

# Розділ 8.

## Алгебричні структури

### Бінарні алгебричні операції. Напівгрупи. Моноїди

**8.1.** Чи визначає бінарну алгебричну операцію на множині  $X$  правило  $\circledast$ , яке задане формулою  $x \circledast y = x^2 - 2xy + y^2$ , якщо

- a)  $X = \mathbb{Q}$ ;    б)  $X = \mathbb{N}$ ?

**8.2.** Чи визначає правило  $x * y = x - y$  бінарну алгебричну операцію на множині  $X$ , якщо

- a)  $X = \mathbb{R}$ ;    б)  $X = \mathbb{N}$ ?

**8.3.** Довести, що множення матриць є алгебричною бінарною операцією на множині

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

**8.4.** Чи є скалярне множення векторів алгебричною операцією на множині  $\mathbb{R}^3$ ? А векторне?

**8.5.** З'ясуйте, чи операція  $*$  є асоціативною на множині  $\mathbb{R}$ , якщо

- a)  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ;    б)  $x * y = e^x e^y$ .

**8.6.** Доведіть, що операція  $\star$ , яка задана на множині цілих чисел правилом  $n \star m = -n - m$ , є комутативною, але неасоціативною.

**8.7.** Перевірти на асоціативність і комутативність операцію  $\odot$ , визначену на множині  $M^2$  правилом  $(x, y) \odot (z, t) = (x, t)$ , де  $x, y, z, t \in M$ .

**8.8.** Чи утворює напівгрупу множина  $X$  стосовно операції  $*$ , якщо

- a)  $X = \mathbb{N}$ ,  $m * n = m^n$ ;    б)  $X = \mathbb{N}$ ,  $m * n = 2mn$ ;  
в)  $X = \mathbb{Z}$ ,  $m * n = m - n$ ;    г)  $X = \mathbb{N}$ ,  $m * n = \text{НСК}(m, n)$ ?

**8.9.** Які з алгебричних операцій задачі 8.8 є комутативними?

**8.10.** Чи утворює напівгрупу множина  $X$  стосовно операції  $*$ , якщо

- a)  $X = \mathbb{N}$ ,  $x * y = \text{НСД}(x, y)$ ;    б)  $X = \mathbb{Z}$ ,  $x * y = x^2 + y^2$ ;  
в)  $X = \mathbb{R}$ ,  $x * y = \sin x \cdot \sin y$ ;    г)  $X = \mathbb{R}^*$ ,  $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$ ?

**8.11.** Чи утворює напівгрупу множина  $X$  стосовно операції  $*$ , якщо

- a)  $X = \mathbb{N}$ ,  $x * y = \max(x, y)$ ;  
б)  $X = \mathbb{R}$ ,  $x * y = \ln(e^x + e^y)$ ?

**8.12.** На множині  $X^2$  визначено такі операції:

- a)  $(a, b) *_1 (c, d) = (a, c)$ ;    б)  $(a, b) *_2 (c, d) = (a, d)$ ;  
в)  $(a, b) *_3 (c, d) = (b, c)$ ;    г)  $(a, b) *_4 (c, d) = (b, d)$ .

Які з структур  $(X^2; *_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , є напівгрупою?

**8.13.** На множині  $X$  визначена операція  $\diamond$  за правилом  $x \diamond y = x$ . Довести, що  $(X; \diamond)$  — напівгрупа.

---

**8.14.** Чи існує нейтральний елемент у множині  $\mathbb{Q}^*$  стосовно алгебричної операції, заданої правилом  $a \square b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ?

**8.15.** Чи існує нейтральний елемент у множині  $M^2$  стосовно операції  $\odot$ , розглянутої в задачі 8.7?

**8.16.** Чи існує нейтральний елемент

- а)** у множині  $\mathbb{Q}$  стосовно операції  $\circledast$  із задачі 8.1;
- б)** у множині  $M$  із задачі 8.3 стосовно операції множення матриць?

У випадку існування нейтрального елемента з'ясувати для яких елементів заданих множин існують обернені елементи.

**8.17.** Скільки елементів містить напівгрупа, що складається з усіх додатних степенів матриці  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? Чи є ця напівгрупа моноїдом?

