

РОЗДІЛ 2. СИЛОВСЬКІ ПІДГРУПИ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД ПОЛЕМ

§10. Силовські p -підгрупи симетричної групи

Введемо конструкцію сплетіння групи підстановок з ще однією групою підстановок. Нехай A — підгрупа групи S_n підстановок на n символах $\{1, 2, \dots, n\}$ і $C_p = \langle \sigma = (1, 2, \dots, p) \rangle$ — циклічна порядку p група підстановок степеня p , породжена циклом σ . Визначимо сплетіння $A \wr C_p$ групи A з групою C_p . Перш за все відмітимо, що це є підгрупа групи S_{pn} підстановок на pn символах. Нехай

$$U_i = \{(i-1)n + j \mid j = 1, 2, \dots, n\} \quad (i = 1, \dots, p),$$

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_p = \{1, 2, \dots, np\}$$

і прямий добуток $A^p = A \times \dots \times A$ діє в множині U , переставляючи символи лише в підмножинах U_i ($i = 1, \dots, p$), а саме, якщо

$$a = (a_1, \dots, a_p), \quad a_i \in A, \quad u = (i-1)n + j \in U_i, \quad (1)$$

то

$$a(u) = (i-1)n + a_i(j) \quad (i = 1, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Тоді A^p буде підгрупою групи підстановок S_{pn} на множині U із pn елементів. Цикл σ визначає підстановку $\tilde{\sigma}$ на U , яка переставляє підмножини U_1, \dots, U_p :

$$\tilde{\sigma}((i-1)n + j) = (\sigma(i)-1)n + j \quad (i = 1, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

Тоді *сплетіння*

$$A \wr C_p = \langle A^p, \tilde{\sigma} \rangle$$

це підгрупа в S_{pn} , що породжується групою A^p і підстановкою $\tilde{\sigma}$. Покажемо, що A^p — нормальна підгрупа в $A \wr C_p$. Дійсно, нехай $a' = (a_2, \dots, a_p, a_1)$ (див. (1)). Якщо $i < p$, то

$$a\tilde{\sigma}((i-1)n + j) = a(\sigma(i)-1)n + j = a(in + j) = in + a_{i+1}(j),$$

$$\tilde{\sigma}a'((i-1)n + j) = \tilde{\sigma}((i-1)n + a_{i+1}(j)) = (\sigma(i)-1)n + a_{i+1}(j) = in + a_{i+1}(j).$$

Крім того,

$$a\tilde{\sigma}((p-1)n + j) = a(\sigma(p)-1)n + j = a(j) = a_1(j),$$

$$\tilde{\sigma}a'((p-1)n + j) = \tilde{\sigma}((p-1)n + a_1(j)) = (\sigma(p)-1)n + a_1(j) = a_1(j).$$

Отже, $a\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}a'$ і $\tilde{\sigma}^{-1}a\tilde{\sigma} = a'$. Тоді A^p — нормальна підгрупа в групі $A \wr C_p$. Відмітимо, що $|A \wr C_p| = |A|^p p$ і група $A \wr C_p$ є напівпрямий добуток підгрупи $\langle \tilde{\sigma} \rangle$ і нормальної підгрупи A^p .

Для простого числа p визначимо функцію натурального аргументу

$$M(n) = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots,$$

де $[a]$ — ціла частина числа a . Неважко бачити, що

$$M(p^s) = 1 + p + \dots + p^{s-1} = \frac{p^s - 1}{p - 1}.$$

Лема 10.1. *Нехай $0 \leq r < p, p^s > n$. Тоді*

$$M(n + rp^s) = M(n) + rM(p^s).$$

Доведення. Оскільки $n + rp^s < p^s + rp^s = (r + 1)p^s \leqslant p^{s+1}$, то

$$\left[\frac{n + rp^s}{p^j} \right] = \left[\frac{n}{p^j} \right] = 0 \text{ при } j > s.$$

Крім того,

$$\left[\frac{n + rp^s}{p^j} \right] = \left[\frac{n}{p^j} \right] + rp^{s-j} \text{ при } j \leqslant s.$$

Лема 10.2. Порядок силовської p -підгрупи P групи S_n дорівнює $p^{M(n)}$.

Доведення. Знайдемо кількість t множників p в порядку $n!$ групи S_n . Тоді $|P| = p^t$. Якщо x — кратний p множник в $n!$, то $x = pa$, де $a \leqslant \left[\frac{n}{p} \right]$. Виберемо з кожного множника x по одному p . В результаті ми одержимо $\left[\frac{n}{p} \right]$ множників p і число $\left[\frac{n}{p} \right]$ увійде доданком в t . Серед чисел $\frac{n}{p}$ можуть бути числа кратні p — це числа для $x = p^2a$, де $a \leqslant \left[\frac{n}{p^2} \right]$. Відберемо з кожного такого $\frac{x}{p}$ по одному множнику p . В результаті ми одержали ще $\frac{n}{p^2}$ множників p і число $\frac{n}{p^2}$ увійде наступним доданком в t . Серед чисел $\frac{x}{p^2}$ шукаємо числа кратні p і т. д. Нарешті одержимо $t = M(n)$.

Лема 10.3. *Нехай*

$$P_0 = C_1, P_1 = C_p, P_j = P_{j-1} \wr C_p \quad (j > 1).$$

Група P_j буде силовською p -підгрупою групи S_{p^j} ($j = 0, 1, \dots$).

Доведення. Силовська p -підгрупа групи S_p буде циклічною групою C_p порядку p . Далі

$$|P_{j-1} \wr C_p| = p|P_{j-1}|^p = p(p|P_{j-2}|^p)^p = p^{\frac{p^2-1}{p-1}} |P_{j-2}|^{p^2} = \dots = p^{M(p^j)} = |P_j|.$$

Звідси, а також в силу того, що $P_{j-1} \wr C_p$ — підгрупа в S_{p^j} , випливає, що $P_j = P_{j-1} \wr C_p$. Лема доведена.

Теорема 10.1. *Нехай*

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_s p^s$$

— p -ичний розклад натурального числа n ($0 \leqslant n_j < p$, $n_s \neq 0$). Нехай P — силовська p -підгрупа симетричної групи S_n на n символах. Тоді

$$P = P_0^{n_0} \times P_1^{n_1} \times \dots \times P_s^{n_s}. \quad (3)$$

Доведення. (Відмітимо, що A^r це прямий добуток r екземплярів групи A). Представимо множину U із n символів у вигляді об'єднання неперетинаючих підмножин із n_0 символів, n_1 множин по p символів і т. д., n_s множин по p^s символів. Тоді прямий добуток $S_1^{n_0} \times S_p^{n_1} \times \dots \times S_{p^s}^{n_s}$ груп підстановок на цих підмножинах буде підгрупою в групі S_n . Права частина в (3) є p -підгрупа в цьому добутку. Із лем 10.1–10.3 випливає, що порядки груп в лівій і правій частинах рівності (3) є однакові. Це закінчує доведення теореми.

Наслідок 10.1. Якщо група S_n містить транзитивну p -підгрупу, то $n = p^s$.

§11. Відомості з теорії зображень груп

Нехай T — поле, \bar{T} — алгебраїчне замикання поля T , G — скінчена група, H — підгрупа групи G і $\{g_1, \dots, g_n\}$ — система представників всіх лівих суміжних класів групи G за підгрупою H . *Лінійним характером* групи H називається гомоморфізм $\chi : H \rightarrow \bar{T}^*$ групи H в мультиплікативну групу \bar{T}^* поля \bar{T} . Лінійний характер — це зображення степеня один. Нехай $\Gamma = \chi^G$ — \bar{T} -зображення групи G , що індукується лінійним характером χ підгрупи H . Тоді

$$\Gamma(g) = (\dot{\chi}(g_j^{-1}gg_i)) \quad (g \in G),$$

де $\dot{\chi} : G \rightarrow T$ така функція, що

$$\dot{\chi}(g) = \begin{cases} 0, & g \notin H, \\ \chi(g), & g \in H. \end{cases}$$

Нехай $M = \bar{T}e$ — $\bar{T}H$ -модуль зображення χ :

$$he = \chi(h)e \quad (h \in H).$$

Тоді індукований $\bar{T}G$ -модуль $L = M^G$ зображення Γ має \bar{T} -базис

$$e_1 = g_1 \otimes e, \dots, e_n = g_n \otimes e$$

і для довільного g з групи G

$$ge_i = \chi(g_j^{-1}gg_i)e_j,$$

де для кожного i ($1 \leq i \leq n$) індекс j ($1 \leq j \leq n$) є єдиним таким, що $g_j^{-1}gg_i \in H$.

