

Розділ 1.

Матриці

1.1. Описати умови, при яких правильні нижче наведені тотожності, та довести ці тотожності (A, B, C — матриці, λ, μ — числа):

- а) $A + B = B + A$; б) $A + (B + C) = (A + B) + C$; в) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
г) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; р) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

1.2. а) Чи можна перемножити рядок довжини m на стовпчик висоти n ?

б) Чи можна перемножити стовпчик висоти n на рядок довжини m ?

1.3. Яким умовам повинні задовольняти матриці A та B , щоб:

- а) існував добуток AB ; б) існував добуток BA ; в) існували добутки AB та BA ?

1.4. Виразити розміри матриці AB через розміри матриць A та B .

1.5. Перевірити правильність тотожностей (A, B, C, D — матриці, λ — число):

- а) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; б) $(AB)C = A(BC)$; в) $A(B + C) = AB + AC$;
г) $(A + B)C = AC + BC$; р) $A(B + C + D) = AB + AC + AD$.

1.6. Чи завжди правильна матрична рівність $AB = BA$? Навести приклади переставних і непереставних матриць.

1.7. Що можна сказати про розміри матриць A та B , якщо $AB = BA$?

1.8. Нехай A та B — квадратні матриці однакового порядку. Перевірити чи правильні такі матричні тотожності:

- а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$;
в) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$; г) $(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$.

1.9. Довести, що якщо A та B — квадратні матриці однакового порядку і $AB = BA$, то

$$(A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n.$$

Навести приклад матриць, для яких ця формула не виконується.

1.10. Перевірити правильність тотожностей (A, B, C — матриці відповідних порядків, λ — число):

- а) $(A + B)^T = A^T + B^T$; б) $(AB)^T = B^T A^T$; в) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$;
г) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; р) $(A^T)^T = A$; д) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

1.11. Довести, що k -ий стовпчик матриці AB дорівнює добутку матриці A на k -ий стовпчик матриці B . Сформулювати та довести аналогічне твердження для рядків.

1.12. Нехай задано добуток AB матриць A та B . Довести, що:

- а) якщо до i -го рядка матриці A додати її j -й рядок, то з матрицею AB відбудеться те ж елементарне перетворення;
б) якщо i -й рядок матриці A помножити на число λ , то i -й рядок AB також домножиться на λ ;

-
- в) при перестановці місцями двох рядків матриці A відповідні рядки AB також переставляться.
- 1.13.** Як зміниться добуток AB матриць A та B , якщо:
- до i -го стовпця матриці B додати її j -й стовпець, помножений на число λ ;
 - i -ий стовпчик матриці B помножити на число λ ;
 - переставити i -й та j -й стовпці матриці B .
- 1.14.** Нехай A — квадратна матриця, причому $E_{ij}A = AE_{ij}$ для усіх матричних одиниць E_{ij} . Довести, що $A = \lambda E$ для деякого скаляра λ .
- 1.15.** Нехай A — квадратна матриця, причому $E_{ii}A = AE_{ii}$ для усіх i . Довести, що матриця A діагональна.
- 1.16.** Нехай A — матриця розміру $m \times n$, E_m та E_n — одиничні матриці порядку m та n відповідно. Довести, що $E_mA = AE_n = A$.
- 1.17.** На яку матрицю треба домножити матрицю A , щоб в результаті отримати:
- перший стовпчик матриці A ;
 - перший рядок A ?
- 1.18.** Підібрати елементарну матрицю P так, щоб матриця PA отримувалась із A :
- перестановкою двох перших рядків A ;
 - додаванням першого рядка до другого;
 - множенням першого рядка на число $\lambda \neq 0$.
- 1.19.** Нехай A та B — діагональні матриці однакового порядку, λ — число. Довести, що матриці λA , $A + B$, AB , BA також діагональні і $AB = BA$.
- 1.20.** Нехай матриця A — діагональна, всі її елементи різні і $AB = BA$. Довести, що тоді матриця B також діагональна.
- 1.21.** Нехай матриці A та B — верхні трикутні. Виразити елементи матриці AB через елементи матриць A та B .
- 1.22.** Нехай A — довільна квадратна матриця. Довести, що матриця $A + A^T$ симетрична, а матриця $A - A^T$ кососиметрична.
- 1.23.** Довести, що довільну квадратну матрицю можна розкласти в суму симетричної та кососиметричної матриць. Чи є це розкладання однозначне?
- 1.24.** Довести правильність тотожностей:
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$;
 - $\text{tr} AB = \text{tr} BA$.
- 1.25.** Довести, що рівність $AB - BA = E$ не виконується для жодних матриць A і B з числовими елементами.

