$ входив у визначник 7-го порядку зі знаком плюс.

2.34. Вибрати значення i, j, k так, щоб добуток $a_{51} a_{i6} a_{1j} a_{35} a_{44} a_{6k}$ входив у визначник 6-го порядку зі знаком мінус.

2.35. Знайти члени визначника 4-го порядку, які містять елемент a_{32} і входять у визначник зі знаком плюс.

2.36. Знайти члени визначника

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

які містять x^4 і x^3 .

2.37. З яким знаком входить у визначник n -го порядку добуток елементів

- а) головної діагоналі;
- б) бічної діагоналі?

2.38. Користуючись лише означенням, обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.39. Довести, що якщо у визначнику порядку n на перетині деяких r рядків та s стовпців ($r+s > n$) стоять нулі, то визначник дорівнює нулю.

2.40. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

де a_1, a_2, \dots, a_n — різні числа.

2.41. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

2.42. Знайти елемент визначника n -го порядку, який симетричний елементу a_{ik} ($1 \leq i, k \leq n$) стосовно

- а)** бічної діагоналі;
- б)** «центра» визначника.

2.43. Як зміниться визначник n -го порядку, якщо

- а)** його перший стовпчик переставити на останнє місце, а решта стовпчиків пересунути вліво, зберігаючи їх розташування;
- б)** записати його рядки у зворотному порядку;
- в**) змінити знак всіх його елементів на протилежний;
- г)** повернути його матрицю на 90° навколо «центра» (проти годинникової стрілки)?

2.44. Як зміниться визначник, якщо

- а)** кожен його елемент замінити елементом, симетричним з заданим стосовно «центра» визначника;
- б)** кожен його елемент замінити елементом, симетричним з заданим стосовно бічної діагоналі;
- в)** кожен його елемент a_{ik} помножити на c^{i-k} ($c \neq 0$)?

2.45. Довести, що визначник не зміниться, якщо

- а)** до кожного його рядка, крім останнього, додати наступний рядок;
- б)** до кожного його стовпчика, розпочинаючи з другого, додати попередній стовпчик;
- в)** від кожного рядка, крім останнього, відняти усі наступні рядки;
- г)** до кожного стовпчика, розпочинаючи з другого, додати усі попередні стовпчики.

2.46. Як зміниться визначник, якщо

- а)** від кожного рядка, крім останнього, відняти наступний рядок, а від останнього рядка відняти початковий перший рядок;
- б)** до кожного стовпчика, розпочинаючи з другого, додати попередній стовпчик і в той же час до першого додати останній?

2.47. Довести, що *кососиметричний визначник* (тобто визначник кососиметричної матриці) непарного порядку n дорівнює нулю.

2.48. Назовемо місце елемента a_{ij} визначника парним або непарним залежно від того чи буде сума $i+j$ парною чи непарною. Знайти кількість елементів визначника порядку n , які розміщені на парних і на непарних місцях.

2.49. Довести, що в кожний член визначника входить парне число елементів, які займають непарне місце; елементів ж, які займають парне місце, входить парне число, якщо визначник парного порядку, і непарне число, якщо визначник непарного порядку.

2.50. Довести, що визначник не зміниться, якщо змінити знак всіх елементів на непарних місцях; якщо ж змінити знак всіх елементів на парних місцях, то визначник не зміниться, якщо він парного порядку, і змінить знак, якщо непарного порядку.

2.51. Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

2.52. Знайти суму всіх визначників порядку $n \geq 2$, у кожному з яких в кожному рядку і стовпчику один елемент дорівнює одиниці, а решта дорівнюють нулю. Скільки таких визначників?

2.53. Знайти суму визначників порядку $n \geq 2$

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^n \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{vmatrix},$$

де сума береться за всіма значеннями k_1, k_2, \dots, k_n , які незалежно один від одного змінюються від 1 до n .

2.54. Числа 1081, 1403, 2093 і 1541 діляться на 23. Пояснити без обчислень, чому число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

також ділиться на 23.

2.55. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 і 289 діляться на 17. Довести, що визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

також ділиться на 17.

2.56. Обчислити заданий визначник, не розгортаючи його:

$$\begin{vmatrix} r & s & t & 1 \\ s & t & r & 1 \\ t & r & s & 1 \\ \frac{s+t}{2} & \frac{t+r}{2} & \frac{r+s}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

списування

2.57. Не розгортаючи визначники, довести тотожності:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix};$$

на ньому

б) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

2.58. Чи правильні тотожності:

- а) $\det(A + B) = \det A + \det B$;
- б) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;
- в) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (n — порядок матриці);
- г) $\det(\lambda A^k) = (\det A)^k$?