Теорема 11.1 (Хупперта, Бермана). *Нехай порядок скінченої розв'язної групи G не ділиться на характеристику поля T і в групі G існує така нормальна підгрупа G_0 , що фактор-група G/G_0 є надрозв'язна і всі силовські підгрупи групи G_0 є абелеві. Якщо Γ — незвідне зображення групи G над полем \bar{T} , то існує така підгрупа H групи G і такий лінійний характер $\chi : H \rightarrow \bar{T}^*$, що зображення Γ еквівалентно індукованому зображенню χ^G .*

Опишемо алгоритм Бермана знаходження незвідних зображень групи G над полем \bar{T} для групи G , яка задовольняє умовам теореми 11.1. Цим алгоритмом описуються пари (χ, H) , де H — така підгрупа в G і χ — такий лінійний характер цієї підгрупи, що індуковане зображення χ^G групи G є незвідним над полем \bar{T} . Введемо попередньо поняття *нормалізатора* в групі G лінійного характера χ довільної підгрупи H :

$$N_G(\chi) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H, \chi(g^{-1}hg) = \chi(h) \ (h \in H)\}.$$

Нехай

$$1 \subset G_1 \subset \dots \subset G_j \subset \dots \subset G_s = G$$

— головний ряд групи G , що проходить через підгрупу G_0 . На першому кроці алгоритму знаходимо множину M_1 всіх пар (χ, H) , де $H = G_1$, χ пробігає всі лінійні характери абелевої групи G_1 (в цьому випадку нормалізатор $N_{G_1}(\chi) = G_1$ для лінійного характеру χ довільної підгрупи $H \subset G_1$). Нехай на j -му кроці знайдена множина M_j всіх пар (χ, H) таких, що H — підгрупа в групі G_j , χ — такий лінійний характер підгрупи H , що $N_{G_j}(\chi) = H$. Опишемо $(j+1)$ -ий крок. Нехай $(\chi, H) \in M_j$. Знаходимо нормалізатор $N = N_{G_{j+1}}(\chi)$ характера χ в члені G_{j+1} головного ряду групи G . Якщо $N = H$, то пару (χ, H) відправляємо в множину M_{j+1} . Нехай $(N : H) = m > 1$. Тоді характер χ групи H має m різних продовжень $\chi_1, \dots, \chi_m : N \rightarrow \bar{T}^*$ до лінійних

характерів групи N . Всі пари (χ_j, N) ($j = 1, \dots, m$) відправляємо в множину M_{j+1} . Переходимо до наступної пари $(\chi, H) \in M_j$ і т. д. На останньому кроці одержимо множину M_s всіх потрібних пар.

Нехай далі G — довільна скінчена група, характеристика поля T рівна нулю і Γ — незвідне зображення групи G над полем \bar{T} . Розширення T' поля T називається *полем розкладу* відносно T зображення Γ , якщо це зображення еквівалентно зображеню матрицями над полем T' . Згідно теореми Брауера [11], поле $T(\varepsilon)$ (ε — первісний корінь степеня $|G|$ із одиницею) є полем розкладу будь-якого незвідного \bar{T} -зображення групи G і можна далі обмежитись полями розкладу, які містяться в полі $T(\varepsilon)$. Поле $T(\varepsilon)$ є нормальним розширенням поля T з абелевою групою Галуа і будь-яке підполе в цьому полі буде також нормальним розширенням поля T . Поле T' містить поле $T_1 = T(\chi)$ характера χ зображення Γ . Нехай K — таке поле розкладу зображення Γ , що степінь $(K : T)$ є найменша. Нехай в полі K вибрано який-небудь T -базис і нехай

$$\varrho_{K/T} : K \rightarrow M(s, T) \quad (s = (K : T))$$

— зображення поля K , що ставить у відповідність кожному елементу α поля K матрицю $\varrho_{K/T}(\alpha)$ оператора

$$\hat{\alpha} : K \rightarrow K \quad \hat{\alpha}(x) = \alpha x \quad (x \in K)$$

множення на α у вибраному T -базисі поля K . Будемо далі вважати, що Γ уже є зображенням над полем K . Нехай $\Delta = \varrho_{K/T}(\Gamma)$ — зображення групи G над полем T , що отримується із K -зображення Γ заміною кожного матричного елемента $\alpha \in K$ на матрицю $\varrho_{K/T}(\alpha)$. Нехай $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ — система представників всіх суміжних класів групи Галуа $G(K, T)$ поля K над полем T за її підгрупою $G(K, T_1)$. Відмітимо, що $k = (T_1 : T)$. Нехай $\sigma = \sigma_j$. Позначимо через Γ^σ зображення групи G над полем K , що отримується із зображення Γ заміною всіх матричних елементів α на $\sigma(\alpha)$.

Твердження 11.1. *Зображення $\Gamma^{\sigma_1}, \dots, \Gamma^{\sigma_k}$ групи G є незвідні і попарно нееквівалентні над полем K .*

Доведення. Автоморфізми $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ визначають всі попарно різні автоморфізми поля T_1 над полем T . Тоді характеристики вказаних зображень будуть попарно різні (якщо $\sigma(\chi) = \chi$, то $\sigma \in G(K, T_1)$). Це доводить твердження.

Твердження 11.2. *Зображення Δ групи G є незвідне над полем T . Має місце розклад*

$$\Delta = (K : T_1)(\Gamma^{\sigma_1} + \dots + \Gamma^{\sigma_k})$$

T -зображення Δ групи G в суму незвідних зображень цієї групи G над полем K .

$$T \subset T_1 \subset K.$$

Доведення цього твердження опирається на декілька лем. Введемо в розгляд алгебри — лінійні оболонки K -зображення Γ над полями T, T_1, K відповідно:

$$A = [\Gamma]_T = [\Gamma(G)]_T, \quad A_1 = [\Gamma]_{T_1}, \quad A_2 = [\Gamma]_K.$$

Всі три алгебри будуть простими алгебрами, а алгебра A_2 буде ізоморфна алгебрі $M(n, K)$ (n — степінь зображення Γ).

Лема 11.1. *Центр $\mathfrak{Z}(A)$ алгебри A як лінійний простір над полем T породжується матрицями*

$$\text{diag}[\chi(g), \dots, \chi(g)] \quad (g \in G).$$

Окрім цього, $\mathfrak{Z}(A) \cong T_1$. Алгебра A_1 є центральною алгеброю² над основним полем T_1 . Якщо ототожнити $\mathfrak{Z}(A) = T_1$, то кільця A і A_1 сумістяться.

² Центральна алгебра над полем T — алгебра з одиницею над полем T , центр якої суміщається з основним полем T .

Доведення. Центри обох алгебр породжуються всіма матрицями вигляду $\Gamma(c)$, де c сума елементів класа C спряжених елементів групи G . Нехай матриця S належить центру алгебри A або алгебри A_1 . Тоді

$$S\Gamma(g) = \Gamma(g)S \quad (g \in G).$$

Так як Γ — абсолютно незвідне зображення, то матриця S буде скалярною матрицею. Отже, $\Gamma(c) = \text{diag}[\lambda, \dots, \lambda]$. Взявши сліди матриць, одержимо

$$\lambda = \frac{h\chi(a)}{n} \quad (h = |C|, a \in C).$$

Звідси випливає доведення леми.

Лема 11.2. *Нехай Γ_1 буде те T_1 -зображення групи G , модуль якого суміщається з мінімальним лівим ідеалом U алгебри A_1 . Тоді*

$$\Gamma_1 = (K : T_1)\Gamma,$$

тобто над полем K зображення Γ_1 є сума $(K : T_1)$ зображень Γ .

Доведення. Нехай D — центральне тіло над полем T_1 таке, що

$$A_1 = M(t, D), \quad (D : T_1) = r^2.$$

Тоді степінь зображення Γ_1 дорівнює r^2t . Тензорний добуток $K \otimes_{T_1} A_1$ можна ототожнити з алгеброю A_2 . Тоді $n^2 = r^2t^2$ і поле K розщеплює тіло D . Тоді, в силу вибору поля K , це поле буде максимальним підполем в тілі D . Отже, $r = (K : T_1)$. Тоді степінь зображення Γ_1 рівний $(K : T_1)n$. Так як KG -модуль $K \otimes_{T_1} U$ є сума мінімальних ідеалів алгебри A_2 і розмірності над K цих ідеалів рівні n , то $\Gamma_1 = (K : T_1)\Gamma$. Лема доведена.

Нехай V — T -зображення групи G , модуль якого суміщається з мінімальним лівим ідеалом алгебри A . Легко бачити, що

$$V = \varrho_{T_1/T}(\Gamma_1).$$

Всі матриці $\varrho_{T_1/T}(\alpha)$ ($\alpha \in T_1$) одночасно подібні над полем T_1 діагональним матрицям

$$\text{diag}[\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_k(\alpha)].$$

Тоді над полем T_1 зображення V буде мати вигляд

$$V = \Gamma_1^{\sigma_1} + \dots + \Gamma_1^{\sigma_k}.$$

Із леми 10.2 випливає, що

$$V = (K : T_1)(\Gamma^{\sigma_1} + \dots + \Gamma^{\sigma_k}).$$

Незвідне T -зображення V і T -зображення $\varrho_{K/T}(\Gamma)$ мають одинакові степені і містять Γ в розкладах над полем K . Це значить, що ці зображення є еквівалентні, що доводить твердження 11.2. До речі, над полем K

$$\varrho_{K/T}(\Gamma) = \bigoplus_{\sigma \in G(K, T)} \Gamma^\sigma.$$

§12. Силовські p -підгрупи групи $GL(n, T)$. Загальні властивості

В цьому параграфі будуть розглянуті деякі властивості силовських p -підгруп групи $GL(n, T)$ над довільним полем T .

Якщо $\text{char } T = p$, то всі силовські p -підгрупи групи $GL(n, T)$ спряжені з унітрикутною групою $UT(n, T)$ над полем T (теорема 7.2).

Далі в цьому параграфі будемо вважати, що $\text{char } T \neq p$.

Лема 12.1. *Нехай G — p -підгрупа групи $GL(n, T)$. Тоді*

- 1) G — локально скінчена і локально нильпотентна група;
- 2) G — цілком звідна група;
- 3) G — розв'язна група.

Доведення. 1) випливає із теореми Шура, 2) — із теореми Платонова, 3) випливає з теореми Цассенхаузса.

Лема 12.2. *Нехай G — незвідна силовська p -підгрупа групи $GL(n, T)$. Тоді або група G примітивна, або $n = dp^r$ ($r > 0$) і в групі $GL(d, T)$ існує така примітивна силовська p -підгрупа H , що група G буде спряжена зі сплетінням $H \wr P_r$ матричної групи H і силовської p -підгрупи P_r симетричної групи S_{p^r} .*

Доведення. Нехай G — імпримітивна група. Тоді вона спряжена з підгрупою деякого сплетіння $H \wr A$ матричної групи $H \subset GL(d, T)$, де d ділить n з деякою групою A підстановок на $\frac{n}{d}$ символах. Так як G — p -група, то H і A — p -групи. Так як G — незвідна група, то A — транзитивна група і тоді $\frac{n}{d} = p^r$ (див. наслідок 10.1). Нарешті, групи H і A — силовські p -підгрупи в своїх групах (інакше G не силовська підгрупа). Лема доведена.