Розділ 2.

Визначники

2.1. Довести, що при дійсних a, b, c корені рівняння $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ будуть дійсними.

2.2. Довести, що квадратна матриця X другого порядку є розв'язком рівняння

$$X^2 - (\operatorname{tr} X)X + \det X = O.$$

2.3. Довести, що визначник третього порядку, утворений із чисел 1 та -1 , є парним числом.

2.4. Довести такі властивості визначників:

- а) транспонування матриці не змінює визначника;
- б) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то й сам визначник дорівнює нулю;
- в) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те ж число, то й весь визначник помножиться на це число;
- г) якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак;
- ґ) якщо два рядки (стовпці) визначника однакові, то він дорівнює нулю;
- д) якщо усі елементи одного рядка пропорційні відповідним елементам іншого рядка, то визначник дорівнює нулю (це ж правильно і для стовпців);
- е) якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох складових, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім заданого, залишилися незмінними, а у заданому рядку в першому визначнику знаходяться перші, а в другому — другі складові (це ж правильно і для стовпців);
- є) якщо до елементів одного рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число, то визначник не зміниться (це ж правильно і для стовпців).

2.5. Скільки різних інверсій можна утворити з чисел $1, 2, \dots, n$.

2.6. В якій перестановці чисел $1, 2, \dots, n$ кількість інверсій найбільша і чому вона дорівнює?

2.7. Чому дорівнює сума числа інверсій і числа порядків в довільній перестановці чисел $1, 2, 3, \dots, n$?

2.8. Довести, що від однієї перестановки a_1, a_2, \dots, a_n до іншої перестановки b_1, b_2, \dots, b_n тих же елементів можна перейти шляхом не більше, ніж $n - 1$ транспозицій.

2.9. Довести, що від однієї перестановки a_1, a_2, \dots, a_n до будь-якої іншої перестановки b_1, b_2, \dots, b_n тих же елементів можна перейти шляхом не більше, ніж $\frac{n(n-1)}{2}$ суміжних транспозицій (тобто транспозицій сусідніх елементів).

2.10. Нехай в перестановці $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ кількість інверсій дорівнює k . Скільки інверсій буде в перестановці $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$.

2.11. Скільки інверсій у всіх перестановках n елементів разом?

- 2.12.** Довести, що транспозиція будь-яких двох елементів перестановки змінює її парність.
- 2.13.** Скільки існує різних парних (непарних) перестановок чисел $1, 2, \dots, n$?
- 2.14.** Довести, що якщо у визначнику порядку n на перетині деяких r рядків та s стовпців ($r + s > n$) стоять нулі, то визначник дорівнює нулю.
- 2.15.** Як зміниться визначник n -го порядку, якщо
- його перший стовпчик переставити на останнє місце, а решта стовпчиків пересунути вліво, зберігаючи їх розташування;
 - записати його рядки у зворотному порядку;
 - змінити знак всіх його елементів на протилежний;
 - повернути його матрицю на 90° навколо «центра» (проти годинникової стрілки)?
- 2.16.** Як зміниться визначник, якщо
- кожен його елемент замінити елементом, симетричним з заданим стосовно «центра» визначника;
 - кожен його елемент замінити елементом, симетричним з заданим стосовно бічної діагоналі;
 - кожен його елемент a_{ik} помножити на c^{i-k} ($c \neq 0$)?
- 2.17.** Довести, що визначник не зміниться, якщо
- до кожного його рядка, крім останнього, додати наступний рядок;
 - до кожного його стовпчика, розпочинаючи з другого, додати попередній стовпчик;
 - від кожного рядка, крім останнього, відняти усі наступні рядки;
 - до кожного стовпчика, розпочинаючи з другого, додати усі попередні стовпчики.
- 2.18.** Як зміниться визначник, якщо
- від кожного рядка, крім останнього, відняти наступний рядок, а від останнього рядка відняти початковий перший рядок;
 - до кожного стовпчика, розпочинаючи з другого, додати попередній стовпчик і в той же час до першого додати останній?
- 2.19.** Довести, що визначник не зміниться, якщо змінити знак всіх елементів на непарних місцях; якщо ж змінити знак всіх елементів на парних місцях, то визначник не зміниться, якщо він парного порядку, і змінить знак, якщо непарного порядку.
- 2.20.** Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?
- 2.21.** Чи правильні тотожності:
- $\det(A + B) = \det A + \det B$;
 - $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;
 - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (n — порядок матриці);
 - $\det(\lambda A^k) = (\det A)^k$?
- 2.22.** Довести, що для довільної квадратної матриці A з дійсними коефіцієнтами виконується нерівність $\det(AA^T) \geq 0$.
- 2.23.** Скільки мінорів k -го порядку містить визначник порядку n ?
- 2.24.** З'ясувати, чи правильні тотожності:
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; б) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$; в) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;
 - $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$; г) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$; д) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
- 2.25.** Довести, що якщо матриця $E + AB$ оборотна, то матриця $E + BA$ також оборотна.
- 2.26.** Чи може бути оборотною прямокутна матриця?