**8.18.** Нехай на множині  $\mathbb{R}$  визначено операцію  $x * y = \lambda x + \beta y + \eta$ , де  $\lambda, \beta, \eta \in \mathbb{R}$ . Для яких значень параметрів  $\lambda, \beta, \eta \in \mathbb{R}$

- а)** операція  $*$  буде асоціативною;
- б)** в множині  $R$  існуватиме нейтральний елемент;
- в)** усі елементи множини  $R$  будуть оборотними?

**8.19.** Довести, що множина натуральних чисел не утворює групу ні стосовно операції додавання, ні стосовно операції множення.

**8.20.** З'ясувати, чи утворює групу кожна з заданих множин стосовно вказаної операції над елементами:

- а)** цілі числа стосовно додавання;
- б)** парні цілі числа стосовно додавання;
- в)** цілі числа, кратні заданому натуральному числу  $n$ , стосовно додавання;
- г)** невід'ємні цілі числа стосовно додавання;
- г')** непарні цілі числа стосовно додавання;
- д)** цілі числа стосовно віднімання;
- е)** цілі числа стосовно множення;
- е')** цілі числа стосовно ділення.

**8.21.** Чи утворює групу кожна з заданих множин стосовно вказаної операції над елементами:

- а)** раціональні числа стосовно додавання;
- б)** раціональні числа стосовно множення;
- в)** ненульові раціональні числа стосовно множення;
- г)** додатні раціональні числа стосовно множення;
- г')** додатні раціональні числа стосовно ділення;
- д)** двійково-раціональні числа (тобто раціональні числа, знаменники яких є степенями числа 2 з цілими невід'ємними показниками) стосовно додавання;
- е)** всі раціональні числа, знаменники яких дорівнюють добуткам простих чисел із заданої множини  $M$  (скінченної чи нескінченної) з цілими невід'ємними показниками (лише скінчена кількість яких може бути відмінна від нуля), стосовно додавання.

**8.22.** Які з вказаних числових множин з операціями є групами:

- а)**  $(\mathbb{R}, +)$ ;    **б)**  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ;    **в)**  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ;
- г)** степені заданого дійсного числа  $a$ ,  $a \neq 0, \pm 1$ , з цілими показниками стосовно множення;
- г')** додатні дійсні числа, якщо операцію визначено так:  $x * y = x^y$ ;
- д)** додатні дійсні числа, якщо операцію визначено так:  $x * y = x^2 y^2$ ;
- е)**  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ;
- е')** вектори арифметичного простору  $\mathbb{R}^n$  стосовно операції додавання векторів;
- ж)** числа вигляду  $a + b\sqrt{5}$ , де  $a, b \in \mathbb{Q}$  і  $a^2 + b^2 \neq 0$ , стосовно множення.

**8.23.** Які з вказаних множин матриць утворюють групу стосовно заданої операції:

- a)  $(M_n(\mathbb{Z}), +)$ ;    б)  $(M_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ ;
- в)  $n$ -вимірні ціличисельні матриці з визначником, рівним одиниці, стосовно множення;
- г) ціличисельні матриці порядку  $n$  з визначником, рівним  $\pm 1$ , стосовно множення;
- г') матриці порядку  $n$  з цілими елементами і визначником, рівним фіксованому ненульовому числу  $d$ , стосовно множення.

**8.24.** Які з вказаних множин квадратних матриць з дійсними елементами фіксованого порядку утворюють групу стосовно заданої операції:

- a)  $(M_n(\mathbb{R}), +)$ ;    б)  $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ;
- в) множина невироджених матриць стосовно множення;
- г) множина матриць з фіксованим визначником, рівним  $d$ , стосовно множення;
- г') множина діагональних матриць стосовно додавання;
- д) множина діагональних матриць стосовно множення;
- е) множина діагональних матриць, усі діагональні елементи яких відмінні від нуля, стосовно множення;
- е') множина верхніх трикутних матриць стосовно множення;
- ж) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно множення;
- з) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно додавання;
- и) множина верхніх нільтрикутних матриць стосовно операції  $A * B = A + B - AB$ ;
- і) множина верхніх унітрикутних матриць стосовно множення;
- ї) множина всіх ортогональних матриць стосовно множення;
- й) множина симетричних (кососиметричних) матриць стосовно додавання;
- к) множина симетричних (кососиметричних) матриць стосовно множення;
- л) множина ненульових матриць вигляду  $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ , де  $x, y \in \mathbb{R}$ , стосовно множення;
- м) множина ненульових матриць вигляду  $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , де  $\lambda$  — фіксоване дійсне число, стосовно множення.

