

## 1.9. Вправи до розділу 1

Основні операції над матрицями

1.1. Сформулюйте умови, при яких можна додавати дві матриці.

1.2. Обчисліти:

а)  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;    б)  $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ;

в)  $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ ;

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ;    г')  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

д)  $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;    е)  $\frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

1.3. Описати умови, при яких правильні нижче наведені тотожності, та довести ці тотожності ( $A, B, C$  — матриці,  $\lambda, \mu$  — числа):

а)  $A + B = B + A$ ;    б)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;    в)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ;  
г)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ;    г')  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .

1.4. а) Чи можна перемножити рядок довжини  $m$  на стовпчик висоти  $n$ ?б) Чи можна перемножити стовпчик висоти  $n$  на рядок довжини  $m$ ?

1.5. Перевірити, чи існують добутки, і якщо так, то обчислити їх:

а)  $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2)$ ;    в)  $(1 \ 2) \cdot (3 \ 4)$ ;

г)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;    г')  $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4)$ ;    д)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1.6. Яким умовам повинні задовільняти матриці  $A$  та  $B$ , щоб:а) існував добуток  $AB$ ;    б) існував добуток  $BA$ ;    в) існували добутки  $AB$  та  $BA$ ?1.7. Виразити розміри матриці  $AB$  через розміри матриць  $A$  та  $B$ .

1.8. Обчисліти добутки:

а)  $(1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;    б)  $(2 \ -3 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;    в)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ -3 \ 0)$ ;

г)  $(0 \ 1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;    г')  $(1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ;

д)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;    е)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

1.9. Обчисліти добутки матриць:

- a)**  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; **б)**  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- в)**  $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ; **г)**  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 1.10.** Перемножити квадратні матриці:
- а)**  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; **б)**  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- в)**  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; **г)**  $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; **г)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ ;
- д)**  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; **е)**  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$ ;
- ж)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ; **жк)**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- з)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; **и)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1.11.** Матрицю  $A$  помножити зліва та справа на діагональну матрицю  $D$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Результати обчислень порівняти.

**1.12.** Обчислити добутки матриць:

- а)**  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ; **б)**  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{pmatrix}$ ;
- в)**  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; **г)**  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ .

**1.13.** Матриці  $A$  та  $C$  мають розміри відповідно  $m \times n$  та  $p \times q$  та існує добуток  $ABC$ . Які розміри матриць  $B$  та  $ABC$ ?

**1.14.** Перемножити матриці:

- а)**  $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ ; **б)**  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- в)**  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- г)**  $(-12 \ 13) \cdot \begin{pmatrix} 83574 & 83674 \\ 98423 & 98523 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-12 \ 13)$ .

1.15. Перевірити правильність тотожностей ( $A, B, C, D$  — матриці,  $\lambda$  — число):

- а)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ;    б)  $(AB)C = A(BC)$ ;    в)  $A(B + C) = AB + AC$ ;  
г)  $(A + B)C = AC + BC$ ;    д)  $A(B + C + D) = AB + AC + AD$ .

1.16. Виконати дії:

а)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1.17. Обчислити:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$ ;    б)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}^2$ ;    в)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ ;    г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$ ;

д)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ ;    е)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$ ;    ж)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ ;

е)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^2$ .

1.18. Обчислити:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3$ ;    в)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$ ;    г)  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$ .

1.19. Обчислити  $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$ , використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$
.

1.20. Обчислити  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$ , використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.21. Обчислити:

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ;    в)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$ ;    г)  $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ ;

р)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ ; д)  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n$ ; е)  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \right)^n$

1.22. Обчислити

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k$$

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.23. Піднести до відповідного степеня матриці порядку  $n$ :

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^3$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$

1.24. Обчислити степені квадратної матриці

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.25. Нехай задано квадратну матрицю

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

порядку  $n$ . Довести, що якщо  $f(x)$  — поліном, то

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

1.26. Знайти значення полінома  $f(x)$  від матриці  $A$ , якщо:

а)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ;

б)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

списування на ньому

в)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

г)  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

1.27. Обчислити  $e^A$ , якщо:

а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ ; в)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; г)  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1.28. Обчислити  $\ln A$ , якщо:

а)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

1.29. Обчислити  $AB - BA$ , якщо:

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ .

1.30. Чи завжди правильна матрична рівність  $AB = BA$ ? Навести приклади переставних і непереставних матриць.