Лема 12.3. *Нехай G — примітивна p -підгрупа групи $GL(n, T)$. Тоді мають місце такі властивості, пов'язані з рядом Супруненка³ групи G :*

- 1) група F є p -підгрупою мультиплікативної групи K^* поля K ;
- 2) поле K одержується приєднанням до поля T кореня степеня p^s із одиницею для деякого $s \geq 0$;
- 3) $V = F$;
- 4) група G/F діє в полі K автоморфізмами поля K над полем F .

Доведення. Нехай $V \neq F$. За теоремою Супруненка група V/F скінчена. Тоді скінчена p -група V/F має неодиничний центр $Z = \mathfrak{Z}(V/F)$ і неодиничний нижній шар $N = N(Z)$ (це підгрупа породжена елементами порядку p цього центру). Групи Z, N — залишається незмінною при дії довільного автоморфізма групи G/F , зокрема, Z, N — нормальні підгрупи групи G/F . Крім того, група G/F діє спряженням в елементарній абелевій групі⁴ N , яку, в свою чергу, можна розглядувати як скінченно вимірний лінійний простір над полем \mathbb{Z}_p із p елементів. Тоді в просторі N існує ненульовий вектор cF (c — деякий елемент із G) такий, що

$$g^{-1}(cF)g = cF \quad (g \in G).$$

Звідси випливає, що група $\langle F, c \rangle$ є абелевою нормальнюю підгрупою в групі G і ця підгрупа строго містить F , що суперечить вибору групи F . Отже, $V = F$. Властивості 1)–4) тепер слідують із результатів про примітивні розв'язні групи.

³ Ряд Супруненка примітивної розв'язної групи $G : F \subset A \subset V \subset G$ (F — максимальна нормальні абелеві підгрупи групи G , $V = \mathfrak{Z}_G(F)$ — централізатор підгрупи F в групі G , A — така максимальна нормальні підгрупа в групі G , яка міститься в групі V і фактор-група A/F є абелевою групою.)

⁴ Елементарна абелева група — абелева група, всі неодиничні елементи якої мають один і той же простий порядок.

Лема 12.4. Нехай H — незвідна силовська p -підгрупа групи $GL(n, T)$ і $A = \langle \sigma \rangle$ — група підстановок, породжена циклом $\sigma = (1, 2, \dots, p)$. Тоді сплетіння $W(H) = H \wr A$ майже завжди буде незвідною силовською p -підгрупою групи $GL(pn, T)$. Виключення складає лише випадок, коли одночасно виконуються умови:

- 1) $p = 2$,
- 2) $n = 1$,
- 3) $|H| = 2$,
- 4) поле T містить $\sqrt{2}$ або $\sqrt{-2}$.

Доведення. Група $W = W(H)$ породжується нормальною підгрупою $A = H^p = H \times \dots \times H$ і матрицею $b = \tilde{\sigma}$ підстановки σ (над кільцем $M(n, T)$). Відображення $\Delta : A \rightarrow GL(n, T)$, таке, що

$$\Delta(\text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_p]) = a_1 \quad (a_i \in H)$$

є зображенням групи A над полем T . Так як $H = \Delta(A)$ — незвідна група, то зображення Δ також незвідне. Визначимо

$$\Delta^i(a) = \Delta(b^{-i}ab^i) \quad (a \in A; i = 0, 1, \dots, p-1).$$

Тоді $\Delta^0 = \Delta, \Delta^1, \dots, \Delta^{p-1}$ — незвідні T -зображення групи A , вони попарно нееквівалентні (в них різні ядра), але попарно спряжені відносно групи W , яка транзитивно їх переставляє. Із цих властивостей випливає, що індуковане зображення Δ^W групи W буде незвідним, а так як $W = \Delta^W(W)$, то W — незвідна група.

Покажемо, що W буде силовською p -підгрупою групи $GL(np, T)$. Нехай в цій групі існує така матриця

$$X = (x_{ij}) \quad (x_{ij} \in M(n, T)),$$

що

$$X^p \in W, \quad X^{-1}WX = W.$$

Досить показати, що $X \in W$.

Для цього розглянемо перші два члени $Z_1(W), Z_2(W)$ верхнього центрального ряду групи W ($Z_1(W) = \mathfrak{Z}(W), Z_2(W)/Z_1(W) = \mathfrak{Z}(W/Z_1(W))$). Очевидно, що

$$Z_1(W) = \{\text{diag}[\alpha, \dots, \alpha] | \alpha \in \mathfrak{Z}(H)\}.$$

Покажемо, що

$$Z_2(W) = \langle Z_1(W), \text{diag}[1, \alpha, \dots, \alpha^{p-1}] | (\alpha \in \mathfrak{Z}(H), \alpha^p = 1) \rangle.$$

Якщо $\alpha \in \mathfrak{Z}(H)$ і $\alpha^p = 1$, то

$$\text{diag}[1, \alpha, \dots, \alpha^{p-1}] \in Z_2(W).$$

Нехай

$$a = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p] \quad (\alpha_i \in H)$$

— елемент із $Z_2(W)$. Тоді для кожного $x \in W$ знайдеться $z \in Z_1(W)$ так, що $x^{-1}ax = az$. Нехай

$$x = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_p] \quad (x_i \in H).$$

Тоді

$$x_i^{-1}\alpha_i x_i = \alpha_i \gamma \quad (\gamma \in \mathfrak{Z}(H)).$$

Нехай деяке α_j не міститься в $\mathfrak{Z}(H)$ і x_j такий елемент із H , що $x_j\alpha_j \neq \alpha_j x_j$. Візьмемо $x_i = 1$ ($i \neq j$). Одержано $\gamma = 1$ і неможливе $x_j\alpha_j = \alpha_j x_j$. Отже, $\alpha_i \in \mathfrak{Z}(H)$ ($i = 1, \dots, p$). Тепер із умови $[a, b] \in Z_1(W)$ легко одержати

$$\alpha_i = \gamma^{i-1}\alpha_1 \quad (\gamma \in \mathfrak{Z}(H), \gamma^p = 1).$$

Ми встановили, які елементи групи A належать групі $Z_2(W)$. Покажемо, що інших елементів в $Z_2(W)$ нема. Нехай це не так і

$$\text{diag}[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]b \in Z_2(W) \ (\beta_i \in H).$$

Тоді для будь-яких елементів $x_i \in H$ ($i = 1, \dots, p$) знайдеться елемент $\delta \in \mathfrak{Z}(H)$ такий, що

$$\text{diag}[x_1^{-1}\beta_1, \dots, x_p^{-1}\beta_p] \text{diag}[x_p, x_1, \dots, x_{p-1}] = \text{diag}[\beta_1\delta, \dots, \beta_p\delta].$$

Якщо H — неабелева група, то, взявши $x_1 = 1$, $x_p \in H \setminus \mathfrak{Z}(H)$, одержимо протиріччя з рівністю

$$x_1^{-1}\beta_1x_p = \beta_1\delta.$$

Нехай H — абелева група. Тоді

$$x_i = x_p\delta^{p-i} \quad (i = 1, \dots, p-1)$$

і $\delta^p = 1$. Якщо $p > 2$, то одержимо протиріччя, взявши $x_p = x_{p-1} = 1$ і $x_{p-2} \neq 1$. Нехай $p = 2$, але $|H| > 2$. Тоді в групі H існує елемент γ , порядок якого більший ніж 2. Якщо взяти $x_2 = 1$, $x_1 = \gamma$, то одержиться протиріччя з рівністю $x_1 = x_2\delta$. Отже, у всіх випадках (за виключенням: $p = 2$, $|H| = 2$) група $Z_2(W)$ міститься в A . Якщо $p = 2$ і $|H| = 2$, то W — група діедра порядку 8 і $Z_2(W) = W$.

Перейдемо до розгляду матриці X . Перш за все відмітимо, що

$$X^{-1}Z_i(W)X = Z_i(W) \ (i \geq 1).$$

Нехай $\alpha \in \mathfrak{Z}(H)$ і $\alpha^p = 1$. Так як $\mathfrak{Z}(H)$ — циклічна група, то в ній існує тільки одна підгрупа порядку p , це група $\langle \alpha \rangle$. Тоді в $Z_1(W)$ також одна підгрупа порядку p , це група $\langle \alpha E \rangle$. Тоді в групі $Z_2(W)$ існує лише одна абелева типу (p, p) підгрупа, ще група

$$\langle \alpha E, \text{diag}[1, \alpha, \dots, \alpha^{p-1}] \rangle.$$

Так як X — p -елемент і група $\langle \alpha \rangle$ не має автоморфізму порядку p , то $(\alpha E)X = X(\alpha E)$ і, отже, $\alpha x_{ij} = x_{ij}\alpha$. Існує $\beta \in \mathfrak{Z}(H)$, що

$$\text{diag}[1, \alpha, \dots, \alpha^{p-1}]X = X \text{diag}[\beta, \alpha^t\beta, \dots, \alpha^{t(p-1)}\beta]$$