2.59. Нехай $A = [a_{ij}]$ — квадратна матриця порядку n , M_{ij} — доповняльний мінор її елемента a_{ij} , A_{ij} — алгебричне доповнення елемента a_{ij} ; із них утворено матриці $B = [M_{ij}]$, $C = [A_{ij}]$. Довести, що $\det B = \det C = (\det A)^{n-1}$.

2.60. Довести, що для довільної квадратної матриці A з дійсними коєфіцієнтами виконується нерівність $\det(AA^\top) \geq 0$.

Розкладання визначників за елементами рядка або стовпця

2.61. Розкладавши за третім рядком, обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.62. Розкладавши за другим стовпчиком, обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.63. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$

2.64. Користуючись властивостями визначників, включаючи розклад за рядком або стовпчиком, довести тотожності:

а) $\begin{vmatrix} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & \sin \frac{\alpha+\beta}{2} & \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos \frac{\beta-\gamma}{2} & \sin \frac{\beta+\gamma}{2} & \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma));$

б) $\begin{vmatrix} \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \psi & \sin \psi \cos \psi & \cos^2 \psi \\ \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{vmatrix} = \sin(\varphi - \psi) \cos \varphi \cos \psi + \sin(\psi - \theta) \cos \psi \cos \theta + \sin(\theta - \varphi) \cos \theta \cos \varphi;$

в) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3;$

г) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2;$

г') $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d;$

д) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} = -4(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2(xy + xz + xu + yz + yu + zu)).$

Визначники та елементарні перетворення

2.65. Обчисліти визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix};$ г) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix};$

г') $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix};$ д) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix};$ е) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix};$ и) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix};$
 е) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix};$ ж) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix};$ з) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix};$ и) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix};$
 і) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix};$ і) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix};$ ї) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix};$ к) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix};$

л) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix};$ м) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix};$ н) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix};$

о) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix};$ п) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix};$ р) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix};$

с) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix};$ т) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix};$ у) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

$$\Phi) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

2.66. Обчислити визначники методом зведення до трикутного вигляду (всюди, де з вигляду визначника незрозуміло, якого він порядку, передбачається, що його порядок дорівнює n):

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}; \quad g) \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad ж) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}; \quad з) \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

Мінори, алгебричні доповнення, теорема Лапласа

2.67. Скільки мінорів k -го порядку містить визначник порядку n ?

2.68. Показати, що розкладання Лапласа визначника порядку n за будь-якими k рядками (стовпцями) збігається з його розкладанням за іншими $n-k$ рядками (стовпцями).

2.69. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити визначники:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$g) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

з) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{и) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{і) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

ї) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ y_1 & y_2 & \cos \beta & \sin \beta \\ z_1 & z_2 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}; \quad \text{й) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & x_1 & y_3 & y_2 \\ b & b' & y_3 & x_2 & y_1 \\ c & c' & y_2 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}; \quad \text{к) } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

л) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{м) } \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}; \quad \text{н) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$

о) $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \cdots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \cdots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \cdots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$

2.70. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити наступні визначники, попередньо їх перетворивши:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

e)
$$\begin{vmatrix} 1+x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & 1+x \\ x & 1+x & \cdots & x & x & \cdots & 1+x & x \\ \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & 1+x & 1+x & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & 1+2x & 1+x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots \\ x & 1+2x & \cdots & x & x & \cdots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & 1+x \end{vmatrix}$$

(порядок визначника $2n$).

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Обчислення визначників спеціального вигляду

2.71. Обчислити визначник порядку n , якщо:

- a) його елементи задано умовами $a_{ij} = \min\{i, j\}$;
- б) його елементи задано умовами $a_{ij} = \max\{i, j\}$;
- в) його елементи задано умовами $a_{ij} = |i - j|$.

2.72. Обчислити визначники методом виділення лінійних множників (всюди, де з вигляду визначника незрозуміло, якого він порядку, передбачається, що його порядок дорівнює n):

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}; \quad$$
 б)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}; \quad$$
 в)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1-x \end{vmatrix};$$

г)
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad$$
 г')
$$\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix};$$

д)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}; \quad$$
 е)
$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}.$$

2.73. Обчислити визначники методом рекурентних співвідношень:

a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad$$
 б)
$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix};$$

в)
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}; \quad$$
 г)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix};$$

г')
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}; \quad$$
 д)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{e) } \left| \begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{array} \right| ; \quad \text{e)} \left| \begin{array}{ccccc|c} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{array} \right| .$$