- 2.27.** а) Довести, що якщо A, B, C — квадратні матриці та $AB = E, AC = E$, то $B = C$.
б) Чи можлива рівність $AB = E$ для прямокутних матриць? Чи правильне твердження а) для прямокутних матриць?
- 2.28.** Довести, що матриця, обернена до елементарної, також елементарна.
- 2.29.** а) Довести, що квадратну матрицю за допомогою елементарних перетворень рядків можна звести до одиничної тоді і лише тоді, коли вона не вироджена.
б) Сформулювати та довести аналогічне твердження для елементарних перетворень стовпчиків матриці.
- 2.30.** Довести, що довільна не вироджена матриця є добутком елементарних матриць.
- 2.31.** а) Нехай A та B — матриці одного й того ж порядку і матриця A за допомогою деякої послідовності елементарних перетворень рядків переведена в одиничну матрицю E . В яку матрицю зведе ця ж послідовність елементарних перетворень матрицю E ? Матрицю B ?
б) Відповісти на ці ж питання для послідовності елементарних перетворень стовпчиків матриці A , які переводять A в E .
- 2.32.** а) Описати та обґрунтувати спосіб обчислення матриці A^{-1} , який використовує елементарні перетворення рядків матриць A, E .
б) Описати та обґрунтувати спосіб знаходження матриці A^{-1} , який використовує елементарні перетворення стовпчиків матриць A, E .
- 2.33.** Як зміниться матриця A^{-1} , якщо в матриці A :
а) переставити i -й та j -й рядки;
б) до i -го рядка додати j -й, помножений на λ ;
в) помножити i -й рядок на число $\lambda \neq 0$;
г) перетворення а)-в) здійснити зі стовпцями?
- 2.34.** Нехай $A^2 + A + E = O$. Довести, що матриця A не вироджена, і вказати найпростіший спосіб обчислення A^{-1} .
- 2.35.** Нехай $A^k = O$. Довести, що $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{k-1}$.
- 2.36.** Довести, що якщо $AB = BA$, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.
- 2.37.** Перевірити формулу $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS$.
- 2.38.** Довести, що якщо матриця A діагональна і всі її діагональні елементи відмінні від 0, то A^{-1} існує і є діагональною.
- 2.39.** Чому дорівнює визначник цілочисельної матриці A , якщо матриця A^{-1} також цілочисельна?
- 2.40.** Нехай A — матриця другого порядку і k — натуральне число, більше двох. Довести, що $A^k = O$ тоді і тільки тоді, коли $A^2 = O$.

Розділ 3.

Системи лінійних рівнянь

3.1. Нехай A — квадратна матриця. Довести, що матричне рівняння $AX = B$ має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли матриця A невироджена.

3.2. Як змінюються розв'язки системи лінійних рівнянь при елементарних перетвореннях стовпців основної матриці?