для деякого $1 \leq t < p$. Звідси

$$\alpha^{i-1}x_{ij} = x_{ij}\alpha^{t(j-1)}\beta \quad (1 \leq i, j \leq p).$$

Для кожного індекса i ($i = 1, \dots, p$) існує тільки один індекс $j = j'$ ($1 \leq j' \leq p$), такий, що

$$\alpha^{i-1} = \alpha^{t(j'-1)}\delta$$

(це слідує із того, що α, β — елементи порядку p в $\mathfrak{Z}(H)$). Для всіх інших j ($j = 1, \dots, p$; $j \neq j'$) будемо мати $x_{ij} = 0$. Отже, існує підстановка ρ на p символах така, що

$$X = \text{diag}[x_{1\rho(1)}, \dots, x_{p\rho(p)}]\tilde{\rho}.$$

Розглянемо p -групу $W_1 = \langle W, X \rangle$. Це мономіальна група над кільцем $M(n, T)$. Кожний елемент групи W_1 представляється у вигляді добутку діагональної матриці на матрицю підстановки. Поставивши у відповідність елементам групи W_1 ці підстановки, одержимо деякий гомоморфізм $f : W_1 \rightarrow S_p$. p -підгрупа $f(W_1) \subset S_p$ містить підстановки σ, ρ , причому σ — елемент порядку p . Але в групі S_p існує лише одна

p -підгрупа, що містить підстановку σ . Отже, $f(W_1) = \langle \sigma \rangle$ і тоді $\rho = \sigma^r$ для деякого r . Таким чином, $\tilde{\rho} \in W$ і група W містить

$$X\tilde{\rho}^{-1} = \text{diag}[x_1, \dots, x_p](x_i = x_{i\rho(i)}).$$

Легко бачити, що x_i — p -елемент в групі $GL(n, T)$ і $\langle H, x_i \rangle$ — p -підгрупа в цій групі. Але H — силовська підгрупа в $GL(n, T)$. Це значить, що $x_i \in H$ і тоді $X \in W$, що й треба було показати. Доведення обґрунтовувалося на будові групи $Z_2(W)$. Випадок $p = 2, |H| = 2$ потрібно розглянути окремо. В цьому випадку $H = \{1, -1\}, n = 1$ і

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Нехай поле T містить елемент $\gamma = \sqrt{\pm 2}$. Тоді матриця

$$V = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

буде 2-елементом в групі $GL(2, T)$ і група $\langle W, V \rangle$ буде 2-підгрупою в $GL(2, T)$. Лема доведена.

§13. Деякі леми

Нехай p — просте число, T — поле, характеристика якого відмінна від p .

Лема 13.1. *Нехай G — скінчена p -група, що містить циклічну нормальну підгрупу $H = \langle a \rangle$ порядку p^n , яка суміщається зі своїм централізатором в цій групі. Тоді G одна із груп:*

$$\begin{aligned} G &= H; \\ G_p &= \left\langle a, b \mid a^{p^n} = b^{p^k} = 1, b^{-1}ab = a^{1+p^{n-k}} \right\rangle \quad (p \neq 2, 0 < k < n); \\ G_{21} &= \left\langle a, b \mid a^{2^n} = b^{2^k} = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{n-k}} \right\rangle \quad (n > 2, 0 < k < n-1); \\ G_{22} &= \left\langle a, b \mid a^{2^n} = b^{2^k} = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-k}} \right\rangle \quad (n > 2, 1 < k < n-1); \\ G_{23} &= \left\langle a, b, c \mid a^{2^n} = b^{2^k} = 1, c^2 = a^{j2^{n-1}}, b^{-1}ab = a^{1+2^{n-k}}, c^{-1}ac = a^{-1}, bc = cb \right\rangle \\ &\quad (n > 2, j = 0, 1, k < n-1); \\ D_{2^n} &= \left\langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle; \\ Q_{2^{n+1}} &= \left\langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle; \\ QD_{2^n} &= \left\langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-1}} \right\rangle. \end{aligned}$$

В усіх випадках група G є розширення підгрупи H з допомогою деякої p -підгрупи групи автоморфізмів групи H .

Будемо далі вживати позначення ξ_n для первісного кореня степеня p^n із одиниці при $p \neq 2$ і для кореня степеня 2^n із мінус одиниці при $p = 2$. Ці корені будемо вибирати так, щоб $\xi_{s+1}^p = \xi_s$ ($s \geq 1$).

Лема 13.2 (Лема Бермана). *Або для всіх $i = 1, 2, \dots$ виконується рівність $T(\xi_i) = T(\xi_1)$, або існує таке натуральне n , що $T(\xi_n) = T(\xi_1)$ і $(T(\xi_r) : T(\xi_1)) = p^{r-n}$, якщо $r > n$.*

Доведення. Нехай $K = T(\xi_n)$ ($n \geq 1$) і ξ_{n+1} не міститься в K . Покажемо, що тоді ξ_{n+2} не міститься в $K(\xi_{n+1})$. Припустимо, що це не так і $\xi_{n+2} \in K(\xi_{n+1})$. Нехай φ — такий автоморфізм поля $K(\xi_{n+1})$ над полем K , що

$$\varphi(\xi_{n+1}) = \varepsilon \xi_{n+1}, \quad (\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1).$$

Очевидно, $\varphi^p = 1$. Так як ξ_{n+1} — корінь многочлена $x^{p^2} - \xi_n$ над полем K , то

$$\varphi(\xi_{n+2}) = \zeta \xi_{n+2},$$

ζ — корінь степеня p^2 із одиниці. Нехай $\varphi(\zeta) = \zeta$. Тоді

$$\varepsilon \xi_{n+1} = \varphi(\xi_{n+2}^p) = \zeta^p \xi_{n+1},$$

$$\xi_{n+2} = \varphi^p(\xi_{n+2}) = \zeta^p \xi_{n+2},$$

що дає протиріччя. Нехай

$$\varphi(\zeta) = \varepsilon^s \zeta.$$

Тоді $p \neq 2$ і $n = 1$. Маємо

$$\varphi^p(\xi_3) = \varepsilon^{st} \zeta^p \xi_3, \quad t = \frac{p-1}{2} p,$$

тобто і в цьому випадку одержимо протиріччя. Ми показали, що ξ_{n+2} не міститься в $T(\xi_{n+1})$, якщо ξ_{n+1} не міститься в $T(\xi_n)$. Звідси легко одержати доведення леми.

Наслідок 13.1. Нехай $(T(\xi_n) : T(\xi_1)) = p^s$. Тоді $T(\xi_1) = T(\xi_n^{p^s})$.

§14. Примітивні зображення деяких p -груп

Нехай G — p -група, T — поле, $\text{char } T \neq p$ і при $p = 2 \text{ char } T = 0$. Будемо називати два точних T -зображення Γ_1, Γ_2 групи G спряженими, якщо групи $\Gamma_1(G), \Gamma_2(G)$ спряжені в групі $GL(m, T)$ (m — степінь цих зображень). Незвідне T -зображення Γ групи G назовемо примітивним (імпримітивним), якщо матрична група $\Gamma(G)$ є примітивна (імпримітивна). Будемо використовувати позначення попереднього параграфа.

Лема 14.1.

- 1) Групи $G_p, G_{21}, G_{22}, G_{23}$ не мають точного примітивного зображення над полем T .
- 2) Нехай циклічна група H має точне примітивне зображення Δ над полем T . Тоді $T(\xi) = T(\xi_1)$, де ξ — первісний корінь степеня p^n із одиницею, $\xi_1 = \xi^{p^{n-1}}$ при $p \neq 2$ і $\xi_1 = i = \sqrt{-1}$ при $p = 2$. Okрім цього, якщо $p = 2$ і $n = 2$, то $i \in T$. Поле $T(\xi_1)$ є модулем зображення Δ .

Доведення. 1) Скористаємось результатами і позначеннями §11. Розглянемо спочатку випадок $G \neq G_{23}$. Нехай $K = T(\xi)$ і Δ_0 — точне незвідне K -зображення групи G . Зображення Δ_0 спряжено із зображенням χ^G , що індукується лінійним характером

$$\chi : H = \langle a \rangle \rightarrow K, \quad \chi(a) = \xi,$$

підгрупи H групи G . Будемо вважати, що $\Delta_0 = \chi^G$. Відмітимо, що Δ_0 — абсолютно незвідне зображення групи G над полем K . Нехай δ — характер зображення Δ_0 . Тоді

$$\delta(g) = \begin{cases} 0, & g \in G \setminus \langle a^{p^k} \rangle; \\ p^k \chi(g), & g \in \langle a^{p^k} \rangle. \end{cases}$$

Доведемо це. Якщо $t \in \{0, 1, \dots, p^k - 1\}$, то всі значення $(1 + p^{n-k})^t$ попарно різні за $\text{mod } p^n$. Якщо при цьому $\alpha(t)$ — така функція, що $(1 + p^{n-k})^t = 1 + \alpha(t)p^{n-k}$, то ця функція приймає попарно різні значення за $\text{mod } p^k$. Нехай

$$\Phi(x) = x^{p^k-1} + \dots + x + 1.$$

Тоді для $g \in \langle a \rangle$

$$\delta(g) = \sum_{t=0}^{p^k-1} \chi(g)^{(1+p^{n-k})^t} = \chi(g)\Phi(\chi(g)^{p^{n-k}}),$$

звідки слідують формули для характера δ . Нехай $\eta = \xi^{p^k}, T_1 = T(\eta), L = T_1[x]$ — степенева алгебра над полем T_1 така, що $x^{p^k} = \eta$. Ця алгебра буде T_1G -модулем:

$$\begin{aligned} a(v) &= xv \quad (v \in L), \quad b^{-1}(1) = 1, \\ b^{-1}(x^j) &= b^{-1}(a^j(1)) = b^{-1}a^j b(b^{-1}(1)) = x^{j\mu} \quad (\mu = 1 + p^{n-k}). \end{aligned}$$

Нехай $\Gamma = T_1$ -зображення групи G , що має модуль L . Легко бачити, що зображення Γ — імпримітивне. Неважко бачити, що характер зображення Γ такий же, як характер δ . Звідси і з рівності степенів випливає, що зображення Δ_0 і зображення Γ є еквівалентні над полем K . Таким чином, Γ є абсолютно незвідним зображенням групи G над полем T_1 , що є полем характера цього зображення над полем T . Таким чином, T_1 — поле розкладу зображення Δ_0 . Нехай $\rho : T_1 \rightarrow M(d, T)$ — зображення поля T_1 матрицями порядку $d = (T_1 : T)$ над полем T і $T\Gamma$ — T -зображення групи G , яке отримується із зображення Γ заміною кожного матричного елемента $\alpha \in T_1$ на матрицю $\rho(\alpha)$. Тоді $T\Gamma$ — точне незвідне зображення групи G над полем T і будь-яке точне незвідне T -зображення з точністю до спряженості одержується описаним способом. Так як зображення Γ є імпримітивне, то зображення $\rho\Gamma$ також імпримітивне. Отже, група G ($G \neq G_{23}$) не має точного примітивного зображення над полем T . Нехай тепер $G = G_{23}$. Як і в розглянутому випадку, точне абсолютно незвідне K -зображення Δ_0 індукується характером χ підгрупи H . Нехай $H_1 = \langle H, c \rangle$ і $\delta_1 = \chi^{H_1}$. Тоді $\Delta_0 = \delta_1^G$ і поле розкладу зображення δ_1 буде полем розкладу зображення Δ_0 . Тоді $\rho(\Delta_0) = (\rho(\delta_1))^G$ — точне незвідне, але імпримітивне T -зображення групи G_{23} . 1) доведено.