**8.25.** Доведіть, що:

- а) множина  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  з операцією  $x * y = x + y + xy$ ;
- б) множина  $\mathbb{Z}$  з операцією  $m * n = m + n + 2007$ ;
- в) множина  $\mathbb{Z}$  з операцією  $m * n = m + (-1)^m n$

утворюють групи.

**8.26.** Для яких натуральних чисел  $n$  множина  $\mathbb{R}$  з операцією  $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$  буде групою?

**8.27.** Доведіть, що множини:

- а)  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$  з операцією  $a * b = ab - a - b + 2$ ;
- б)  $G = [0, 1)$  з операцією  $*$ , де  $a * b$  дорівнює дробовій частині числа  $a + b$ ;
- в)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  з операцією  $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

утворюють групи.

**8.28.** Які з груп задач 8.20, 8.21 є підгрупами інших із цих груп?

**8.29.** Знайти порядок елемента групи:

- а)  $-1 \in (\{-1, 1\}, \cdot)$ ;    б)  $1 \in (\mathbb{Z}, +)$ ;
- в)  $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ ;    г)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ ;

r)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ .

**8.30.** Перемножити підстановки:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$   
 б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix};$   
 в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$   
 г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

**8.31.** Записати перестановки у вигляді добутків незалежних циклів і за декрементом визначити їхню парність:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};$     б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$   
 в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix};$     г)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$   
 р)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix};$     д)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$   
 е)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix};$   
 є)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix};$   
 ж)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix};$   
 з)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix};$   
 и)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$   
 і)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & nk-k+1 & nk-k+2 & \dots & nk \\ k+1 & k+2 & \dots & 2k & \dots & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}.$

**8.32.** Записати підстановки у вигляді таблиць:

а)  $(1 \ 5)(2 \ 3 \ 4);$     б)  $(1 \ 3)(2 \ 5)(4);$   
 в)  $(7 \ 5 \ 3 \ 1)(2 \ 4 \ 6)(8)(9);$     г)  $(1 \ 2)(3 \ 4) \dots (2n-1, \ 2n);$   
 р)  $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots 2n-1, \ 2n);$     д)  $(3 \ 2 \ 1)(6 \ 5 \ 4) \dots (3n, \ 3n-1, \ 3n-2).$

**8.33.** Перемножити підстановки, записані у вигляді циклів:

а)  $[(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4 \ 6 \ 7)] \cdot [(1 \ 4 \ 7)(2 \ 3 \ 5 \ 6)];$   
 б)  $[(1 \ 3)(5 \ 7)(2 \ 4 \ 6)] \cdot [(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4)(6 \ 7)].$

**8.34.** Знайти порядок елемента групи:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5;$     б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6.$

**8.35.** Знайти  $\sigma^{100}$ , якщо  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ .

**8.36.** Знайти  $\sigma^{150}$ , якщо  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ .

**8.37.** Знайти підстановку  $\chi$  із рівності  $\sigma\chi\tau = \pi$ , якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

**8.38.** Знайти всі твірні елементи адитивної групи цілих чисел.

**8.39.** Які серед груп

- а)  $\mathbb{Z}_{10}^*$ ; б)  $\mathbb{Z}_{11}^*$ ; в)  $\mathbb{Z}_{12}^*$ ; г)  $\mathbb{Z}_{14}^*$

є циклічними?

**8.40.** Які з наступних числових множин утворюють кільце стосовно звичайних операцій додавання та множення:

- а) множина  $\mathbb{Z}$  цілих чисел;
- б) множина  $n\mathbb{Z}$  — цілі числа, кратні заданому натуральному числу  $n > 1$ ;
- в) множина невід'ємних цілих чисел
- г) множина  $\mathbb{Q}$  раціональних чисел;
- г') множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники ділять фіксоване число  $n \in \mathbb{N}$ ;
- д) множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники не діляться на фіксоване число просте число  $p$ ;
- е) множина раціональних чисел, в нескоротному записі яких знаменники є степенями фіксованого простого числа  $p$ ;
- ж) множина дійсних чисел вигляду  $a + b\sqrt{2}$ , де  $a, b \in \mathbb{Q}$ ;
- ж') множина дійсних чисел вигляду  $a + b\sqrt[3]{2}$ , де  $a, b \in \mathbb{Q}$ ;
- з) множина дійсних чисел вигляду  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ , де  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ;
- и) множина комплексних чисел вигляду  $a + bi$ , де  $a, b \in \mathbb{Z}$ ;
- і) множина комплексних чисел вигляду  $a + bi$ , де  $a, b \in \mathbb{Q}$ ;
- і') множина всеможливих сум вигляду  $a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_nz_n$ , де  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — раціональні числа,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — комплексні корені степеня  $n$  із 1.