3.3. Яку систему рівнянь найпростішого вигляду можна отримати, застосовуючи алгоритм Гауса до рядків розширеної матриці заданої системи n лінійних рівнянь з n невідомими, якщо основна матриця невироджена?

3.4. Довести, що:

- а) сума двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь також є її розв'язком;
- б) добуток довільного розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь на число також є розв'язком цієї ж системи.

3.5. Чи може однорідна система лінійних рівнянь виявитися несумісною?

Розділ 4.

Арифметичний векторний простір

4.1. Довести, що для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ та будь-яких чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ виконуються такі співвідношення:

- а) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
в) $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$; г) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
ґ) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$; д) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
е) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; є) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, де $1 \in \mathbb{R}$.

4.2. Довести, що:

- а) якщо система векторів містить лінійно залежну підсистему, то вона лінійно залежна;
б) якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її підсистема також лінійно незалежна.

4.3. Довести, що:

- а) довільні k ($k > 1$) векторів лінійно залежні тоді і лише тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших;
б) якщо вектори a_1, \dots, a_k лінійно незалежні, а вектори a_0, a_1, \dots, a_k лінійно залежні, то вектор a_0 лінійно виражається через a_1, \dots, a_k ;
в) якщо вектори a_1, \dots, a_k лінійно незалежні і вектор a_0 не можна через них виразити, то система a_0, a_1, \dots, a_k лінійно незалежна;
г) якщо кожен з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ лінійно незалежні, то $s \leq r$;
ґ) будь-які $k > n$ векторів простору \mathbb{R}^n лінійно залежні.

4.4. Довести, що:

- а) система векторів, яка складається з одного ненульового вектора, лінійно незалежна;
б) будь-яка система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна;
в) будь-яка система векторів, яка містить хоча б два пропорційні (або рівні) вектори, лінійно залежна.

4.5. Чи можна стверджувати, що кожен вектор лінійно залежної системи лінійно виражається через інші вектори цієї системи?

4.6. Довести, що якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно залежні і вектор \vec{a}_3 не виражається лінійно через \vec{a}_1 та \vec{a}_2 , то вектори \vec{a}_1 та \vec{a}_2 різняться між собою лише числовим множником.

4.7. Перелічити всі підпростори тривимірного векторного простору.

4.8. У якому випадку система векторів володіє єдиною базою?

4.9. Довести, що кожен вектор підпростору можна записати у вигляді лінійної комбінації векторів бази цього підпростору однозначно.

4.10. Довести, що кожен підпростір простору \mathbb{R}^n має скінченну базу.

-
- 4.11.** Скільки баз може мати ненульовий підпростір простору \mathbb{R}^n ?
- 4.12.** Довести, що усі бази одного й того ж підпростору простору \mathbb{R}^n складаються з однакової кількості векторів.
- 4.13.** Нехай U_1, U_2 — підпростори простору \mathbb{R}^n , причому підпростір U_1 міститься в підпросторі U_2 . Довести, що вимірність U_1 не вища вимірності U_2 , причому вимірності рівні тоді і тільки тоді, коли $U_1 = U_2$.
- 4.14.** Довести, що якщо сума вимірностей підпросторів простору \mathbb{R}^n більше n , то ці підпростори мають спільний ненульовий вектор.

Розділ 5.

Ранг матриці та його застосування

5.1. Описати всі квадратні матриці

- а) рангу 0; б) рангу 1.

5.2. Довести, що ранг діагональної матриці дорівнює числу її елементів, відмінних від нуля.

5.3. Довести, що, якщо в матриці дорівнюють нулю всі мінори порядку k , то і всі мінори порядку $k + 1$ дорівнюють нулю.

5.4. Довести, що

- а) приписування до матриці нульового стовпця не змінює її рангу;
б) приписування до матриці стовпця, рівного лінійній комбінації її стовпців, не змінює її рангу.

5.5. Довести такі властивості рангу матриці:

- а) множення довільного рядка матриці на відмінне від нуля число не змінює її рангу;
б) перестановка рядків матриці не змінює її рангу;
в) додавання до якого-небудь рядка матриці лінійної комбінації інших рядків не змінює її рангу;
г) ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях її стовпців.

5.6. Довести, що якщо $\det A = 0$, то рядки матриці A , так само як і її стовпці, лінійно залежні.