2) Нехай Δ — точне примітивне зображення циклічної групи H над полем T , але $r = (T(\xi) : T(\xi_1)) > 1$. Тоді $r = p^s$, $s > 0$ і нехай T_1 таке підполе в $T(\xi)$, що $(T(\xi) : T_1) = p$. Тоді $\xi^p \in T_1$. Поле $T(\xi)$ буде модулем зображення $\Delta : a(v) = \xi v$ ($v \in T(\xi)$). Неважко бачити, що $\{T_1, \xi T_1, \dots, \xi^{p-1} T_1\}$ — система імпримітивності TG -модулля $T(\xi)$. Це суперечить примітивності зображення Δ . Отже, $T(\xi) = T(\xi_1)$. Якщо $p = 2$ і $s = 2$, але $(T(i) : T) = 2$, то

$$\Delta(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

що також суперечить примітивності Δ . Отже, $i \in T$. Лема доведена.

Введемо в розгляд такі 2-групи:

$$C_{2^{n+1}} = \left\langle a_n \mid a_n^{2^{n+1}} = 1 \right\rangle$$

— циклічна група порядку 2^{n+1} ;

$$C_{2^\infty} = \left\langle a_n \ (n = 0, 1, \dots) \mid a_n^2 = a_{n-1}, \ a_0^2 = 1 \right\rangle$$

— група типу 2^∞ ;

$$D_{2^{n+1}} = \left\langle C_{2^{n+1}}, \ b \mid b^2 = 1, \ b^{-1}a_n b = a_n^{-1} \right\rangle$$

— група діедра порядку 2^{n+2} ;

$$D_{2^\infty} = \langle C_{2^\infty}, b \mid b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \ (a \in C_{2^\infty}) \rangle;$$

$$Q_{2^{n+2}} = \langle C_{2^{n+1}}, b \mid b^2 = a_n^{2^n}, b^{-1}a_n b = a_n^{-1} \rangle$$

— група кватерніонів порядку 2^{n+2} ($n \geq 2$);

$$Q_{2^\infty} = \langle C_{2^\infty}, b \mid b^2 = a_0, b^{-1}ab = a^{-1} \ (a \in C_{2^\infty}) \rangle;$$

$$QD_{2^{n+1}} = \langle C_{2^{n+1}}, b \mid b^2 = 1, b^{-1}a_n b = a_n^{-1+2^n} \rangle$$

— квазідіедральна група порядку 2^{n+2} ($n \geq 2$).

Нехай T — поле характеристики нуль, T' — його алгебраїчне замикання, ξ_n — первісний корінь степеня 2^{n+1} із одиниці, $\xi_n^2 = \xi_{n-1}$, $\xi_1 = \sqrt{-1}$,

$$\alpha_n = \xi_n + \xi_n^{-1}, \beta_n = \xi_n - \xi_n^{-1}.$$

Нехай поле T не містить $i = \sqrt{-1}$ (тобто $\beta_1 = 2i$ не міститься в цьому полі). Відмітимо, що тоді при $n > 1$ поле T не може одночасно містити α_n і β_n . Вивчимо T -зображення вказаних 2-груп.

Лема 14.2.

1) Нехай натуральне n найбільше таке, що $\alpha_n \in T$. Тоді відповідність

$$\Delta D_{2^{n+1}} : a \rightarrow A_n = 1/2 \begin{pmatrix} \alpha_n & i\beta_n \\ -i\beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

буде єдиним з точністю до спряженості абсолютно незвідним точним зображенням групи $D_{2^{n+1}}$ над полем T . Зображення $\Delta D_{2^{n+1}}$ є імпримітивним лише у випадку $n = 1$.

Далі нехай в полі T існує розв'язок (γ, δ) рівняння

$$x^2 + y^2 = -1$$

(з невідомими x, y). Тоді відповідність

$$\Delta Q_{2^{n+2}} : a \rightarrow A_n = 1/2 \begin{pmatrix} \alpha_n & i\beta_n \\ -i\beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}$$

буде єдиним з точністю до спряженості абсолютно незвідним точним і примітивним зображенням групи $Q_{2^{n+2}}$ над полем T . Нехай в полі T не існує розв'язку рівняння $x^2 + y^2 = -1$. Тоді точне незвідне T -зображення групи $Q_{2^{n+2}}$ з точністю до спряженості має вигляд:

$$\tilde{\Delta} Q_{2^{n+2}} : a \rightarrow \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення, очевидно, є імпримітивне.

2) Нехай $\alpha_n \in T$ ($n = 1, 2, \dots$). Тоді розглянуті в 1) T -зображення $\Delta D_{2^{n+1}}$, $\Delta Q_{2^{n+2}}$ ($\tilde{\Delta} Q_{2^{n+2}}$) груп $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+2}}$ однозначно продовжуються до T -зображення ΔD_{2^∞} , ΔQ_{2^∞} ($\tilde{\Delta} Q_{2^\infty}$) груп D_{2^∞} , Q_{2^∞} відповідно. Зображення ΔD_{2^∞} , ΔQ_{2^∞} примітивні, зображення $\tilde{\Delta} Q_{2^\infty}$ є імпримітивне.

Доведення. Нехай $K = T(i)$. Тоді $\xi_n \in K$. Поле K має єдиний неодиничний автоморфізм Σ над полем T : $\Sigma(i) = -i$, $\Sigma(\xi_n) = \xi_n^{-1}$. Очевидно, $\Sigma(i\beta_n) = i\beta_n \in T$ і

$$\xi_n = 1/2(\alpha_n + i(-i\beta_n))$$

є розкладом елемента ξ_n за базисом 1, i поля K над полем T . Отже, оператор множення на ξ_n в цьому базисі буде мати матрицю A_n . Одержано T -зображення $a_n \rightarrow A_n$ групи C_n , модулем якого є поле K . Продовжимо це зображення на діедральну і кватерніонну групи. Для цього в полі K визначимо дію оператора b . Нехай

$$b(1) = \alpha + i\beta,$$

де α, β деякі елементи поля T . Тоді

$$b(i) = b(a_1(1)) = ba_1b^{-1}(b(1)) = a_1^{-1}(b(1)) = -ib(1).$$

Звідси слідує, що

$$b(v) = \Sigma(v)b(1) \quad (v \in K).$$

Елемент $\omega = b(1)$ не може бути довільним. Так як $b^2 = 1$ в діедральній групі і $b^2 = a_n^{2^n}$ в кватерніонній групі, то

$$\omega\Sigma(\omega) = \pm 1,$$

де плюс береться для групи $D_{2^{n+1}}$, а мінус для групи $Q_{2^{n+2}}$ (другий випадок можливий тоді і тільки тоді, коли координати елемента $\omega = \gamma + i\delta$ будуть розв'язком рівняння $x^2 + y^2 = -1$). Нехай для $\omega = b(1)$ вказана умова виконується. Позначимо через K_ω одержаний при цьому TG -модуль ($G = \langle C_{2^n}, b \rangle$). Покажемо, що всі такі модулі є попарно ізоморфні. Нехай $K_{\omega_1}, K_{\omega_2}$ — два TG -модулі. Тоді $N(\omega_1\omega_2^{-1}) = 1$ (N — функція норми: $N(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$). Як відомо, $N(v) = 1$ ($v \in K$) тоді і тільки тоді, коли $v = u\Sigma(u^{-1})$ ($u \in K$). Отже, для деякого елемента $\rho \in K$

$$\rho\omega_1 = \omega_2\Sigma(\rho).$$

Тоді відображення $\varepsilon : K_{\omega_2} \rightarrow K_{\omega_1}$ таке, що $\varepsilon(v) = \rho v$ ($v \in K$) буде ізоморфізмом TG -модулів. Таким чином, з точністю до еквівалентності існує тільки одне продовження зображення Δ групи C_{2^n} до зображення у випадку діедральної групи і не більше одного продовження для випадку кватерніонної групи. В першому випадку можна взяти $b(1) = 1$ і тоді $\Delta(b) = \text{diag}[1, -1]$, а в другому — $b(1) = \gamma + i\delta$, $\gamma^2 + \delta^2 = -1$, ($\gamma, \delta \in T$) і тоді

$$\Delta(b) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

В результаті ми одержимо ті зображення, що вказані в лемі.