**8.41.** Які з вказаних множин матриць утворюють кільце стосовно операцій матричного додавання та множення:

- а) множина дійсних симетричних матриць порядку  $n$ ;
- б) множина дійсних ортогональних матриць порядку  $n$ ;
- в) множина верхніх трикутних матриць порядку  $n \geq 2$ ;
- г) множина матриць порядку  $n \geq 2$ , у яких два останні рядки нульові;
- г') множина матриць вигляду  $\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$ , де  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $k$  — фіксоване ціле число;
- д) множина матриць вигляду  $\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$ , де  $a, b \in R$ ,  $k$  — фіксований елемент деякого кільця  $R$ ;
- е) множина комплексних матриць вигляду  $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ ;

---

ε) множина дійсних матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}?$$

# Розділ 9.

## Поле комплексних чисел

**9.1.** Обчислити:

- a)  $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$ ;    б)  $(2+i)(3+7i) - (1+2i)(5+3i)$ ;  
 в)  $(4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i)$ ;    г)  $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$ ;    д)  $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$ ;  
 д)  $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$ ;    е)  $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$ ;    е)  $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$ ;  
 ж)  $(2+i)^3 + (2-i)^3$ ;    з)  $(3+i)^3 - (3-i)^3$ ;  
 и)  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ ;    і)  $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$ ;  
 ї)  $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ;    ј)  $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ .

**9.2.** Обчислити визначники:

а)  $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$ ;    б)  $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$ ;  
 в)  $\begin{vmatrix} \cos \varphi + i \sin \varphi & 1 \\ 1 & \cos \varphi - i \sin \varphi \end{vmatrix}$ ;    г)  $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$ .

**9.3.** Обчислити визначники 3-го порядку:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$ ;    б)  $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$ ;  
 в)  $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ .

**9.4.** Обчислити  $i^{77}$ ,  $i^{98}$ ,  $i^{-57}$ ,  $i^n$ , де  $n$  — ціле число.

**9.5.** Перевірити тотожність  $x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$ .

**9.6.** Обчислити  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ , де  $n$  — ціле додатне число.

**9.7.** Розв'язати систему рівнянь:

а)  $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i; \end{cases}$     б)  $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i; \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} (1-i)z_1 - 3iz_2 = -i, \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i; \end{cases}$     г)  $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i; \end{cases}$   
 д)  $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

**9.8.** Знайти дійсні числа  $x$  та  $y$ , що задовольняють рівняння:

а)  $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$ ;    б)  $(3+2i)x + (1+3i)y = 4 - 9i$ .

**9.9.** Обчислити:

а)  $\sqrt{2i}$ ;    б)  $\sqrt{-8i}$ ;    в)  $\sqrt{3-4i}$ ;    г)  $\sqrt{-15+8i}$ ;  
г)  $\sqrt{-3-4i}$ ;    д)  $\sqrt{-11+60i}$ ;    е)  $\sqrt{-8+6i}$ ;  
е)  $\sqrt{-8-6i}$ ;    ж)  $\sqrt{-8-6i}$ ;    з)  $\sqrt{8+6i}$ ;    и)  $\sqrt{2-3i}$ ;  
і)  $\sqrt{4+i} + \sqrt{4-i}$ ;    ї)  $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ ;    ѹ)  $\sqrt[4]{-1}$ ;    к)  $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$ .

**9.10.** Розв'язати рівняння:

а)  $z^2 = i$ ;    б)  $z^2 = 3 - 4i$ ;    в)  $z^2 = 5 - 12i$ ;  
г)  $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$ ;    д)  $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ ;  
д)  $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$ .

**9.11.** Розв'язати рівняння і їхні ліві частини розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами:

а)  $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$ ;    б)  $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$ .