2.74. Обчислити визначники методом зображення їх у вигляді суми визначників:

$$\text{a) } \left| \begin{array}{cccc|c} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{array} \right| ; \quad \text{б) } \left| \begin{array}{ccccc|c} x + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x + a_n \end{array} \right| ;$$

$$\text{в) } \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{array} \right| ; \quad \text{г) } \left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n & a_n \end{array} \right| ;$$

$$\text{г) } \left| \begin{array}{ccccc|c} x_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & x_2 & a_2 b_3 & \cdots & a_2 b_n \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & x_3 & \cdots & a_3 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \cdots & x_n \end{array} \right| .$$

2.75. Обчислити визначники (всюди, де з вигляду визначника незрозуміло, якого він порядку, передбачається, що його порядок дорівнює n):

$$\text{а) } \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{array} \right| ; \quad \text{б) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{array} \right| ;$$

$$\text{в) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{array} \right| ; \quad \text{г) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{array} \right| ;$$

$$\text{г) } \left| \begin{array}{cccc|c} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{array} \right| ; \quad \text{д) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{array} \right| ;$$

$$\text{е) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right| ; \quad \text{е) } \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{array} \right| ;$$

ж) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix};$ з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix};$

и) $\begin{vmatrix} 1 & \sin \varphi_1 & \sin^2 \varphi_1 & \dots & \sin^{n-1} \varphi_1 \\ 1 & \sin \varphi_2 & \sin^2 \varphi_2 & \dots & \sin^{n-1} \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin \varphi_n & \sin^2 \varphi_n & \dots & \sin^{n-1} \varphi_n \end{vmatrix};$ и) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix};$

ї) $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix};$ ї) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$

2.76. Рядом Фібоначчі (Leonardo Fibonacci (Pisano), близько 1170 - близько 1250) називається числовий ряд, який розпочинається числами 1, 2 і в якому наступне число дорівнює сумі двох попередніх, тобто ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

Довести, що n -ий член ряду Фібоначчі дорівнює визначнику n -го порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.77. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

2.78. Нехай B_1, \dots, B_k — квадратні матриці,

$$H = \begin{pmatrix} B_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & B_k \end{pmatrix}$$

— блочно-діагональна матриця. Довести, що $\det H = \det B_1 \cdot \dots \cdot \det B_k$.

2.79. Нехай A, D — квадратні матриці, $H = \begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}$ — блочно-трикутна матриця. Довести, що $\det H = \det A \cdot \det D$.

2.80. Нехай A — квадратна матриця порядку n , $\det A = a$, $H = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{pmatrix}$. Обчислити $\det H$.

2.81. Нехай A — квадратна матриця, A^2, A^3, A^4 — її степені, $H = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix}$. Обчислити $\det H$.

2.82. а) Нехай $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$, де A, B, C, E — квадратні матриці порядку n , E — одинична матриця. Довести, що $\det H = \det(A - BC)$.

б) Чи завжди правильна рівність $\det H = \det(AD - BC)$ для блочної матриці $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$?

2.83. Виразити визначник кронекерового добутку $A \otimes B$ через визначники матриць A та B .

Обернені матриці

2.84. Навести приклади вироджених та невироджених матриць.

2.85. З'ясувати, чи правильні тотожності:

а) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$; б) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$; в) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;

г) $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$; і) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$; д) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

2.86. Довести, що якщо матриця $E + AB$ оборотна, то матриця $E + BA$ також оборотна.

2.87. Нехай A — невироджена матриця другого порядку, k — натуральне число. Довести, що існує таке число λ , що $A^k = \lambda^{k-1} \cdot A$ для всіх k .

2.88. Чи може бути оборотною прямокутна матриця?

2.89. а) Довести, що якщо A, B, C — квадратні матриці та $AB = E$, $AC = E$, то $B = C$.

б) Чи можлива рівність $AB = E$ для прямокутних матриць? Чи правильне твердження а) для прямокутних матриць?

2.90. Задано квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$. Виписати систему рівнянь, якій задовольняють елементи j -го стовпчика матриці A^{-1} .

2.91. Нехай X^+ — приєднана матриця для квадратної матриці X . Довести, що

$$(AB)^+ = B^+ A^+, \quad (A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}, \quad (A^\top)^+ = (A^+)^{\top}.$$

2.92. За допомогою приєднаних матриць знайти обернені до матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$;

і) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; і) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; ї) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.93. Довести, що матриця, обернена до елементарної, також елементарна.

2.94. Обчислити обернені до таких елементарних матриць:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; і) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.95. а) Довести, що квадратну матрицю за допомогою елементарних перетворень рядків можна звести до одиничної тоді і лише тоді, коли вона невироджена.

б) Сформулювати та довести аналогічне твердження для елементарних перетворень стовпчиків матриці.

2.96. Довести, що довільна невироджена матриця є добутком елементарних матриць.