5.7. а) Оцінити ранг добутку двох матриць через ранги співмножників.

б) Навести приклади, коли виконуються співвідношення: $\text{rang } AB < \text{rang } A$, $\text{rang } AB < \text{rang } B$, $\text{rang } AB < \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$, $\text{rang } AB = \text{rang } A$, $\text{rang } AB = \text{rang } B$.

5.8. а) Нехай A — матриця-рядок, B — матриця-стовпець. Обчислити ранг матриці BA .

- б) Нехай $\text{rang } C = 1$. Довести, що матриця C дорівнює добутку деякого стовпця на деякий рядок.

5.9. Нехай A, B, C — матриці, $\det A \neq 0$ і визначено добутки AB, CA . Довести, що $\text{rang } AB = \text{rang } B$, $\text{rang } CA = \text{rang } C$. Чи може бути виконана будь-яка з цих рівностей, якщо $\det A = 0$?

5.10. Довести, що якщо $\text{rang } A = r$, то мінор, який розміщено на перетині r лінійно незалежних рядків і r лінійно незалежних стовпців матриці A , відмінний від 0.

5.11. Нехай матриця A складається з r лінійно незалежних стовпців, а матриця B — з r лінійно незалежних рядків. Чому дорівнює ранг AB ?

5.12. Матриці A та B мають розміри відповідно $m \times r$ та $r \times n$, і $\text{rang } AB = r$. Знайти ранги матриць A та B .

5.13. Вказати, які з нижче наведених співвідношень можливі. Які з них правильні для довільної пари матриць однакових розмірів?

- а) $\text{rang}(A + B) = \text{rang } A$;
б) $\text{rang}(A + B) = \max\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$;
в) $\text{rang}(A + B) = \text{rang } A + \text{rang } B$;
г) $\text{rang}(A + B) < \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$;

г) $\text{rang}(A + B) < \text{rang } A + \text{rang } B$;

д) $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang } A + \text{rang } B$.

5.14. Нехай матриці A та B мають розміри відповідно $m \times n$ та $n \times p$, і нехай $AB = O$. Довести, що $\text{rang } A + \text{rang } B \leq n$.

5.15. Скільки лінійно незалежних розв'язків має однорідна система лінійних рівнянь, якщо її матриця не вироджена?

5.16. Сформулювати умови (і перевірити їх необхідність та достатність), при яких однорідна система лінійних рівнянь має:

а) єдиний розв'язок;

б) нескінченно багато розв'язків.

5.17. На скільки одиниць ранг основної матриці системи може відрізнятись від рангу розширеної?

5.18. Нехай система m лінійних рівнянь з n невідомими несумісна, а її основна матриця має ранг n . До якого найпростішого вигляду можна привести цю систему рівнянь, застосовуючи до рядків розширеної матриці алгоритм Гауса?

5.19. Сформулювати необхідну і достатню умову того, що система m лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок.

5.20. Нехай стовпчик з вільних членів лінійної системи рівнянь дорівнює сумі стовпчиків її основної матриці. Вказати який-небудь частковий розв'язок системи.

5.21. Нехай стовпець з вільних членів лінійної системи рівнянь збігається з останнім стовпцем її основної матриці. Вказати який-небудь частковий розв'язок системи.

5.22. Довести, що якщо стовпці основної матриці лінійно незалежні, то система лінійних рівнянь має не більше, ніж один розв'язок.

5.23. Довести, що якщо рядки основної матриці лінійно незалежні, то система рівнянь сумісна при будь-якому стовпці вільних членів.

5.24. Довести таке твердження: якщо система лінійних рівнянь сумісна при будь-якому стовпці вільних членів, то рядки її основної матриці лінійно незалежні.

5.25. Сформулювати умови (і довести їх необхідність та достатність), яким повинна задовольняти основна матриця для того, щоб число розв'язків системи лінійних рівнянь, залежно від стовпця b вільних членів, дорівнювало:

а) 0 або 1; б) 1 або ∞ ; в) 0 або ∞ ; г) 1 при всіх b .

5.26. Довести, що якщо еквівалентні сумісні системи лінійних неоднорідних рівнянь, то еквівалентні і відповідні однорідні системи.