**9.12.** Розв'язати рівняння:

а)  $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ ;    б)  $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ .

**9.13.** Побудувати точки на площині, які зображають комплексні числа:  $1, -1, -\sqrt{2}, i, -i, i\sqrt{2}, -1+i, 2-3i$ .

**9.14.** Записати у тригонометричній формі такі числа:

а)  $1$ ;    б)  $-1$ ;    в)  $i$ ;    г)  $-i$ ;    д)  $2i$ ;    д)  $-3$ ;  
е)  $1+i$ ;    е)  $-1+i$ ;    ж)  $-1-i$ ;    з)  $1-i$ ;  
и)  $1+i\sqrt{3}$ ;    і)  $-1+i\sqrt{3}$ ;    ї)  $-1-i\sqrt{3}$ ;    ѹ)  $1-i\sqrt{3}$ ;  
к)  $\sqrt{3}+i$ ;    л)  $-\sqrt{3}+i$ ;    м)  $-\sqrt{3}-i$ ;    н)  $\sqrt{3}-i$ ;  
о)  $1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;    п)  $2+\sqrt{3}+i$ ;    п)  $1-(2+\sqrt{3})i$ ;  
с)  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ ;    т)  $\sin \alpha + i \cos \alpha$ ;    ѿ)  $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \psi + i \sin \psi}$ .

**9.15.** Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа:

а) модуль яких дорівнює 1;    б) аргумент яких  $\frac{\pi}{6}$ .

**9.16.** Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа, що задовольняють нерівностям:

а)  $|z| < 2$ ;    б)  $|z-i| \leq 1$ ;    в)  $|z-1-i| < 1$ ;    г)  $2 < |z| < 3$ ;  
г)  $1 \leq |z-2i| < 2$ ;    д)  $|\Re z| \leq 1$ ;    е)  $-1 < \Re iz < 0$ ;    е)  $|\Im z| = 1$ ;  
ж)  $|\Re z + \Im z| < 1$ ;    з)  $|z-1| + |z+1| = 3$ ;    и)  $|z+2| - |z-2| = 3$ ;    і)  $|z-2| = \Re z + 2$ .

**9.17.** Розв'язати рівняння:

а)  $|z| + z = 8 + 4i$ ;    б)  $|z| - z = 8 + 12i$ ;  
в)  $|z| - z = 1 + 2i$ ;    г)  $|z| + z = 2 + i$

**9.18.** Обчислити:

а)  $(1+i)^{1000}$ ;    б)  $(1+i\sqrt{3})^{150}$ ;    в)  $(\sqrt{3}+i)^{30}$ ;  
г)  $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$ ;    д)  $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$ ;    д)  $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{12}$ ;

**e)**  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}; \quad \mathbf{e}) \quad \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$

**9.19.** Обчислити визначники 3-го порядку:

**a)**  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}, \text{ де } w = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi;$

**б)**  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}, \text{ де } w = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi;$

**в)**  $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ де } w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

**9.20.** При  $n \in \mathbb{Z}$  обчислити вирази:

**a)**  $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n; \quad \mathbf{б}) \quad \left(\frac{1+i\tg\varphi}{1-i\tg\varphi}\right)^n.$

**9.21.** Які з відображень груп  $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  є гомоморфізмами, якщо:

**а)**  $\varphi(z) = |z|; \quad \mathbf{б}) \quad \varphi(z) = 2|z|;$

**в)**  $\varphi(z) = \frac{1}{|z|}; \quad \mathbf{г}) \quad \varphi(z) = 1 + |z|;$

**і)**  $\varphi(z) = |z|^2; \quad \mathbf{д}) \quad \varphi(z) = 1; \quad \mathbf{е}) \quad \varphi(z) = 2?$

**9.22.** Виразити через  $\sin x$  і  $\cos x$  функції:

**а)**  $\sin 4x; \quad \mathbf{б}) \quad \cos 4x; \quad \mathbf{в}) \quad \sin 5x; \quad \mathbf{г}) \quad \cos 5x.$

**9.23.** Виразити  $\tg 6\varphi$  через  $\tg \varphi$ .

**9.24.** Виразити через перші степені синуса і косинуса аргументів, кратних  $x$ , функції:

**а)**  $\sin^4 x; \quad \mathbf{б}) \quad \cos^4 x; \quad \mathbf{в}) \quad \sin^5 x; \quad \mathbf{г}) \quad \cos^5 x.$