Нехай Γ — точне незвідне T' -зображення групи G . Тоді існує лінійний характер $\chi : C_{2^n} \rightarrow T'$ такий, що $\Gamma = \chi^G$, тобто це зображення індукується цим характером. Очевидно, $\chi(a_n) = \xi$ — один із коренів степеня 2^n із -1 . Зображення, що здобувається для іншого значення характера буде спряжено із зображенням Γ . Нехай $\chi(a_n) = \xi_n$. Тоді характер зображення Γ буде таким же, як характер зображення Δ , яке вказане в лемі. Отже, ці зображення еквівалентні і лема доведена для груп діедра і доведена для груп кватерніонів у випадку розв'язності певного рівняння. Розглянемо випадок коли це рівняння не має розв'язку. Цей випадок стосується групи $Q_{2^{n+2}}$. Її зображення Γ має вигляд:

$$a_n \rightarrow \text{diag}[\xi_n, \xi_n^{-1}], \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення еквівалентно зображеню

$$a_n \rightarrow A_n, \quad b \rightarrow i \text{diag}[1, -1]$$

над полем K , а сума двох цих зображень буде еквівалентна (над K) тому T -зображеню (групи $Q_{2^{n+2}}$), яке наведене в лемі. (Відмітимо, що поле K є те найменше розширення поля T характера зображення Γ , над яким це зображення можна реалізувати,

інакше кажучи, індекс Шура зображення Γ відносно поля T дорівнює $(K : T) = 2$. Ми описали той шлях, з допомогою якого здобуваються точні незвідні T -зображення групи $Q_{2^{n+2}}$. Перша частина леми доведена. Друга частина є наслідком першої.

Розглянемо тепер випадок, коли поле T містить елементи вигляду β_n ($n > 1$). Відмітимо, що поле T не може містити два таких різних елементи (інакше $i \in T$).

Лема 14.3. *Нехай $\beta_n \in T$ для деякого $n \geq 2$. Тоді відповідність*

$$\Delta Q_{2^{n+2}} : a \rightarrow A'_n = 1/2 \begin{pmatrix} \beta_n & i\alpha_n \\ -i\alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

буде з точністю до спряженості єдиним точним абсолютно незвідним і примітивним T -зображенням групи $Q_{2^{n+2}}$.

Доведення цієї леми аналогічне випадку попередньої леми. Відмінність тільки в іншій дії автоморфізму $\Sigma : \Sigma(\xi_n) = -\xi_n^{-1}$. Okрім цього, $\Sigma(\beta_n) = \beta_n$, $\Sigma(i\alpha_n) = i\alpha_n$ і

$$\xi_n = 1/2(\beta_n + i(-i\alpha_n)).$$

Нехай поле T задовільняє умові 1) леми 14.2 або умовам леми 14.3, T_0 — таке підполе в T , що $T = T_0(\alpha_n)$ або, відповідно, $T = T_0(\beta_n)$, G одна із груп $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+2}}$ або, відповідно, $G = Q_{2^n}$ і Δ — T -зображення групи G , що описане в лемах 14.2, 14.3. Нехай $d = (T : T_0)$ і $\rho : T \rightarrow M(d, T_0)$ — матричне над полем T_0 зображення степеня d поля T , яке ставить у відповідність довільному елементу $\omega \in T$ матрицю $\rho(\omega)$ оператора $\widehat{\omega}$ множення на цей елемент ($\widehat{\omega}(x) = \omega x$) ($x \in T$) в певному базисі поля T над T_0 . Якщо $A = (\alpha_{ij})$ — матриця порядку s над полем T , то через $\rho(A)$ позначимо матрицю порядку ds над полем T_0 , що одержується заміною матричних елементів α_{ij} на відповідні матриці $\rho(\alpha_{ij})$.

Лема 14.4. *Відповідність*

$$\rho(\Delta) : g \rightarrow \rho(\Delta(g)) \quad (g \in G)$$

буде незвідним зображенням групи G над полем T_0 . Будь-яке точне незвідне T_0 -зображення групи G спряжено з зображенням $\rho(\Delta)$. Нехай $d > 1$. Зображення $\rho(\Delta)$ буде примітивним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$T = T_0(\alpha_n), \quad G = Q_{2^{n+2}}$$

і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не має розв'язку в полі $T_0(\alpha_{n-1})$.

Доведення. Нехай $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$ — всі автоморфізми поля T над полем T_0 і

$$\Delta_j : g \rightarrow \Sigma_j(\Delta(g)) \quad (g \in G)$$

— T -зображення групи G , спряжене автоморфізмом Σ_j до зображення Δ . Зображення $\Delta_1, \dots, \Delta_d$ попарно нееквівалентні над полем T , а їх сума $\Delta_1 + \dots + \Delta_d$ еквівалентна над полем T незвідному зображеню групи G матрицями над полем T_0 . Характер зображення $\rho(\Delta)$ рівний характеру суми $\Delta_1 + \dots + \Delta_d$ і, отже, з точністю до еквівалентності (над полем T)

$$\rho(\Delta) = \Delta_1 + \dots + \Delta_d.$$

Звідси випливає незвідність T_0 -зображення $\rho(\Delta)$ групи G . Так як всі точні незвідні T -зображення групи G попарно спряжені, то попарно спряженими будуть всі точні незвідні групи G над полем T_0 .

Нехай $d > 1$. Дослідимо на примітивність зображення $\rho(\Delta)$ групи G над полем T_0 . Модулем цього зображення є поле $K = T(i) = T_0(\gamma_n, i)$, де $\gamma_n = \alpha_n$, або $\gamma_n = \beta_n$. Група G діє в цьому модулі так, як вказано при доведені лем 14.2, 14.3. Так як

$$\alpha_n^2 = \alpha_{n-1} + 2, \quad \beta_n^2 = \alpha_{n-1} - 2,$$

то $\alpha_{n-1} \in T$, поле $T_1 = T_0(\alpha_{n-1})$ міститься в полі T і $(T : T_1) = 2$. Нехай $K^1 = T_1(i)$. Тоді $(K : K^1) = 2$,

$$K = K^1 + K^1\xi_n, \quad \xi_n^2 \in K^1.$$

Нехай G — діедральна або квазідіедральна група. Тоді

$$a_n(K^1) = K^1\xi_n, \quad a_n(K^1\xi_n) = K^1\xi_n^2 = K^1,$$

$$b(K^1) = \Sigma(K^1) = K^1, \quad b(K^1\xi_n) = K^1\xi_n^{-1} = (K^1\xi_n^{-2})\xi_n = K^1\xi_n.$$

Звідси слідує, що T_0 -підпростори $K^1, K^1\xi_n$ утворюють систему імпримітивності групи G , тобто зображення $\rho(\Delta)$ буде імпримітивним.

Розглянемо випадок групи $G = Q_{2^{n+2}}$ і нехай при цьому

$$K_\omega = K, \quad b(x) = \Sigma(x)\omega \quad (x \in K)$$

— буде модулем зображення $\rho(\Delta)$. Нехай в полі T_1 рівняння $x^2 + y^2 = -1$ має розв'язок (γ_1, δ_1) . Як показано при доведені леми 14.2, TG -модулі

$$K_\omega, \quad K_{\omega_1} \quad (\omega_1 = \gamma_1 + i\delta_1 \in T_1)$$

будуть ізоморфні. Отже можна вважати, що T_0 -зображення $\rho(\Delta)$ побудовано для модуля $K = K_{\omega_1}$. Так як, при цьому, $b(K^1) = K^1$, то $\{K^1, K^1\xi_n\}$ — система імпримітивності групи G , тобто T_0 -зображення $\rho(\Delta)$ буде імпримітивним. Навпаки, нехай зображення $\rho(\Delta)$ групи $G = Q_{2^{n+2}}$ є імпримітивним і K_ω ($\omega \in T$) є модулем цього зображення. Так як цей модуль імпримітивний, то

$$K_\omega = L_1 \oplus L_2$$

— пряма сума T_0 -підпросторів таких, що

$$a_n(L_1) = L_2, \quad a_n(L_2) = L_1, \quad b(L_j) = L_j.$$

Це можливо тільки у випадку коли $L_1 = K^1, L_2 = K^1\xi_n$. Це значить, що K^1 є модулем для групи $Q_{2^{n+1}}$. Тоді $b(1) \in K^1$, тобто

$$b(1) = \gamma_1 + i\delta_1 \quad (\gamma_1, \delta_1 \in T_1, \quad \gamma_1^2 + \delta_1^2 = -1).$$

Лема доведена.

§15. Силовські p -підгрупи групи $GL(n, T)$ ($p > 2$ або $p = 2$ і $\sqrt{-1} \in T$)

Як і раніше, T — поле, характеристика якого відмінна від p . Так само будемо вживати позначення ξ_n для первісного кореня степеня p^n із одиниці при $p \neq 2$ і для кореня степеня 2^n із -1 . Нехай $d = (T(\xi_1) : T)$ і $\rho : T(\xi_1) \rightarrow M(d, T)$ — зображення поля $T(\xi_1)$ матрицями порядку d над полем T . Через $P_q(K)$ (q — просте) будемо позначати силовську q -підгрупу в мультиплікативній групі поля K .

Теорема 15.1. *Нехай $p > 2$ або при $p = 2$ поле T містить корінь $\sqrt{-1}$. В групі $GL(n, T)$ тоді і тільки тоді існує неодинична примітивна силовська p -підгрупа, коли $n = d = (T(\xi_1) : T)$. Якщо U — примітивна силовська p -підгрупа в групі $GL(d, T)$, то група U спряжена з групою $\rho(P_p(T(\xi_1)))$.*

Доведення. Нехай G — примітивна p -підгрупа групи $GL(n, T)$. Використаємо лему 12.3, згідно якої група G є розширення деякої p -підгрупи F в мультиплікативній групі K^* поля $K = T(\xi)$ ($\xi^{p^s} = 1$) з допомогою p -підгрупи G/F групи Галуа поля K над полем T .