1.31. Що можна сказати про розміри матриць  $A$  та  $B$ , якщо  $AB = BA$ ?

1.32. Знайти всі матриці, які переставні з матрицею

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ;

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1.33. Нехай  $A$  та  $B$  – квадратні матриці однакового порядку. Перевірити чи правильні такі матричні тотожності:

а)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ; б)  $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$ ;

в)  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ ; г)  $(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$ .

1.34. Довести, що якщо  $A$  та  $B$  – квадратні матриці однакового порядку і  $AB = BA$ , то

$$(A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n.$$

Навести приклад матриць, для яких ця формула не виконується.

1.35. Обчислити матрицю  $[A, B] = AB - BA$  (комутатор матриць  $A$  та  $B$ ), якщо

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1.36.** Перевірити правильність тотожностей (див. задачу 1.35):

- а)**  $[A, B] = -[B, A]$ ;    **б)**  $[A, A] = O$ ;
- в)**  $[A, E] = [E, A] = O$ ;    **г)**  $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ .

**1.37.** Довести, що для довільних квадратних матриць  $A, B, C$  виконуються рівності:

- а)**  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ ;
- б)**  $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = O$ .

**1.38.** Обчислити матрицю  $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$  (добуток Йордана матриць  $A$  та  $B$ ), якщо

$$\text{а)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.39.** Перевірити правильність тотожностей (див. задачу 1.38):

- а)**  $A * B = B * A$ ;    **б)**  $A * A = A^2$ ;
- в)**  $A * E = A$ ;    **г)**  $A * (B + C) = A * B + A * C$ .

**1.40.** Транспонувати матриці:

$$\text{а)} \quad \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$
  

$$\text{г')} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

**1.41.** Перевірити правильність тотожностей ( $A, B, C$  — матриці відповідних порядків,  $\lambda$  — число):

- а)**  $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ ;    **б)**  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ ;    **в)**  $(ABC)^\top = C^\top B^\top A^\top$ ;
- г)**  $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ ;    **г')**  $(A^\top)^\top = A$ ;    **д)**  $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ .

**1.42.** Обчислити матрицю  $P = E - (e_i - e_k)^\top(e_i - e_k)$ , де через  $e_i$  позначено  $i$ -ий рядок одиничної матриці  $E$ .

**1.43.** Нехай  $A, B$  — стовпчики однакової висоти і  $H = AB^\top$ . Довести, що  $H^2 = \lambda H$  для деякого числа  $\lambda$ .

**З'язок множення матриць і елементарних перетворень**

**1.44.** Довести, що  $k$ -ий стовпчик матриці  $AB$  дорівнює добутку матриці  $A$  на  $k$ -ий стовпчик матриці  $B$ . Сформулювати та довести аналогічне твердження для рядків.

**1.45.** Довести, що  $k$ -ий стовпчик матриці  $AB$  дорівнює лінійній комбінації стовпчиків матриці  $A$  з коефіцієнтами із елементів  $k$ -го стовпця матриці  $B$ . Сформулювати та довести аналогічне твердження для рядків.

**1.46.** Нехай задано добуток  $AB$  матриць  $A$  та  $B$ . Довести, що:

- а)** якщо до  $i$ -го рядка матриці  $A$  додати її  $j$ -й рядок, то з матрицею  $AB$  відбудеться те ж елементарне перетворення;
- б)** якщо  $i$ -й рядок матриці  $A$  помножити на число  $\lambda$ , то  $i$ -й рядок  $AB$  також домножиться на  $\lambda$ ;
- в)** при перестановці місцями двох рядків матриці  $A$  відповідні рядки  $AB$  також переставляться.

**1.47.** Як зміниться добуток  $AB$  матриць  $A$  та  $B$ , якщо:

- а)** до  $i$ -го стовпця матриці  $B$  додати її  $j$ -й стовпець, помножений на число  $\lambda$ ;
- б)**  $i$ -ий стовпчик матриці  $B$  помножити на число  $\lambda$ ;
- в)** переставити  $i$ -й та  $j$ -й стовпці матриці  $B$ .

**1.48.** а) Довести, що додавання до рядка матриці лінійної комбінації решти її рядків може бути здійснено за допомогою послідовного застосування елементарних перетворень рядків.

б) Довести аналогічне твердження для перетворення, яке полягає у перестановці двох рядків матриці.