**9.25.** Обчислити:

**а)**  $\sqrt[3]{1}; \quad \mathbf{б}) \quad \sqrt[4]{1}; \quad \mathbf{в}) \quad \sqrt[6]{1}; \quad \mathbf{г}) \quad \sqrt[3]{i}; \quad \mathbf{і}) \quad \sqrt[6]{i};$

**д)**  $\sqrt[4]{-4}; \quad \mathbf{е}) \quad \sqrt[6]{64}; \quad \mathbf{е}) \quad \sqrt[8]{16}; \quad \mathbf{ж}) \quad \sqrt[6]{-27};$

**з)**  $\sqrt[3]{1+i}; \quad \mathbf{и}) \quad \sqrt[3]{2-2i}; \quad \mathbf{i}) \quad \sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)};$

**і)**  $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}; \quad \mathbf{й}) \quad \sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}; \quad \mathbf{к}) \quad \sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})};$

**л)**  $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}; \quad \mathbf{м}) \quad \sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)};$

**н)**  $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\frac{1+2i}{2-i} + 2}; \quad \mathbf{o}) \quad \sqrt[4]{\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{5}} - 5\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}.$

**9.26.** Знайти корені з одиниці степеня:

**а)** 2; **б)** 3; **в)** 4; **г)** 6; **і)** 8; **д)** 12; **е)** 24.

**9.27.** Розв'язати рівняння:

**а)**  $(z+1)^m - (z-1)^m = 0; \quad \mathbf{б}) \quad (z+i)^m - (z-i)^m = 0.$

**9.28.** Обчислити суми

**а)**  $1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1},$

**б)**  $1 + 4\epsilon + 9\epsilon^2 + \dots + n^2\epsilon^{n-1},$

де  $\epsilon$  — корінь  $n$ -го степеня з 1.

---

**9.29.** Знайти суму первісних коренів **a)** 15-го, **б)** 24-го, **в)** 30-го степеня з одиниці.

**9.30.** Чи є число  $\frac{2+i}{2-i}$  коренем якогось степеня з одиниці?

# Розділ 10.

## Кільце поліномів

**10.1.** Перемножити поліноми:

- a)  $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ ;
- б)  $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ .

**10.2.** Виконати ділення з остачею:

- a)  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$  на  $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ;
- б)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$  на  $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ .

**10.3.** Знайти умову, при якій поліном  $x^3 + px + q$  ділиться на поліном вигляду  $x^2 + mx - 1$ .

**10.4.** При якій умові поліном  $x^4 + px^2 + q$  ділиться на поліном вигляду  $x^2 + mx + 1$ ?

**10.5.** Знайти найбільший спільний дільник поліномів  $f(x)$  та  $g(x)$ , якщо:

- a)  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ ,  $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ;
- б)  $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ ,  $g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$ ;
- в)  $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 2$ ,  $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ ;
- г)  $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 5$ ,  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$ ;
- і)  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ ,  $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ ;
- д)  $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ ,  $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$ ;
- е)  $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ ,  $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$ ;
- є)  $f(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ ,  $g(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$ ;
- ж)  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ ,  $g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ ;
- з)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- и)  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$ ;
- і)  $f(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ ,  $g(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$ ;
- ї)  $f(x) = 2x^6 - 5x^5 - 14x^4 + 36x^3 + 86x^2 + 12x - 31$ ,  $g(x) = 2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 37x^2 + 10x - 14$ ;
- її)  $f(x) = 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ ,  $g(x) = 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$ .

**10.6.** Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти найбільший спільний дільник  $d(x)$  поліномів  $f(x)$  і  $g(x)$  та його вираження через  $f(x)$  і  $g(x)$ , якщо:

- а)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ ,  $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ ;
- б)  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ ,  $g(x) = x^2 - x + 1$ ;
- в)  $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ ,  $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$ ;
- г)  $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$ ,  $g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$ ;
- і)  $f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$ ,  $g(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$ ;
- д)  $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ ,  $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ ;

e)  $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ ,  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ .

**10.7.** За допомогою алгоритму Евкліда знайти такі поліноми  $u(x)$ ,  $v(x)$ , щоб  $f(x) u(x) + g(x) v(x) = 1$ :

- a)  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ ,  $g(x) = x^2 - x + 1$ ;
- б)  $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - x - 1$ ;
- в)  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$ ,  $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$ ;
- г)  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ ,  $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$ ;
- р)  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ ;
- д)  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3$ ,  $g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

**10.8.** Методом невизначених коефіцієнтів підібрати такі поліноми  $u(x)$ ,  $v(x)$ , що  $f(x) u(x) + g(x) v(x) = 1$ :

- a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- б)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (1 - x)^2$ ;
- в)  $f(x) = x^4$ ,  $g(x) = (1 - x)^4$ .

**10.9.** Підібрати поліноми  $u(x)$  та  $v(x)$  найменшого степеня так, щоб

- a)  $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1) u(x) + (x^3 - 5x - 3) v(x) = x^4$ ;
- б)  $(x^4 + 2x^3 + x + 1) u(x) + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1) v(x) = x^3 - 2x$ .

**10.10.** Визначити поліном найменшого степеня, який в остатці дає:

- а)  $2x$  при діленні на  $(x - 1)^2$  і  $3x$  при діленні на  $(x - 2)^3$ ;
- б)  $x^2 + x + 1$  при діленні на  $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$  і  $2x^2 - 3$  при діленні на  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$ .

**10.11.** Виділивши кратні незвідні множники заданого полінома, розкласти його на незвідні множники:

- а)  $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$ ;
- б)  $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$ ;
- в)  $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ ;
- г)  $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ ;
- р)  $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ ;
- д)  $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ;
- е)  $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ .

**10.12.** Виконати ділення з остаточею:

- а)  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$  на  $x - 1$ ;
- б)  $2x^5 - 5x^3 - 8x$  на  $x + 3$ ;
- в)  $4x^3 + x^2$  на  $x + 1 + i$ ;
- г)  $x^3 - x^2 - x$  на  $x - 1 + 2i$ .

**10.13.** Розділити поліном  $f(x)$  з остаточею на  $x - x_0$  і знайти значення  $f(x_0)$ :

- а)  $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$ ,  $x_0 = 2$ ;
- б)  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$ ,  $x_0 = -2$ .

**10.14.** Користуючись схемою Горнера, обчислити  $f(x_0)$ , якщо:

- а)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$  на  $x_0 = 4$ ;
- б)  $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$  на  $x_0 = -2 - i$ .

**10.15.** Користуючись схемою Горнера, розкласти поліном  $f(x)$  за степенями  $x - x_0$  і знайти значення  $f(x_0)$ :

- a)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1;$
- б)  $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1;$
- в)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2;$
- г)  $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i;$
- і)  $f(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i, \quad x_0 = -1 + 2i.$

**10.16.** Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби:

а)  $\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}; \quad$  б)  $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}.$

**10.17.** За допомогою схеми Горнера розкласти за степенями  $x$ :

- а)  $f(x+3), \text{ де } f(x) = x^4 - x^3 + 1;$
- б)  $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20.$

**10.18.** Розкласти поліном  $f(x)$  за степенями  $x - x_0$  і знайти значення його похідних в точці  $x_0$ :

- а)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2;$
- б)  $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \quad x_0 = 1 + 2i;$
- в)  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20, \quad x_0 = -2.$

**10.19.** Визначити кратність кореня  $x_0$  полінома  $f(x)$ :

- а)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2;$
- б)  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \quad x_0 = -2;$
- в)  $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8, \quad x_0 = -1;$
- г)  $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \quad x_0 = 3.$

**10.20.** При якому значенні  $\lambda$  поліном  $f(x) = x^5 - \lambda x^2 - \lambda x + 1$  має  $-1$  коренем не нижче другої кратності?

**10.21.** Знайти такі  $\lambda$  та  $\mu$ , щоб тричлен  $f(x) = \lambda x^4 + \mu x^3 + 1$  ділився на  $(x-1)^2$ ?

**10.22.** При яких значеннях  $\lambda$  та  $\mu$  поліном  $f(x) = \lambda x^{n+1} + \mu x^n + 1$  ділиться на  $(x-1)^2$ ?

**10.23.** При яких значеннях  $\lambda$  та  $\mu$  поліном  $f(x) = x^5 + \lambda x^3 + \mu$  має подвійний корінь, відмінний від нуля?