Нехай G — нескінченна група. Тоді $F \cong C_{p^\infty} = \langle a_n \ (n = 0, 1, \dots) \mid a_n^p = a_{n-1}, a_0^p = 1 \rangle$ — група типу p^∞ ,

$$T(\xi_1) = T(\xi_m) \quad (m = 1, 2, \dots), \quad K = T(\xi_1)$$

(див. лему 13.2). При $p > 2$ група типу p^∞ не має автоморфізму порядку p , тобто $G = F$ і $n = (T(\xi_1) : T)$. При $p = 2$ група типу 2^∞ має автоморфізм порядку 2, який кожний елемент x цієї групи переводить в обернений x^{-1} . Нехай для цього автоморфізма існує автоморфізм σ поля K над полем T . Тоді $\sigma(\xi) = \xi^{-1}$, але неможливо $\sigma(i) = -i$ (поле T містить $i = \sqrt{-1}$). Отже, поле K такого автоморфізму не має. Таким чином, і при $p = 2$ маємо $G = F$ і тоді $n = 1 = (T(\xi) : T)$. Отже, в обох випадках $G = F = \rho(P_p(T(\xi_1)))$ і $n = (T(\xi) : T) = (T(\xi_1) : T)$.

Нехай G — скінченна група. Використаємо лему 13.1. При $p > 2$ маємо $G = G_p$, а при $p = 2$ група G може бути лише групою G_{21} (лише для цієї групи відповідні автоморфізми поля K зберігають елемент $i \in T$). З леми 14.1 випливає, що G — циклічна група і поле K є TG -модулем. Отже, $G = \rho(P_p(T(\xi_1))), n = d = (T(\xi_1) : T)$. З другого боку, якщо поле $T(\xi_1)$ є модулем T -зображення для деякої p -групи G , то в силу обмеження $0 \leq d < p$, цей модуль не може бути імпрimitивним. Отже, група $\rho(P_p(T(\xi_1)))$ — примітивна. Це доводить теорему.

Нехай виконуються умови теореми 15.1, $U = \rho(P_p(T(\xi_1)))$ — силовська p -підгрупа групи $GL(d, T)$ ($d = (T(\xi_1) : T)$, $\xi_1^p = 1$ ($p \neq 2$), $\chi^2 = -1$ ($p = 2$)). Введемо деякі позначення. Нехай C_p — циклічна порядку p група підстановок, породжена циклом $\sigma = (12 \dots p)$,

$$W_0 = U, \quad W_1 = W_0 \wr C_p, \quad \dots, \quad W_j = W_{j-1} \wr C_p$$

— сплетіння матричної групи W_{j-1} і групи підстановок C_p ($j = 1, 2, \dots$). З леми 12.4 випливає, що група W_j буде незвідною силовською p -підгрупою групи $GL(dp^j, T)$. Нехай m — довільне натуральне число,

$$\begin{aligned} m &= m_0 + dn \quad (0 \leq m_0 < d), \\ n &= n_0 + n_1 p + \dots + n_s p^s \quad (0 \leq n_i < p, \ n_s \neq 0) \end{aligned}$$

— p -ічний розклад числа n . Нехай

$$U_m = \langle 1 \rangle^{m_0} \times W_1^{n_1} \times \dots \times W_s^{n_s}$$

— прямий добуток груп, взятий по всіх тих j , для яких $n_j \neq 0$ ($\langle 1 \rangle^{m_0}$ — одинична група для випадку $m_0 \neq 0$).

Теорема 15.2. З точністю до спряженості група W_j є одною незвідною силовською p -підгрупою групи $GL(dp^j, T)$, а група U_m — одною силовською p -підгрупою в групі $GL(m, T)$.

Наслідок 15.1. Нехай характеристика поля T відмінна від p і при $p = 2$ це поле містить $\sqrt{-1}$. Тоді силовські p -підгрупи групи $GL(m, T)$ попарно спряжені в цій групі.

Наслідок 15.2. Нехай характеристика поля T відмінна від p . Будь-яка p -підгрупа H групи $GL(n, T)$ є групою Чернікова⁵, зокрема, ця підгрупа задовільняє нормалізаторний умові⁶.

⁵ p -група Чернікова — розширення прямого добутку скінченного числа груп типу p^∞ за допомогою скінченної p -групи.

⁶ Група, яка задовільняє нормалізаторний умові — група H всяка власна підгрупа якої відмінна від свого нормалізатора в групі H .

§16. Силовські 2-підгрупи групи $GL(n, T)$ ($\text{char } T = q > 2$)

Нехай ξ_s — корінь степеня 2^s із мінус одиниці і $\xi_s^2 = \xi_{s-1}$, $s \geq 1$, $\xi_0 = -1$. Через $P_2(K)$ будемо позначати силовську 2-підгрупу мультиплікативної групи K^* поля K .

Будемо вживати позначення:

$$\alpha_s = \xi_s + \xi_s^{-1}, \quad \beta_s = \xi_s - \xi_s^{-1} \quad (s \geq 1).$$

Відмітимо, що

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 2\xi_1, \quad \alpha_2 = \sqrt{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{-2}.$$

Нехай T — поле характеристики $q > 2$ і \mathbb{Z}_q — просте підполе із q елементів.

Лема 16.1. *Нехай $q \equiv 1 \pmod{4}$ або поле T містить скінченне підполе парного степеня над полем \mathbb{Z}_q . Якщо H — примітивна силовська 2-підгрупа групи $GL(n, T)$, то $n = 1$ і $H = P_2(T)$.*

Доведення. $\xi_1 = \sqrt{-1} \in T$ і лема випливає із результатів §14.

Нехай $q \equiv -1 \pmod{4}$ і будь-яке скінченне підполе в T має непарну степінь над полем \mathbb{Z}_q . Тоді $P_2(T) = \{1, -1\}$. Так як поле T містить $\sqrt{2}$ або $\sqrt{-2}$, то сплетіння $W_2(P_2(T)) = P_2(T) \wr S_2$ не буде силовською 2-підгрупою групи $GL(2, T)$.

Лема 16.2. *Нехай $q \equiv -1 \pmod{4}$. В групі $GL(m, T)$ ($m > 1$) тоді і тільки тоді міститься примітивна силовська 2-підгрупа, коли $m = 2$. Нехай s — найбільший показник такий, що 2^s ділить $q + 1$. Тоді $s \geq 2$, $\beta_s \in T$ і квазідіедральна група (порядку 2^{s+2})*

$$QD_{2^{s+1}} = \left\langle a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_s & i\alpha_s \\ -i\alpha_s & \beta_s \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (a^{2^{s+1}} = b^2 = 1, \quad b^{-1}ab = -a^{-1})$$

буде примітивною силовською 2-підгрупою в групі $GL(2, T)$ (див. також лему 14.3).

Доведення. Нехай G — примітивна силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ і F — максимальна нормальні абелеві підгрупи в G . Тоді $F \cong P_2(T(\xi))$, де $\xi^{2^n} = 1$ для деякого n , а група G/F ізоморфна силовській 2-підгрупі групи Галуа $G(K, T)$ поля $K = T(\xi)$ над полем T . Ця група породжується автоморфізмом Фробеніуса: $\sigma(v) = v^q$ ($v \in K$), порядок якого дорівнює $(K : T) = 2^k$ для деякого натурального k . Так як група типу 2^∞ не має автоморфізму типу σ , то група F буде скінченою і тоді група G суміщається з групою G_{22} або з групою QD_{2^n} з леми 13.1. Група G_{22} не має точного примітивного зображення над полем T , а в силу лем 14.3–14.4, степінь примітивного зображення групи QD_{2^n} рівна 2. Отже, $m = 2$. Група $GL(2, T)$ містить циклічну 2-підгрупу найвищого порядку 2^{s+1} . Отже, $n = s + 1$, $\xi = \xi_s$, $\xi^q = -\xi^{-1}$, $\sigma(\beta_s) = \beta_s$ і $\beta_s \in T$. Тоді група $QD_{2^{s+1}}$ міститься в групі $GL(2, T)$ і є примітивною силовською 2-підгрупою в цій групі. Лема доведена.

Нехай

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_t 2^t \quad (0 \leq n_j < 2, \quad n_t \neq 0)$$

— 2-ічний розклад натуральному числа n .

Теорема 16.1. *Нехай $q \equiv 1 \pmod{4}$ або поле T містить скінченне підполе парного степеня над простим підполем. Тоді будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(n, T)$ спряжена з групою*

$$(W_0)^{n_0} \times (W_1)^{n_1} \times \cdots \times (W_t)^{n_t}$$

$$(W_0 = P_2(T), \quad W_j = W_{j-1} \wr C_2 \quad (j = 1, 2, \dots)).$$

Теорема 16.2. Нехай $q \equiv -1 \pmod{4}$ і будь-яке скінченне підполе поля T має непарну розмірність над простим підполом. Тоді будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(n, T)$ спряжена з групою

$$(\langle -1 \rangle)^{n_0} \times (W_0)^{n_1} \times \cdots \times (W_{t-1})^{n_t}$$

$(W_j = W_{j-1} \wr C_2 \ (j = 1, 2, \dots), W_0 = QD_{2^{s+1}} — група, що вказана в лемі 16.2).$

§17. Силовські 2-підгрупи групи $GL(n, T)$ ($\text{char } T = 0$)

Нехай T — поле характеристики нуль і $i = \sqrt{-1}$ не міститься в цьому полі. Використовуючи результати про примітивні зображення 2-груп (див. §14) дамо описання силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$ ($m > 1$). Нагадаємо позначення. Нехай ξ_s — первісний корінь степеня 2^{s+1} із 1,

$$\alpha_s = \xi_s + \xi_s^{-1}, \quad \beta_s = \xi_s - \xi_s^{-1} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Наприклад, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2\sqrt{-1}$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\beta_2 = \sqrt{-2}$ і т. д. Якщо поле T містить α_s або β_s , то любому випадку $\alpha_{s-1} \in T$ ($s > 1$). Поле T не може містити одночасно α_s , β_s ($s \geq 1$) і не може містити одночасно двох різних β_s , β_k . Неважко бачити, що

$$\xi_s = \frac{1}{2}(\alpha_s - i(i\beta_s)) = \frac{1}{2}(\beta_s - i(i\alpha_s)),$$

що дає розклад за базисом 1, i . Окрім цього, ξ_s є коренем многочленів

$$x^2 - \alpha_s x + 1, \quad x^2 - \beta_s x - 1.$$

Нехай $K = T(i)$, $P_2 = P_2(T)$ і $P_2(K)$ — силовські 2-підгрупи в T^* і K^* відповідно. Очевидно, $P_2 = \langle -1 \rangle = \{1, -1\}$, $i \in P_2(K)$.