**1.49.** Обчислити добуток  $e_i A e_k^\top$  для довільної матриці  $A$  (через  $e_i$  позначено  $i$ -ий рядок одиничної матриці відповідного розміру).

**1.50.** Нехай  $A = [a_{ij}]$  — матриця розміру  $m \times n$ . Довести, що  $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$ , де  $E_{ij}$  — матричні одиниці відповідного розміру.

**1.51.** Довести, що  $E_{ij} E_{pq} = \delta_{jp} E_{iq}$ .

**1.52.** Для довільної матриці  $A$  і матричної одиниці  $E_{ij}$  відповідного розміру обчислити добутки:

- а)  $E_{ij} A$ ;
- б)  $A E_{ij}$ .

**1.53.** Нехай  $A$  — квадратна матриця, причому  $E_{ij} A = A E_{ij}$  для усіх матричних одиниць  $E_{ij}$ . Довести, що  $A = \lambda E$  для деякого скаляра  $\lambda$ .

**1.54.** Нехай  $A$  — квадратна матриця, причому  $E_{ii} A = A E_{ii}$  для усіх  $i$ . Довести, що матриця  $A$  діагональна.

**1.55.** Нехай матриці  $A$  та  $B$  такі, що для довільних стовпчиків  $X$  та  $Y$  відповідної висоти виконується рівність  $X^\top A Y = X^\top B Y$ . Довести, що  $A = B$ .

**1.56.** Нехай  $A$  — матриця розміру  $m \times n$ ,  $E_m$  та  $E_n$  — одиничні матриці порядку  $m$  та  $n$  відповідно. Довести, що  $E_m A = A E_n = A$ .

**1.57.** На яку матрицю треба домножити матрицю  $A$ , щоб в результаті отримати:

- а) перший стовпчик матриці  $A$ ;
- б) перший рядок  $A$ ?

**1.58.** Підібрати елементарну матрицю  $P$  так, щоб матриця  $PA$  отримувалась із  $A$ :

- а) перестановкою двох перших рядків  $A$ ;
- б) додаванням першого рядка до другого;
- в) множенням першого рядка на число  $\lambda \neq 0$ .

**1.59.** Підібрати елементарну матрицю  $Q$  так, щоб добуток  $AQ$  отримувався із  $A$  за допомогою заданого елементарного перетворення стовпчиків.

## Інші операції з матрицями. Матриці спеціального вигляду

**1.60.** Нехай  $A$  та  $B$  — діагональні матриці одного порядку,  $\lambda$  — число. Довести, що матриці  $\lambda A$ ,  $A + B$ ,  $AB$ ,  $BA$  також діагональні і  $AB = BA$ .

**1.61.** Нехай  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Довести, що:

- а) стовпчики матриці  $AD$  отримуються множенням стовпчиків матриці  $A$  на числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ;
- б) рядки матриці  $DA$  отримуються множенням рядків матриці  $A$  на числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**1.62.** Нехай  $A$  — діагональна матриця,  $f(x)$  — поліном. Довести, що тоді матриця  $f(A)$  також діагональна.

**1.63.** Нехай матриця  $A$  — діагональна, всі її елементи різні і  $AB = BA$ . Довести, що тоді матриця  $B$  також діагональна.

**1.64.** Нехай матриця  $A$  переставна з будь-якою діагональною матрицею порядку  $n$ . Довести, що  $A$  — діагональна матриця порядку  $n$ .

**1.65.** Нехай матриця  $A$  переставна з усіма матричними одиницями порядку  $n$ . Довести, що  $A$  — скалярна матриця.

**1.66.** Нехай матриця  $A$  переставна з будь-якою матрицею порядку  $n$ . Довести, що  $A$  — скалярна матриця.

**1.67.** Нехай квадратна матриця  $A$  переставна з усіма невиродженими матрицями. Довести, що  $A = \lambda E$ .

**1.68.** Нехай матриці  $A$  та  $B$  — верхні трикутні. Виразити елементи матриці  $AB$  через елементи матриць  $A$  та  $B$ .

**1.69.** Нехай матриці  $A$  та  $B$  — верхні трикутні. Довести, що матриці  $A + B$  і  $AB$  — також верхні трикутні.