2.97. Розклади задані матриці у добуток елементарних матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.98. а) Нехай A та B — матриці одного й того ж порядку і матриця A за допомогою деякої послідовності елементарних перетворень рядків переведена в одиничну матрицю E . В яку матрицю зведе ця ж послідовність елементарних перетворень матрицю E ? Матрицю B ?

б) Відповісти на ці ж питання для послідовності елементарних перетворень стовпчиків матриці A , які переводять A в E .

2.99. а) Описати та обґрунтувати спосіб обчислення матриці A^{-1} , який використовує елементарні перетворення рядків матриць A, E .

б) Описати та обґрунтувати спосіб знаходження матриці A^{-1} , який використовує елементарні перетворення стовпчиків матриць A, E .

2.100. За допомогою елементарних перетворень обчислити обернені до матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; і) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$;

ї) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; ї) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

м) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; н) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; о) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

п) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; р) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

2.101. а) Описати та обґрунтувати спосіб обчислення добутку $A^{-1}B$, який використовує елементарні перетворення рядків матриць A, B .

б) Описати та обґрунтувати спосіб знаходження добутку AB^{-1} , який використовує елементарні перетворення стовпчиків матриць A, B .

2.102. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

2.103. Як зміниться матриця A^{-1} , якщо в матриці A :

- переставити i -й та j -й рядки;
- до i -го рядка додати j -й, помножений на λ ;
- помножити i -й рядок на число $\lambda \neq 0$;
- перетворення а)-в) здійснити зі стовпцями?

2.104. Знайти обернену до блочної матриці $\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}$.

2.105. Знайти обернені до квадратних матриць:

а) $\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$,

де матриці A, C — невироджені.

2.106. Знайти обернені до матриць:

на ньому

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.107. Нехай A, B, C, D — невироджені матриці. Довести, що

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.108. Нехай $A^2 + A + E = O$. Довести, що матриця A невироджена, і вказати найпростіший спосіб обчислення A^{-1} .

2.109. Нехай $A^k = O$. Довести, що $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{k-1}$.

2.110. Нехай матриця A комутує з матрицею B . Довести, що тоді матриця A^{-1} комутує з матрицею B^{-1} (передбачається, що матриці оборотні).

2.111. Довести, що якщо $AB = BA$, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.

2.112. Перевірити формулу $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS$.

2.113. Нехай A, S — квадратні матриці однакового розміру (причому матриця S — невироджена) і $f(x)$ — поліном. Довести, що $f(SAS^{-1}) = Sf(A)S^{-1}$.

2.114. Довести, що якщо B — невироджена матриця, то для довільної матриці A того самого порядку $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr } A$.

2.115. Довести, що якщо матриця A діагональна і всі її діагональні елементи відмінні від 0, то A^{-1} існує і є діагональною.

2.116. Довести, що якщо матриця A верхня трикутна і всі її діагональні елементи відмінні від 0, то A^{-1} існує і є верхньою трикутною.

2.117. Довести, що

- а) якщо A — невироджена симетрична матриця, то A^{-1} — також симетрична матриця;
- б) якщо A — невироджена кососиметрична матриця, то A^{-1} — також кососиметрична матриця.

2.118. Чому дорівнює визначник ціличисельної матриці A , якщо матриця A^{-1} також ціличисельна?

2.119. Матриця A називається *ортогональною*, якщо $AA^\top = A^\top A = E$.

- а) Які значення може набувати визначник ортогональної матриці?
- б) Довести, що якщо A — ортогональна матриця, то A^{-1} існує і також є ортогональною.

2.120. Довести, що задані матриці ортогональні і знайти обернені до них:

а) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

2.121. Нехай S — невироджена матриця і $S^\top AS = B$. Довести, що кожна з властивостей: симетричність, кососиметричність — виконується для матриць A та B одночасно (тобто якщо вона виконується для матриці A , то виконується і для B , та навпаки).

2.122. Довести, що нільпотентна матриця завжди вироджена, а періодична — невирождена.

2.123. Нехай A — матриця другого порядку і k — натуральне число, більше двох. Довести, що $A^k = O$ тоді і тільки тоді, коли $A^2 = O$.

2.124. Нехай S — невироджена матриця і $S^{-1}AS = B$. Довести, що кожна з властивостей: періодичність, нільпотентність — виконується для матриць A та B одночасно (тобто якщо вона виконується для матриці A , то виконується і для B , та навпаки).

2.125. Нехай матриця A стохастична. Чи існує A^{-1} ? Чи буде A^{-1} стохастичною, якщо вона існує?

2.126. Перевірити правильність тотожності

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1},$$

де через \otimes — позначено кронекеровий добуток матриць.

ЛІНЕЙНА АЛГЕБРА

1 семестр

лнУ

Для підготовки

до колоквіуму,

а не для

списування

на ньому