Введемо в розгляд нормене відображення $N : K \rightarrow T$, поклавши

$$N(a + bi) = a^2 + b^2 \quad (a, b \in T).$$

Якщо $a \in T$, то $N(a) = a^2$. Якщо $w \in T(i)$, $w \notin T$, то норма $N(w)$ рівна вільному члену квадратного тричлена над T , коренем якого є w .

Нехай σ — автоморфізм поля $T(i)$ такий, що $\sigma(i) = -i$. Тоді $\sigma(\xi_s) = \xi_s^{-1}$. Якщо $\alpha_s \in T$, то $i\beta_s \in T$ і якщо $\beta_s \in T$, то $i\alpha_s \in T$. Далі

$$N(w) = w\sigma(w), \quad w \in T(i).$$

Якщо $\omega \in P_2(K)$, то $N(\omega) = \pm 1$. Отже, можливі два випадки:

- 1) $N(P_2(K)) = \{1\}$;
- 2) $N(P_2(K)) = \{1, -1\}$.

В залежності від цих випадків проведемо описання силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$. Нехай всюди далі

$$m = m_0 + m_1 2 + \cdots + m_s 2^s$$

— 2-ічний розклад натурального числа m . Нехай H — підгрупа групи $GL(d, T)$. Через $W(H) = H \wr C_2$ будемо позначати сплетіння групи H і циклічної групи C_2 підстановок степеня 2. Нехай

$$W_0(H) = H, \quad W_j(H) = W_{j-1}(H) \wr C_2 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Група $W_j(H)$ — підгрупа в групі $GL(2^j d, T)$.

Розглянемо спочатку випадок нескінчених матричних 2-груп.

Теорема 17.1. Нехай $N(P_2(K))$ — однічна група і поле T задоволює умовам

- 1) всі елементи α_s ($s = 1, 2, \dots$) належать полю T ;
- 2) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не має розв'язків над полем T .

Тоді група

$$D_\infty = \left\langle b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_s & i\beta_s \\ -i\beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2, \dots) \right\rangle$$

буде примітивною силовською 2-підгрупою групи $GL(2, T)$. Нехай $W_0(D_\infty) = D_\infty, W_J(D_\infty) = W_{j-1}(D_\infty) \wr C_2$. Тоді група $W_j(D_\infty)$ буде незвідною силовською 2-підгрупою групи $GL(2^{j+1}, T)$. Будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ спряжена в цій групі з прямим добутком

$$P_2^{m_0} \times (W_0(H))^{m_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(H))^{m_s},$$

де $H = D_\infty$.

Теорема 17.2. Нехай $N(P_2(K))$ — однічна група і поле T задоволює умовам

- 1) всі елементи α_s ($s = 1, 2, \dots$) належать полю T ;
- 2) в полі T існують такі елементи γ, δ , що $\gamma^2 + \delta^2 = -1$.

Тоді група D_∞ і група

$$Q_\infty = \left\langle c = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}, a_s \quad (s = 1, 2, \dots) \right\rangle$$

будуть неізоморфними примітивними силовськими 2-підгрупами групи $GL(2, T)$, а групи $W_j(D_\infty)$ і $W_j(Q_\infty)$ будуть неізоморфними незвідними силовськими 2-підгрупами групи $GL(2^{j+1}, T)$.

Нехай $m - m_0 = 2(u + v)$ і

$$u = u_0 + u_1 2 + \cdots + u_k 2^k, \quad v = v_0 + v_1 2 + \cdots + v_r 2^r$$

— 2-ичні розклади. Тоді прямий добуток

$$P_2^{m_0} \times (W_0(D_\infty))^{u_0} \times \cdots \times (W_{k-1}(D_\infty))^{u_k} \times (W_0(Q_\infty))^{v_0} \times \cdots \times (W_{r-1}(Q_\infty))^{v_r}$$

буде силовською 2-підгрупою групи $GL(m, T)$. Різні пари (u, v) визначають неізоморфні силовські 2-підгрупи групи $GL(m, T)$. З точністю до спряженості (ізоморфізму) в групі $GL(m, T)$ існує $[\frac{m}{2}] + 1$ силовських 2-підгруп.

Розглянемо тепер випадки скінчених матричних 2-груп.

Теорема 17.3. Нехай $N(P_2(K))$ — однічна група і поле T задоволює умовам

- 1) не всі α_s містяться в полі T і нехай n найбільше таке, що $\alpha_n \in T$;
- 2) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не має розв'язку над полем $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Тоді діедральна група

$$D_{2^{n+1}} = \langle a_n, b = \text{diag}[1, -1] \rangle$$

порядку 2^{n+2} буде незвідною і примітивною при $n > 1$ силовською 2-підгрупою групи $GL(2, T)$. Група $W_j(D_{2^{n+1}})$ буде незвідною силовською 2-підгрупою групи $GL(2^{j+1}, T)$. Будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ буде спряжена з прямим добутком

$$P_2^{m_0} \times (W_0(H))^{m_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(H))^{m_s},$$

де $H = D_{2^{n+1}}$ при $n > 1$ і $H = P_2 \wr C_2$ при $n = 1$.

Теорема 17.4. Нехай $N(P_2(K))$ — однічна група і поле T задоволює умовам

- 1) не всі α_s містяться в полі T і нехай n найбільше таке що $\alpha_n \in T$;
- 2) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ має розв'язки над деякими полями $T(\alpha_s)$ і нехай r ($r \geq n$) найменше таке, що вказане рівняння має розв'язок (γ, δ) над полем $T(\alpha_r)$.

Тоді кватерніонна група

$$Q_{2^{r+2}} = \left\langle \tilde{a}_r = \begin{pmatrix} \rho(\alpha_r) & \rho(i\beta_r) \\ -\rho(i\beta_r) & \rho(\alpha_r) \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \rho(\gamma) & \rho(\delta) \\ \rho(\delta) & -\rho(\gamma) \end{pmatrix} \right\rangle$$

порядку 2^{r+2} буде примітивною силовською 2-підгрупою групи $GL(2d, T)$ (тут ρ — зображення поля $T(\alpha_r)$ матрицями порядку $d = (T(\alpha_r) : T)$). Група $W_j(Q_{2^{r+2}})$ буде незвідною силовською 2-підгрупою групи $GL(2^{j+1}d, T)$. Окрім цього, в групі $GL(2^{j+1}d, T)$ є ще одна силовська 2-підгрупа — $W_{j+l}(D_{2^{n+1}})$ ($l = \log_2 d$), що незоморфна групі $W_j(Q_{2^{r+2}})$. Нехай $m = d_0 + 2dm'$, де $0 \leq d_0 < 2d$ і, якщо $m \geq 2d$, то

$$m' = 2d(u + v), \quad u = u_0 + u_1 2 + \cdots + u_t 2^t, \quad v = v_0 + v_1 2 + \cdots + v_k 2^k$$

— 2-ичні розклади. Тоді прямий добуток

$$H_0 \times (W_0(H_1))^{u_0} \times \cdots \times (W_{t-1}(H_1))^{u_t} \times (W_0(H_2))^{v_0} \times \cdots \times (W_{k-1}(H_2))^{v_k},$$

де H_0 — силовська 2-підгрупа групи $GL(d_0, T)$ (вона описується попередньою теоремою), $H_1 = W_l(D_{2^{n+1}})$, $H_2 = Q_{2^{r+2}}$. Число всіх попарно неспряжених силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$ дорівнює $[\frac{m}{2d}] + 1$.

Теорема 17.5. Нехай $N(P_2(K)) = \{1, -1\}$. Тоді існує тільки один елемент $\beta_n \in T$ ($n \geq 2$). Єдиною (відмінною від групи $\langle -1 \rangle$) примітивною силовською 2-підгрупою матриць над полем T є квазідіедральна група матриць порядку 2:

$$Q_{2^{n+2}} = \left\langle a'_n = \begin{pmatrix} \beta_n & i\alpha_n \\ i\alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}, \quad b = \text{diag}[1, -1] \right\rangle$$

порядку 2^{n+2} .

Будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ буде спряжена в цій групі з прямим добутком

$$(\langle -1 \rangle)^{m_0} \times (W_0(H))^{m_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(H))^{m_s},$$

де $H = Q_{2^{n+2}}$.

Теорема 17.6. При будь-якому t силовські 2-підгрупи групи $GL(m, T)$ спряженні в цій групі тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:

- 1) $N(P_2(K)) = \langle -1 \rangle$ ($K = T(i)$);
- 2) $N(P_2(K)) = 1$ і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ нерозв'язне над полями $T(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \dots$

Доведення теорем 17.1–17.6 випливає з описання примітивних зображень 2-груп над полем T (див. §14) і загальних властивостей матричних силовських підгруп (див. §12).

Як підсумок одержуємо такий результат про спряженість силовських підгруп в матричних групах.

Наслідок 17.1. Нехай F — поле. Для всіх t силовські p -підгрупи групи $GL(m, F)$ спряженні в цій групі тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов:

- 1) $p > 2$ або $p = 2$ і $\sqrt{-1} \in F$;
- 2) $\text{char } F > 0$;
- 3) $p = 2$, $\text{char } F = 0$, $\sqrt{-1} \notin F$, $N(P_2(F(i))) = \langle -1 \rangle$ або $N(P_2(F(i))) = 1$ і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ нерозв'язне над полями $F(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \dots$