**1.70.** Нехай матриці  $A$  та  $B$  симетричні. Довести, що:

- а)**  $A + B$  — симетрична матриця;
- б)**  $A^k$  — симетрична матриця при будь-якому натуральному  $k$ ;
- в)** матриця  $AB$  є симетричною тоді і тільки тоді, коли матриці  $A$  та  $B$  переставні.

**1.71.** Нехай матриці  $A$  та  $B$  кососиметричні. Довести, що:

- а)**  $A + B$  — кососиметрична матриця;
- б)**  $A^k$  — кососиметрична матриця при непарному  $k$  і симетрична матриця при парному  $k$ ;
- в)** матриця  $AB$  є симетричною тоді і тільки тоді, коли матриці  $A$  та  $B$  переставні.
- г)** Сформулювати та довести необхідну і достатню умову кососиметричності добутку матриць  $A$  та  $B$ .

**1.72.** Нехай  $A$  — довільна квадратна матриця. Довести, що матриці  $A + A^\top$  і  $AA^\top$  симетричні, а матриця  $A - A^\top$  кососиметрична.

**1.73.** Довести, що якщо  $A$  і  $B$  — симетричні квадратні матриці однакового порядку, то матриця  $C = ABAB \dots ABA$  є симетричною.

**1.74.** Довести, що довільну квадратну матрицю можна розкласти в суму симетричної та кососиметричної матриць. Чи є це розкладання однозначне?

**1.75.** Розкласти задані матриці в суму симетричної і кососиметричної матриць:

**а)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ;   **б)**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;   **в)**  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

**1.76.** Довести, що трикутна матриця нільпотентна тоді і тільки тоді, коли всі її діагональні елементи нульові.

**1.77.** Довести, що якщо матриці  $A$ ,  $B$  нільпотентні і переставні, то  $A + B$  і  $AB$  нільпотентні.

**1.78.** Довести, що якщо матриці  $A$  та  $B$  періодичні і переставні, то  $AB$  — періодична матриця. Зобразити який-небудь її період через періоди матриць  $A$ ,  $B$ .

**1.79.** Нехай  $A^k + A^{k-1} + \dots + E = O$ . Довести, що  $A$  — періодична матриця.

**1.80.** Матриця  $A = [a_{ij}]$  називається *невід'ємною*, якщо  $a_{ij} \geq 0$  для усіх  $i, j$ . Нехай матриці  $A$  та  $B$  невід'ємні. Довести, що тоді  $A + B$ ,  $AB$  — також невід'ємні матриці.

**1.81.** Матриця  $A = [a_{ij}]$  порядку  $n$  називається *стохастичною* (марковською), якщо  $a_{ij} \geq 0$  для усіх  $i, j$  і  $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$  при  $i = 1, \dots, n$ . Нехай  $I$  — стовпець з одиниць і матриця  $A$  невід'ємна. Довести, що умова  $AI = I$  — необхідна і достатня умова стохастичності  $A$ .

**1.82.** Довести, що якщо матриці  $A$  та  $B$  стохастичні, то матриця  $AB$  також стохастична.

**1.83.** Довести правильність тотожностей:

**а)**  $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$ ;   **б)**  $\text{tr } AB = \text{tr } BA$ .

- 1.84. Нехай  $A$  — трикутна матриця,  $m$  — натуральне число. Обчислити слід матриці  $A^m$ .
- 1.85. Нехай  $A$  — довільна матриця. Обчислити  $\text{tr}(A^\top A)$ .
- 1.86. Довести, що якщо  $A$  — нільпотентна матриця другого порядку, то  $\text{tr } A = 0$ .
- 1.87. Знайти усі матриці  $A$  порядку  $n$  такі, що  $\text{tr } AX = 0$  для довільної матриці  $X$  порядку  $n$ .
- 1.88. Довести, що рівність  $AB - BA = E$  не виконується для жодних матриць  $A$  і  $B$  з числовими елементами.
- 1.89. При яких значеннях  $\lambda$  рівняння  $[X, Y] = \lambda E$  має розв'язок ( $[X, Y]$  — комутатор матриць  $X$  та  $Y$ )?
- 1.90. Довести, що для довільних матриць другого порядку виконується рівність  $[[A, B]^2, C] = O$ .
- 1.91. Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює  
 а) нульовій матриці; б) одиничній матриці.
- 1.92. Знайти всі дійсні матриці другого порядку, четвертий степінь яких дорівнює одиничній матриці.

### Блочні матриці

- 1.93. Довести, що при транспонуванні блочної матриці транспонуванню підлягає блочна структура та всі її блоки, наприклад

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top \end{pmatrix}.$$

- 1.94. Знайти матриці  $C = A + B$ ,  $D = 5B$ ,  $B^\top$ , якщо  $A$  та  $B$  блочні матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 4 & | & 7 \\ 4 & 5 & | & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1.95. Нехай  $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$  — квадратні матриці однакового порядку. Виразити добуток матриць

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

через задані матриці.

- 1.96. Нехай  $A$  та  $B$  — блочні матриці другого порядку. Сформулювати умови, при яких ці матриці можна перемножити. Довести, що якщо існує добуток  $A \cdot B$ , то  $(A \cdot B)^\square = A^\square \cdot B^\square$ .

- 1.97. Нехай  $A$  та  $B$  — верхні блочно-трикутні матриці другого порядку і добуток  $A \cdot B$  існує. Отримати формулу для обчислення матриці  $A^\square \cdot B^\square$ .

- 1.98. Нехай  $A$  — блочна матриця другого порядку,  $B$  — блочна матриця-стовпчик з двох блоків.

- Сформулювати умови, за яких визначено добуток  $A \cdot B$ .
- Довести, що якщо  $A \cdot B$  існує, то  $(A \cdot B)^\square = A^\square \cdot B^\square$ .
- Отримати формулу для обчислення  $A^\square \cdot B^\square$ .

- 1.99. Нехай  $A$  та  $B$  — блочно-діагональні матриці. Сформулювати умови, за яких:

- визначено добуток  $A \cdot B$ ;
- $(A \cdot B)^\square = A^\square \cdot B^\square$ ;
- визначено добутки  $A \cdot B$  та  $B \cdot A$ ;

г)  $A \cdot B = B \cdot A$ .

**1.100.** Перевірити правильність тотожностей  $(A + B)^{\square} = A^{\square} + B^{\square}$ ,  $(A \cdot B)^{\square} = A^{\square} \cdot B^{\square}$  для довільних блочних матриць.

**1.101.** Знайти матрицю  $C = A \cdot B$ , якщо  $A$  та  $B$  блочні матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 4 \\ 3 & 4 & | & 5 \\ 4 & 5 & | & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.102.** Використовуючи властивості блочних матриць, знайти добуток  $A \cdot B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**1.103.** Розбиваючи матриці на блоки, обчислити добутки:

а)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$  г)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$  д)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

**1.104.** Нехай  $E$  — одинична матриця порядку  $m$ ;  $D$  — довільна матриця розміру  $m \times n$ ;  $O, B, X$  — стовпці. Розв'язати блочно-матричні рівняння:

а)  $(E \ D)^{\square} X = O;$  б)  $(E \ D)^{\square} X = B.$

**1.105.** Нехай задано матриці  $A = [a_{ij}]$  та  $B$  розмірів  $m \times n$  та  $p \times q$  відповідно. Числова матриця розміру  $mp \times nq$ , складена із блоків  $a_{ij}B$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \dots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot B & \dots & a_{mn} \cdot B \end{pmatrix}$$

називається *правим кронекеровим добутком* матриць  $A$  та  $B$  (або *правим прямим добутком* матриць). Знайти правий кронекеровий добуток  $A \otimes B$  матриць  $A$  та  $B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**1.106.** Обчислити кронекерові добутки матриць:

а)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$  г)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

г)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$  д)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$

е)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

**1.107.** Нехай  $A = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, \dots, b_m)^\top$ . Обчислити  $A \otimes B$ ,  $B \otimes A$  і порівняти з  $BA$ .

**1.108.** Перевірити правильність тотожностей:

а)  $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B);$

б)  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$

в)  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C;$

г)  $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C;$

г)  $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D).$

**1.109.** Нехай  $A$  та  $B$  — квадратні матриці порядків  $m$  та  $n$  відповідно. Кронекеровою сумою матриць  $A$  та  $B$  називається квадратна матриця порядку  $mn$

$$A \oplus B = (E_m \otimes A) + (B \otimes E_n),$$

де  $E_m$ ,  $E_n$  — одиничні матриці відповідних порядків. Знайти кронекерову суму  $A \oplus B$  матриць  $A$  та  $B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**до колоквіуму,**

**а не для**

**списування**

**на ньому**